第８２回数実研 兼 第１８回数実研夏季セミナー

ちょっとした計算 Tips

札幌旭丘高等学校　菅原　満

■■■　は じ め に　■■■

「A4 版の１枚レポートをもって，数実研に参加しよう！」という数実研のキャンペーンにそって，今回は私も１枚レポートを持って来ました。

私は授業の中で，ちょっとした Tips などを通学通信として不定期で適宜『*Do Mathematics!*』と題して生徒に渡してきました。主な内容は次の通りです。

■数学Ⅰ■

- 複２次式の因数分解
- ２次方程式の解の配置
- 絶対値の基本
- 対称式の扱い
- 放物線が切り取る線分の長さ
- **２次関数の決定～３点通過条件…（※１）**
- グラフの平行移動
- 三角形の存在・決定条件
- 出題の裏側～有名角を複合する
- 覚え得①～センター試験

■数学Ⅱ■

- 加法定理の作図証明
- 三角関数変形公式
- 累乗根の定義
- **対数の値を求める…（※３）**
- 余りの置き方
- 組立除法_1
- **代入計算の工夫～組立除法の活用…（※２）**
- 因数定理
- 解と係数の関係＋相反方程式
- 点と直線の距離
- 工夫した計算～定積分

■数学Ⅲ■

- 漸近線を概観する
- 平均値の定理の図形的解釈

■数学Ａ■

- 集合～カルノー図・キャロル図を使おう
- 順列の確率

■数学Ｂ■

- ベクトルの終点
- 釣り合い係数
- 平方・立方の和の証明
- 漸化式～ $a_{n+1} = pa_n + f(n)$
- 統計 OnePoint

■数学Ｃ■

- ２次曲線まとめ
- 逆行列の証明

皆さんご存知のこととは思いますが，今回はこの中から計算の工夫に関するちょっとした Tips を３つほど紹介したいと思います。会員の皆様の日々の授業に参考になれば幸いです。

※１）２次関数の決定問題～３点通過
※２）$P(\alpha)$ の値を求める～組立除法の活用
※３）「対数の値を求める」

Do mathematics!

札幌旭丘高校
数学通信 2010.7.2
発行者：菅原　満

ちょっと数学したい人へ・・・

■□■ 2次関数の決定問題 ～ 3点を通過する場合■□■

「3点を通る2次関数を求めよ」という問題について考えてみよう．まずは，例題を・・・

■例■　グラフが3点$(-1,1)$，$(-2,-6)$，$(3,9)$を通るような2次関数を求めよ．

解答）求める2次関数を　$y=ax^2+bx+c$　とおくと3点を通るから代入して

$$\begin{cases} a-b+c=1 & \cdots ① \\ 4a-2b+c=-6 & \cdots ② \\ 9a+3b+c=9 & \cdots ③ \end{cases}$$

②－①より　$3a-b=-7$　…④

③－②より　$5a+5b=15 \iff a+b=3$　…⑤

④，⑤を連立して解くと　$a=-1$，$b=4$

①より　$c=6$

従って，求める2次関数は　$y=-x^2+4x+6$

ごく一般的な解答ですね．代入の方法を工夫してみましょう．

$\boxed{2次関数\ y=a(x-p)^2+b(x-p)+q \cdots ①}$　を考えてみましょう．ちょっと面白い形をしてますね．

Question_1　①は点(p,q)を通ることを示せ．

$x=p$　を代入すると　$y=a(\underline{p}-p)^2+b(\underline{p}-p)+q=q$　となるから　点(p,q)を通る．

従って，$y=a(x-p)^2+b(x-p)+q$　は，確かにグラフが点(p,q)を通る2次関数ということを示せました．

グラフが点(p,q)を通る2次関数は　$y=a(x-\underline{p})^2+b(x-\underline{p})+\underline{q}$　とおけ

これを使って（例）の問題を解いてみましょう．

別解）求める2次関数は$(-1,1)$を通るから，　$y=a(x+1)^2+b(x+1)+1$　とおける

$(-2,-6)$　を通るから　$-6=a-b+1 \iff a-b=-7$　…①

$(3,9)$　を通るから　$9=16a+4b+1 \iff 4a+b=2$　…②

①＋②より　$5a=-5$　$\therefore$　$a=-1$　①へ代入して　$b=6$

従って，求める2次関数は　$y=-(x+1)^2+6(x+1)+1$　　$\therefore$　$y=-x^2+4x+6$

求める2次関数の形で工夫をしたため計算量が減りましたね．知恵を使うと力を節約できます．では，教科書の問題をこの方法で解いてみましょう．

(p84 例題8)　3点$(-1,0)$，$(2,3)$，$(3,-4)$を通る2次関数を求めよ．

(p84 練習26)　3点$(1,0)$，$(2,1)$，$(-1,10)$を通る2次関数を求めよ．

Do mathematics!

札幌旭丘高校
数学通信 2012.2.14

発行者：菅原 満

◆◆◆ 組立除法を究める ◆◆◆

今回は組立除法の仕組みを考えてみましょう。

（Ⅰ）3 次式 ax^3+bx^2+cx+d を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの商を px^2+qx+r とすると，余りは 1 次より低い次数の定数となるから，余りを R とします。

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-\alpha)(px^2+qx+r)+R=px^3+(q-\alpha p)x^2+(r-\alpha q)x+R-\alpha r \quad \cdots\text{(A)}$$

係数を比較して $\begin{cases} a=p \\ b=q-\alpha p \\ c=r-\alpha q \\ d=R-\alpha r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=a \\ q=b+\alpha p \\ r=c+\alpha q \\ R=d+\alpha r \end{cases}$ これを計算するために，考えた書式が『組立除法』です。

