第１０２回数実研 兼 第２２回数実研夏季セミナー

＝＝ 原理を大切に，慣れ親しんだ 10 進法をベースとして ＝＝

「整数の性質～N 進法の指導レシピ」

札幌旭丘高等学校　菅原　満

■■■ は じ め に ■■■

平成 21 年 3 月 9 日に告示された「高等学校学習指導要領」が教育現場で実施されて７年が経過した。

主な内容の変更は，第 70 回数実研で発表した私のレポート「展望 整数論」によると以下のようであった。

(ｱ) “目的意識をもった主体的活動”すなわち，“数学的活動”を一層充実させる
(ｲ) 知識の“体系的理解”
(ｳ) “数学的に考察し表現する能力”を高める
(ｴ) “数学のよさ”
(ｵ) “数学的論拠に基づいて判断する態度”を育てる

これらの改善された点は，以下のような具体的内容として目標達成に寄与していると考えられる.

(ｱ)に対して　⇒　①数学Ｉ，数学Ａにおける“課題学習”の設定

(ｲ)に対して　⇒　②数学としての学問体系の再構成

ex./ “条件付き確率“を数Ａへ，”期待値，二項定理“を数Ｂへ，図形の性質に空間新設など

(ｳ)(ｵ)に対して⇒　③数Ｉにおける“データの分析””の新設および①の課題学習新設

(ｴ)に対して　⇒　④新設「課題学習」での解説にある具体的教材例ばかりでなく，

それ以外の解説・数学編の記述に具現化するべき教材の具体的事例が多い.

ex./ ・40 名のクラスから 3 名のクラス代表を選ぶ選挙の当確票数 ←(数Ｉ・不等式)

・地図上に表された標高差のある 2 点間の距離←（数Ｉ・図形と計量）

・幅 20cm の金属板を折り曲げての雨どいを作るときの断面積の最大値←（数Ｉ・二次関数）

・箱ひげ図の説明←（数Ｉ・データの分析）

・100m 走と走り幅跳びの計測記録から散布図，相関係数を求める←（数Ｉ・データの分析）

. 対数の定義「$2^x=4$ を満たす実数 x は 2 であるが，$2^x=3$ を満たす実数 x を記号 log を使って $\log_2 3$ と表す.」←（数Ⅱ・対数関数）（※註）$2^{\log_2 3}=3$ を定義とするということ

・１の大きさを１辺とする正５角形の作図←（数Ａ・平面図形）

・正多面体が５種類しかないことのオイラーの定理を用いた証明←（数Ａ・空間図形）

・九去法，油分け算など塵劫記の紹介←（数Ａ・課題学習）

・「確率分布と統計的な推測」の解説

・「数学活用」解説における具体的教材例の列挙

などなど・・・・

本レポートは，７年を経過した「整数の性質」の指導法，特に「Ｎ進法」の指導法に関してのレポートである。題材はこの夏に勤務校で行った夏季講習の内容です。

■■■　１．暑い夏の講習～「整数の性質」　■■■

夏季講習は３年次の文系数学を担当した。

(a)「場合の数と確率」・「整数の性質」　　(b)「ベクトル」・「数列」

２コースを設定し希望する講座を受講する形式とした。その結果 (a)は２クラス，(b)は３クラスの生徒が集まり，ベクトル・数列に苦手意識をもった生徒が多いことが伺える。私は(a)のコースを担当した。

本校の夏季講習は 70 分×6 回で行っている。時間配分は

前半３回：「場合の数と確率」

後半３回：「整数の性質」～　①約数と倍数　②ユークリッドの互除法　③Ｎ進法

とした。後半３回分の「生徒配付テキスト」と「解答」は資料として載せておく。

「整数の性質」のテキストを作成するに当たっては

(1) 基礎・基本の重視　※特に「N 進法」では，10 進法での演算原理の確認を重視

(2) 受験に対応するため「忘れず」「早く」「正確」な筆算となるよう工夫する

(3) 入試問題で学習の効果を確認する

に留意した。

◆下ごしらえ◆

（その１）　数値の代入計算について　**～組立除法の活用～**

＝剰余の定理＝

$\mathrm{P}(x)$ を x の整式とする。整式 $\mathrm{P}(x)$ を１次式 $x-\alpha$ で割ったときの商を $\mathrm{Q}(x)$，余りを R とすると

