第１０６回数実研 兼 第２３回数実研夏季セミナー

2次関数の最大・最小+ちょっとした *Tips*

＝ 状態分析 or 境界求値 ＝

市立札幌旭丘高等学校　菅原　満

■■■　は じ め に　■■■

西日本を襲った記録的な豪雨そして猛暑・・大自然の脅威を目の当たりにし，当たり前の日常に対する感謝の気持ちを改めて感じつつ，被災された地域の復興を強く祈るばかりです。

今年は１年次を担当し数学Ⅰ，数学 A を直列で週６コマ行っています。

今回は「場合分けを必要とする２次関数の最大・最小問題」について，気の付いた点をまとめてみます。

■■■　１．教科書説明編　■■■

現在，本校１年次で使用している教科書の解説をみてみます。

場合分けをするために，**区間の両端と放物線の軸の位置の状態分析**により場合分けをしています。

つまり $\boxed{\quad}$ 部の状態を表す不等式から定数 a の値を場合分けを導いています。参考書や問題集でもほぼ同様の解説があるため生徒にとっては，なじみやすい解説と思います。

しかし，２つ目の $a \leqq 2 \leqq a+2$ を定数 a の区間として $0 \leqq a \leqq 2$ と表すことに困難を感じる生徒もいます。

慣れてしまえば簡単な変形なのですが・・・

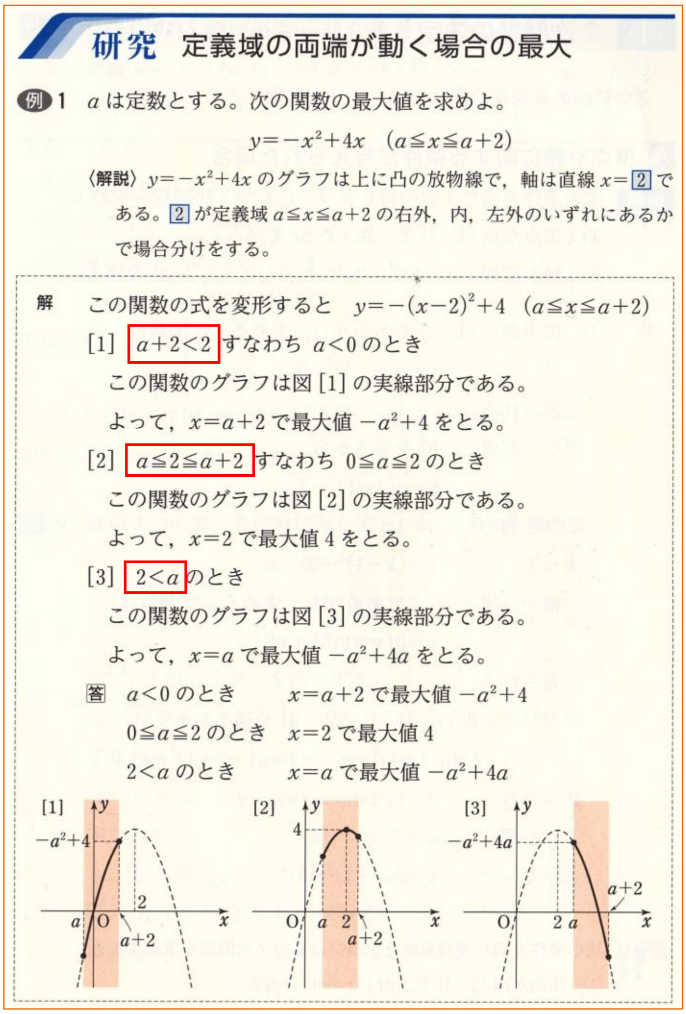
また，変数が増えることで生徒は混乱します。

「定数 a で場合分け」といいながら定数 a と独立変数 x の区別がつかなくなり，理解不能に陥る生徒・・・・

場合分けでは**状態分析と区間を分ける境界値を求めることに着目すること**で，問題はシンプルになります。

すでに中村文則先生が「二次関数の最大最小問題の小手技」で紹介されており，私もこの考え方を用いて「Grapes によるシミュレーション」や「紙とハサミを使った手法」を紹介しています。

次に，今年度行ったシェーマの工夫と授業における指導例を紹介します。



研究　定義域の両端が動く場合の最大

例 1　a は定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$y=-x^2+4x \quad (a \leqq x \leqq a+2)$$

〈解説〉$y=-x^2+4x$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=\boxed{2}$ である。$\boxed{2}$ が定義域 $a \leqq x \leqq a+2$ の右外，内，左外のいずれにあるかで場合分けをする。

解　この関数の式を変形すると　$y=-(x-2)^2+4 \quad (a \leqq x \leqq a+2)$

[1] $\boxed{a+2<2}$ すなわち $a<0$ のとき
この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。
よって，$x=a+2$ で最大値 $-a^2+4$ をとる。

[2] $\boxed{a \leqq 2 \leqq a+2}$ すなわち $0 \leqq a \leqq 2$ のとき
この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。
よって，$x=2$ で最大値 4 をとる。