Ex_1）$(x^3+5x-6)\div(x+2)$ ⇨

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & 5 & -6 \\ & \downarrow & -2 & 4 & -18 \\ \hline & 1 & -2 & 9 & \boxed{-24} \end{array}$$

商）x^2-2x+9

余り）-24

（ちょっとレベルアップ）$mx+n$ のように x の係数が 1 以外のときは，$mx+n=m\left(x+\dfrac{n}{m}\right)$ と考えると，

$$ax^3+bx^2+cx+d=(mx+n)\underline{(px^2+qx+r)}+R=\left(x+\frac{n}{m}\right)\times\underline{(mpx^2+mqx+mr)}+R \quad \cdots②$$

より，1 次式 $x+\dfrac{n}{m}$ で組立除法を実行した結果の <u>**商の係数を最後に m で割る。**</u>

余りは，②式からも分かる通り **余りはそのまま**です。

Ex_2）$(2x^3-5x^2-5)\div(2x-1)$ ⇨

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -5 & 0 & -5 \\ & \downarrow & 1 & -2 & -1 \\ \hline & 2 & -4 & -2 & \boxed{-6} \\ & [1 & -2 & -1] & \end{array}$$

商）x^2-2x-1

余り）-6

割る式が 2 次式のときを考えてみましょう。

（Ⅱ）3 次式 ax^3+bx^2+cx+d を 1 次式 $x^2-\alpha x-\beta$ で割ったときの商を $px+q$ とすると，余りは 2 次より低い次数となるから，余りは $Rx+S$ とします。

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x^2-\alpha x-\beta)(px+q)+Rx+S=px^3+(q-\alpha p)x^2+(R-\alpha q-\beta p)x+(S-\beta q) \cdots\text{(B)}$$

係数を比較して $\begin{cases} a=p \\ b=q-\alpha p \\ c=R-\alpha q-\beta p \\ d=S-\beta q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=a \\ q=b+\alpha p \\ R=c+\alpha q+\beta p \\ S=d \qquad +\beta q \end{cases}$ これを計算するために，考えた書式は下記です。

身につけて，計算力アップを図りましょう。

Ex_3）$(x^3-3x+2)\div(x^2+4x-1)$ ⇨

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & \times & -4 & 16 & \times \\ 1 & \times & \times & 1 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{14} & -2 \end{array}$$

（ちょっと一言）

この計算は最高次の係数が 1 のときのみ可能です。

x^2 の係数が 1 以外のときの方法は・・・・

諸君が考えて作ってみましょう。*Let's Challenge*！

商）$x-4$

余り）$14x-2$

Do mathematics!

札幌旭丘高校数学通信
2011.9. 2
発行者：菅原 満

■□■ 対数って何？ ■□■

$$64 \times 256$$

を計算するのは，暗算が得意な人でなければ，ちょっと計算しなければならないでしょう。しかし，

$$2^6 \times 2^8$$

であれば $2^{6+8} = 2^{14}$ と即答できるはずです。

まあ，2^{14} の計算は残りますが・・・・

対数とは *base*（底）となる数を決めて *base* の累乗の形で任意の数を表現するために作られたものです。

■□■ $\log_2 3$ って何？ ■□■

例として $\log_2 3$ を考えてみましょう。

これは，底を 2 として，3 を 2 の累乗で表す，即ち

$$3 = 2^{\square}$$

としたときの，□の中に入る数のことです。

つまりは $3 = 2^{\log_2 3}$

は当たり前のことです。 ※これが定義です。

実際，2 を底とするということは

$1 = 2^{\log_2 1} = 2^0 \Leftrightarrow \log_2 1 = 0$

$2 = 2^{\log_2 2} = 2^1 \Leftrightarrow \log_2 2 = 1$

$3 = 2^{\log_2 3}$

$4 = 2^{\log_2 4} = 2^2$

$5 = 2^{\log_2 5}$

$6 = 2^{\log_2 6}$

$7 = 2^{\log_2 7}$

$8 = 2^{\log_2 8} = 2^3 \Leftrightarrow \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

と任意の数を表すことです。

■□■ $\log_2 3$ の大きさは？ ■□■

2 の累乗，3 の累乗を並べてみます。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	<u>256</u>	512	1024
3^n	3	9	27	81	<u>243</u>	729	2187	6561	19683	59049

上・下の段で近い値になるものを取り出してみます。

2^n の段の $2^3 = 8$ と，3^n の段の $3^2 = 9$ が近い値ですね。

$2^3 = 8 < 9 = 3^2$ の関係から

両辺の底 2 の対数を考えると

$\log_2 2^3 < \log_2 3^2 \Leftrightarrow 3 < 2\log_2 3 \quad \therefore \ \frac{3}{2} < \log_2 3$ …①

また 2^n の段の $2^8 = 256$ と，3^n の段の $3^5 = 243$ では。

$3^5 = 243 < 256 = 2^8$ の関係から

両辺の底 2 の対数を考えると

$\log_2 3^5 < \log_2 2^8 \Leftrightarrow 5\log_2 3 < 8 \quad \therefore \ \log_2 3 < \frac{8}{5}$ …②

①，②から $\frac{3}{2} < \log_2 3 < \frac{8}{5}$ となります。

およそ $1.5 < \log_2 3 < 1.6$ となります。

実際に電卓で調べてみると

$\log_2 3 = 1.5849625007211561814537389439478$

ですから確かに近い値ですね。

大学入試においても，単なる暗記で解ける問題から「数学する力＝考える力」を問う問題がみられるようになってきました。

広島大学の H23 年度入試での出題です。

(1) $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m，n は存在しないことを証明せよ。

(2) p，q を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3) $\log_2 3$ の小数第 1 位を求めよ。