$\mathrm{P}(x)=(x-\alpha)\cdot\mathrm{Q}(x)+\mathrm{R}$ …①　より　$\mathrm{R}=\mathrm{P}(\alpha)$

この余り R は通常の代入計算による $\mathrm{P}(\alpha)$ の計算に比べて，「組立除法」により格段に容易に算出できる。

これは，$\mathrm{P}(x)=\underbrace{x^4-4x^3-12x^2+5x+1}_{①}=\underbrace{x(x(x(x-4)-12)+5)}_{②}+1$ を例にとり，和に対して時間のかかる積の演算の回数を比較すること解明できる。

$x^4=x\cdot x\cdot x\cdot x$ として３回と数えると，①は　3+3+2+1=９回，②は３回となる。ここに，代入計算における組立除法の計算速度の優位性がある。

例）$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1}{16}-4\cdot\frac{1}{8}-12\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{2}+1=\frac{1-8-48+40+16}{16}=\frac{1}{16}$

組立除法では

$$\begin{array}{c|ccccc} \frac{1}{2} & 1 & -4 & -12 & 5 & 1 \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{55}{8} & -\frac{15}{16} \\ \hline & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{55}{4} & -\frac{15}{8} & \boxed{\frac{1}{16}} \end{array}$$

様々な場面で整式への代入計算があるが，生徒が実際に使うようになるためには数回の説明だけでは不可能であるインパクトをもった説明と実際の**授業の中で使って見せる**ことがキーポイントとなる。

「私は**組立除法普及協会の会長**です」ということで常日頃説明しているせいか，現在担当している生徒たちは**「代入計算 ⇔ 組立除法」**の印象がついてきているようである。

（その２）

N 進法を理解するために，N 進法の四則演算を練習してみよう。

N 進法での原理を理解するには四則演算の練習が大切である。割り算まで会得すると応用範囲は広がる。

(4) 次を計算し，その結果を同じ記数法で表せ。

① $1101_{(2)} \times 101_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times)\quad 101 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ \hline 1000001_{(2)} \end{array}$$

2進法では 0，1の2つの数字を使う。
2の塊で桁上がりをする。

② $3420_{(5)} - 1344_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 3420 \\ -)1344 \\ \hline 2021_{(5)} \end{array}$$

引き算で上の位から借りてくることがある。
結局 $12_{(5)} - 4_{(5)} = 3_{(5)}$ は $(5+2)-4$ のイメージだ

③ $313_{(5)} \times 203_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 313 \\ \times)\quad 203 \\ \hline 1444 \\ 1131 \\ \hline 120044_{(5)} \end{array}$$

④ $1341_{(5)} \div 32_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 23_{(5)} \\ 32\overline{)1341} \\ 114 \\ \hline 201 \\ 201 \\ \hline 0 \end{array}$$

N進法の筆算の最難関。
5進法では $123_{(5)} \times 5_{(5)} = 1230_{(5)}$ と桁上がりすることに注意。

◆手順（その１）～まずは１０進数で考える◆

(1) =**整数部分**= の各位の数字を求める

$$12345 = \mathbf{1}\cdot 10^4 + \mathbf{2}\cdot 10^3 + \mathbf{3}\cdot 10^2 + \mathbf{4}\cdot 10^1 + \mathbf{5} = 10\cdot(10\cdot(10\cdot(10\cdot\mathbf{1}+\mathbf{2})+\mathbf{3})+\mathbf{4})+\mathbf{5}$$

10 で割り商と余りを求める。これを続け**余り**を桁の小さい順に並べる

$$\begin{array}{l} 10\,\underline{)1234} \\ 10\,\underline{)\ \ 123}\cdots 4 \\ 10\,\underline{)\quad 12}\cdots 3 \\ 10\,\underline{)\quad\ \ 1}\cdots 2 \\ 10\qquad\ \ 0\ \cdots 1 \end{array}$$