[3] $\boxed{2<a}$ のとき
この関数のグラフは図 [3] の実線部分である。
よって，$x=a$ で最大値 $-a^2+4a$ をとる。

答　$a<0$ のとき　$x=a+2$ で最大値 $-a^2+4$
$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=2$ で最大値 4
$2<a$ のとき　$x=a$ で最大値 $-a^2+4a$

■■■　2．境界値を求めることで場合分け編　■■■

今年の夏季講習では次のような解説を行ってみました。

【解法手順】

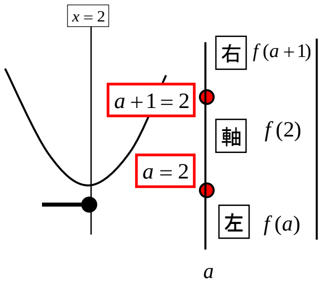
(1) 放物線の凹凸を考慮して，右図の軸と放物線，その右隣に縦線を２本引く

(2) 放物線の左から「最小値発見器」で**最小値をとる場所**を状態分析

　境界値を求め右図のように記入。

(3) **右の縦軸に a の大小から→をつける。**

(4) シェーマが完成したら**予め確保した場所に解答を清書**する



16　a は定数とする。関数　$y=x^2-4x+3$　$(a \leqq x \leqq a+1)$　について，次の問に答えよ。

(1) 最小値を求めよ。　　　　　　(2) 最大値を求めよ。

解）$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$　とおくと　軸：$x=2$

(1) (i)　$a<1$　のとき

　　$x=a+1$　で最小値　$f(a+1)=(a-1)^2-1$

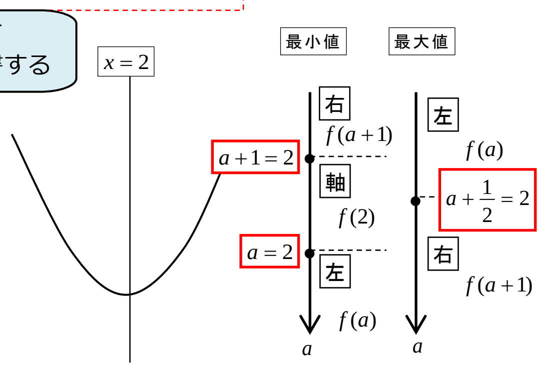
(ii)　$1 \leqq a < 2$　のとき

　　$x=2$　で最小値　$f(2)=-1$

(ii)　$2 \leqq a$　のとき

　　$x=a$　で最小値　$f(a)=(a-2)^2-1$

右図を見て
ここに清書する



(2) (i)　$a<\frac{3}{2}$　のとき

　　$x=a$　で最大値　$f(a)=(a-2)^2-1$

(ii)　$a=\frac{3}{2}$　のとき

　　$x=\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}$　で最大値　$f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{3}{4}$

(ii)　$\frac{3}{2}<a$　のとき

　　$x=a+1$　で最大値　$f(a+1)=(a-1)^2-1$

右図を見て
ここに清書する

（ちょっと一言）

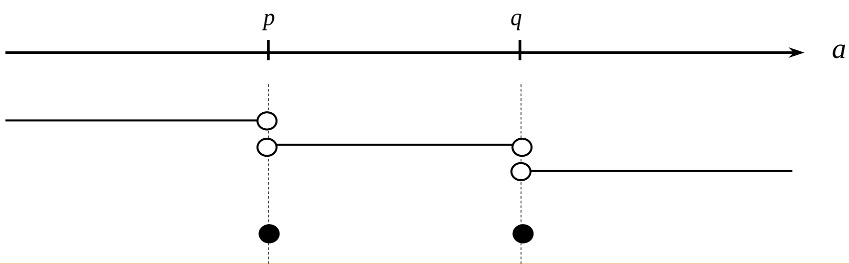
このタイプの問題では解答を清書するスペースを予め確保しておく気持ちで臨みます。

右のシェーマを見て，境界値が示されていますから，自然に場合分けが判明します。

「境界値はどちらに含めればいいか」など，迷いのある生徒には以下の説明をして「場合分けとは何」ということを説明するようにしています。

「定数 a を場合分けする」　※境界値が p，q（$p<q$）のとき，

すべてが含まれていれば p，q はどちらに含めてもよい



■■■　３．状態分析と境界求値は両輪　■■■

状態分析と**境界求値**は，一方だけが重要というわけではありません。「定数 a の場合分け」においては**状態分析というナビゲーションを使って，境界値を求め場分けをする**ことが大切です。

逆に次の問題では多くは境界求値重視で解説されていますが，カルノー図を用いた状態分析型の方がシンプルになる典型的な例と言えるでしょう。是非お試しあれ！

Q1. 集合 U とその部分集合 A，B に対して，$n(U)=100$ ，$n(A)=60$ ，$n(B)=48$ とする。

(1) $n(A\cap B)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $n(\overline{A}\cap B)$ の最大値と最小値を求めよ。

