加法定理の証明について

数学実践教育研究会　レポート
北海道岩内高等学校　津嶋　雅顕

(その１) $\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$ について（余弦定理と２点間の距離を使う）

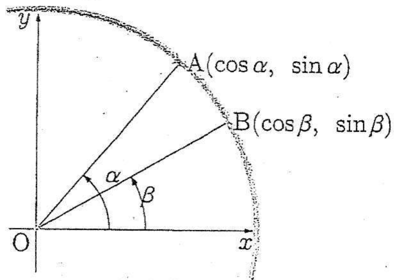
単位円上で、A（$\cos\alpha$, $\sin\alpha$)、B（$\cos\beta$, $\sin\beta$）の２点をとる。ただし、$\alpha>\beta$ とする。
ＯＡ＝１、ＯＢ＝１なので、　△ＯＡＢの辺ＡＢを余弦定理で表現すると、

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos(\alpha-\beta)$$

$$=1^2+1^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta) \quad \text{——①}$$

２点間の距離の公式より、

$$AB^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 \quad =2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta \quad \text{——②}$$




①、②は等しいので、

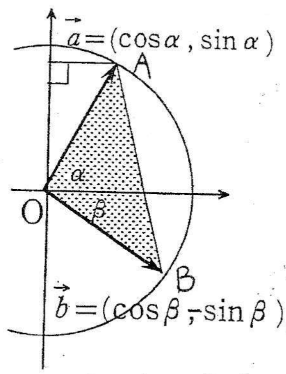
$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta$$

よって、$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(その２) $\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$ について（内積を使う）

単位円上で、A（$\cos\alpha$, $\sin\alpha$)、B（$\cos\beta$, $\sin\beta$）の２点をとる。ただし、$\alpha>\beta$ とする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$　、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると、$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha-\beta)=1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)$ ——①　（絶対値と cos の式）




$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ——②　（成分どうしの積の式）

①、②は等しいので、　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(その３) $\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ について（内積を使う）

単位円上で、A（$\cos\alpha$, $\sin\alpha$)、B（$\cos\beta$, $-\sin\beta$）の２点をとる。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$　、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると、$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{1\times1}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

よって、$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

＜補足＞
他の加法定理の式について
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ の証明がされているという前提で、

$\alpha$ を $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ に置き換えると $\cos((\dfrac{\pi}{2}-\alpha)+\beta)=\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta-\sin(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta$

(左辺) $=\cos((\dfrac{\pi}{2}-(\alpha-\beta))=\sin(\alpha-\beta)$

(右辺) $=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

よって、$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

ここで、$\beta$ を $-\beta$ に置き換えると、

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$