(2) =**小数部分**=の各位の数字を求める

$$0.4567 = (\mathbf{4}+0.567)\times\frac{1}{10} = \left(\mathbf{4}+\left(\mathbf{5}+\left(\mathbf{6}+\mathbf{7}\times\frac{1}{10}\right)\right)\times\frac{1}{10}\right)\times\frac{1}{10}$$

10 を掛けて整数部と小数部に分ける。さらに，小数部に 10 を掛けて
整数部と小数部に分ける。これを続ける。
これを続け**整数部**を小数第１位以下の順に並べる

$$\begin{array}{l|r} 0 & 0.4567 \\ \times & 10 \\ \hline 4 & +0.567 \\ \times & 10 \\ \hline 5 & +0.67 \\ \times & 10 \\ \hline 6 & +0.7 \\ \times & 10 \\ \hline 7 & .0 \end{array}$$

◆手順（その２）～ N進法 ⇒ １０進法◆

＝**整数部分**＝

$12012_{(3)}$ を 10 進法で表してみよう。

（Step_1） $12012_{(3)} = \mathbf{1}\times 3^4 + \mathbf{2}\times 3^3 + \mathbf{0}\times 3^2 + \mathbf{1}\times 3^1 + \mathbf{2} = 81+54+3+2 = \mathbf{140}$

（Step_2 ※簡便法） $P(x) = \mathbf{1}\times x^4 + \mathbf{2}\times x^3 + \mathbf{0}\times x^2 + \mathbf{1}\times x^1 + \mathbf{2}$ とすると，
求めるものは 代入計算 P(3) ⇒ **組立除法**

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ & & 3 & 15 & 45 & 138 \\ \hline & 1 & 5 & 15 & 46 & \boxed{140} \end{array}$$

=小数部分=

$0.1021_{(5)}$ を 10 進法で表してみよう。

（Step_1） $0.1021_{(5)} = 1\times\frac{1}{5} + 0\times\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\times\left(\frac{1}{5}\right)^3 + 1\times\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{\mathbf{1}\times 5^3 + \mathbf{0}\times 5^2 + \mathbf{2}\times 5^1 + \mathbf{1}}{5^4} = \frac{136}{625} = 0.2176$ …①

（Step_2 ※簡便法）①式の分子は，得意の代入法だから組立除法で分子を計算して 5^4 で割る。

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ & & 5 & 25 & 135 \\ \hline & 1 & 5 & 27 & \boxed{\mathbf{136}} \end{array} \Rightarrow \frac{136}{5^4} = \frac{136}{625} = 0.2176$$

（ちょっと一言）小数点以下の桁数が少ないときは 10 進法で行っていた有理化の方法も有効である。

$0.123 = \frac{123}{1000}$ の方法を N 進法で行う

$0.1021_{(5)} = \frac{1021_{(5)}}{10000_{(5)}} = \frac{136}{625} = 0.2176$ ※分子は組立除法で筆算

原理は上記と全く同じである。生徒はこちらの方が慣れているかもしれない。

2016 年のセンター試験の解答をこの方法で解いてみると・・

(2) 2 進法で $11011_{(2)}$ と表される数を 4 進法で表すと $\boxed{コサシ}_{(4)}$ である。

次の⓪～⑤の 6 進法の小数のうち，10 進数で表すと有限小数として表せるのは，$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ である。

ただし，解答の順序は問わない。

⓪ $0.3_{(6)}$ ① $0.4_{(6)}$ ② $0.33_{(6)}$ ③ $0.43_{(6)}$ ④ $0.033_{(6)}$ ⑤ $0.043_{(6)}$ （2016 ｾﾝﾀｰ試験）

解）(2) $11011_{(2)}$ を 10 進法で表すと 27 となる。

これを 4 進法で表すと $123_{(4)}$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & & 2 & 6 & 12 & 26 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 13 & \boxed{27} \end{array}$$

$$\begin{array}{r l} 4 \,)\, 27 & \\ 4 \,)\, 6 & \cdots 3 \\ 4 \,)\, 1 & \cdots 2 \\ 0 & \cdots 1 \end{array}$$

⓪ $0.3_{(6)} = \frac{6_{(6)}}{10_{(6)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5_{(10)}$ ◎

① $0.4_{(6)} = \frac{4_{(6)}}{10_{(6)}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ×