＝境界求値重視型（青チャートより）＝

(1) $n(A)+n(B)>n(U)$ であるから，$n(A\cap B)$ は，$A\cup B=U$ のとき最小になり

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(U)=60+48-100=8$$

$n(A)>n(B)$ であるから，$n(A\cap B)$ は，$A\supset B$ のとき最大になり　$n(A\cap B)=n(B)=48$

よって　最大値 48，最小値 8

(2) $n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=48-n(A\cap B)$

よって，$n(\overline{A}\cap B)$ は，

$n(A\cap B)$ が最大のとき最小，

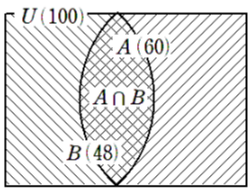
$n(A\cap B)$ が最小のとき最大

となる。(1) の結果から，

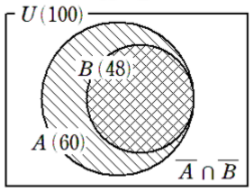
最小値は　$48-48=0$，

最大値は　$48-8=40$

$A\cup B=U$



$A\supset B$



＝状態分析重視型（カルノー図利用）＝

条件をカルノー図で表すと Fig.1 となる。

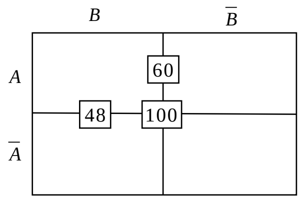
(1) $n(A\cap B)=x$ とすると Fig.2 となるから

要素の個数は 0 以上だから

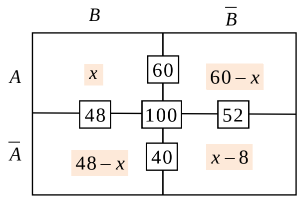
$$\begin{cases} x\geqq 0 \\ 48-x\geqq 0 \\ 60-x\geqq 0 \\ x-8\geqq 0 \end{cases}$$

$\therefore$　$8\leqq x\leqq 48$　したがって　$n(A\cap B)$ の最大値は 48，　最小値は 8

$(Fig.1)$



$(Fig.2)$



(2) (1)の結果とカルノー図より

$n(\overline{A}\cap B)=48-x$ であるから　最大値は 40，　最小値は 0

＝参考資料＝

・『二次関数の最大最小問題のちょっとした小手技』／札幌旭丘高校　中村文則

・『集合の要素の個数の小手技』／札幌旭丘高校　中村文則

・『２次関数の最大・最小 ～提示方法のちょっとした工夫～』／札幌旭丘高校　菅原　満

・『実験(実見)的数学のすすめ ～身近な素材を利用しよう～』／札幌旭丘高校　菅原　満

◆◆◆　（おまけ）Word2016 でのプリント作成における *Tips*　◆◆◆

Word の文書ファイルを保存するとき「以前の Word のバージョンとの互換性を保持する」というオプションが現れる時があります。これは一体どんなメリットがあるのでしょう。

私は主として Word 2016 を数学教材の作成に利用しています。数式は MathType6 を使用しており，今回のレポートもこの組み合わせ（Word＋MathType）で作成しています。

さらに，今回のレポートではスキャンした画像データ（JPG）を文書に貼り付けて使用しています。

今回の Tips は，

Word で作成した図形データと他のアプリで作成した描画データをグループ化したい！

というときのちょっとした Tips です。

何故か Word 2016 で作成した図形と MathType などで作成したデータ，あるいはスキャンした画像データは

まとめてグループ化しようとするとできません。まとめて選択することができないのです。

しかし，Word 2003 形式で行うとこれらをグループ化することは可能です。

そこで，当初は「図形作業用ファイル」を Word 2003 形式で作成して教材に必要な図形をそこで作成しグループ化をして，Word 2016 で作成している教材ファイルにコピー・ペーストしていました。

同僚の中村文則先生とは，ほぼ同じ環境で作業をしているので意見交換をしていたところ，次のような方法を教えていただきましたので皆さんに紹介させていただきます。

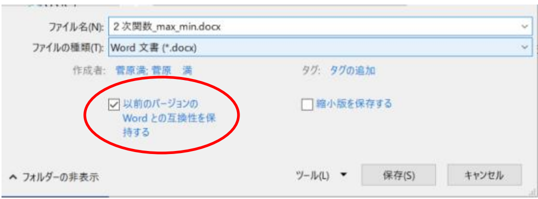
「以前の Word のバージョンとの互換性を保持する」の登場です。

＝ Word 2016 ですべての図形データをグループ化する方法 ＝

(1) 教材作成用ファイルを新規作成する。

(2) 「名前を付けて保存」で「Word 97-2003 文書（*.doc)」
で保存する。

(3) 再び「名前を付けて保存」を選択し
ファイルの種類を「Word 文書（*.docx)」として
「以前の Word のバージョンとの互換性を保持する」に
チェックを入れ［保存(S)］する。



こうして保存したファイルは Word 2016 形式のファイルでありながら，図形ファイルのグループ化が可能です。

ただし，デメリットもあります。

それは，Word 2016 形式が本来持っている機能の中に使えないものがでてくる。ということです。

特に，デザインに関する部分があるようです。お試しあれ。

最後に，次のような図形を皆さんはどうやって作りますか？

次回のお楽しみに！