② $0.33_{(6)} = \frac{33_{(6)}}{100_{(6)}} = \frac{3\cdot6+3}{6^2} = \frac{21}{6^2} = \frac{7}{2^2\cdot3}$ ×

③ $0.43_{(6)} = \frac{43_{(6)}}{100_{(6)}} = \frac{4\cdot6+3}{6^2} = \frac{27}{6^2} = \frac{3}{2^2}$ ◎

④ $0.033_{(6)} = \frac{33_{(6)}}{1000_{(6)}} = \frac{3\cdot6+3}{6^3} = \frac{7}{2^3\cdot3^2}$ ×

⑤ $0.043_{(6)} = \frac{43_{(6)}}{1000_{(6)}} = \frac{4\cdot6+3}{6^3} = \frac{1}{2^3}$ ◎

従って有限小数となるのは ⓪，③，⑤

＝OnePoint＝

「$\frac{m}{n}$ が 10 進法で有限小数となる」

⇔ 分母 $n = 2^p\cdot5^q$ となる

《Question》

「$\frac{m}{n}$ が 6 進法で有限小数となる」条件は何？

Warm Up　基本事項をマスターせよ

■■■ 入試必携ツール ■■■

1．最大公約数（G.C.M）・最小公倍数（L.C.M）

m，n の最小公倍数を L，最大公約数を G とすると

① $m = m'G$ ， $n = n'G$ （m' , n' は互いに素な整数：最大公約数が１ということ）

② $L = m'n'G$ ， $mn = LG$

2．ユークリッドの互除法

２つの整数 a，b の最大公約数を記号 $(a\,,b)$ で表す。

a を b で割った余りを r とすると ⇔ $a = b \cdot q + r$ （$0 \leqq r < b$）

$(a\,,b) = (r\,,b)$

例）$(1248,546) = (546 \cdot 2 + 156,546) = (156,546) = (156,156 \cdot 3 + 78) = (156,78) = (78 \cdot 2,78) = \boxed{\mathbf{78}}$

右のような運算も覚えておこう！

$$\begin{array}{r|rr|l} & 1248 & 546 & \\ 2 & 1092 & 468 & 3 \\ \hline & 156 & \boxed{78} & \\ 2 & 156 & & \\ \hline & \mathbf{0} & & \end{array}$$

3．不定方程式

(1) １次型（$ax + by = c$ 型） ※ a，b が互いに素とする

(i) $ax + by = c$ …① を満たす特殊解 $(x_0\,,y_0)$ を求める。$ax_0 + by_0 = c$ …②

(ii) ①−②より $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ ⇔ $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$

$x - x_0 = kb$ ∴ $x = bk + x_0$ ， $y = -ak + y_0$ （k は任意の整数）

(2) ２次型（$x^2 - y^2 = k$ 型，$xy + ax + by + c = 0$ 型）

(i) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = k$ として右辺 k の素因数分解を考える

(ii) $xy + ax + by + c = 0$ ⇔ $(x + b)(y + a) = ab - c$ というように素因数分解を考える。

4．剰余系・合同式の利用

(1) 「a，b を c で割った余りが同じ」⇔ 「$a - b$ が c で割り切れる」

(2) 「$a - b$ が k で割り切れる」⇔ 「a，b は **k を法として合同**」⇔ $a \equiv b \pmod{k}$

例）$15 \equiv 1 \pmod{7}$ ， $14 \equiv 14 + 6 \pmod{6}$

性質）$a \equiv b \pmod{k}$ かつ $c \equiv d \pmod{k}$ のとき

① $a \pm c \equiv b \pm c \pmod{k}$

② $ac \equiv bd \pmod{k}$

③ $ma \equiv mb \pmod{k}$ ※m は整数

④ $a^n \equiv b^n \pmod{k}$ ※n は自然数

⑤ m，n が互いに素のとき $an \equiv bn \pmod{m}$ ∴ $a \equiv b \pmod{m}$

計算例）「$a \equiv 2 \pmod{5}$ のとき，$a^3 + 2a + 1$ を 5 で割ったときの余りは？ 」

$a^3 + 2a + 1 \equiv 2^3 + 2 \cdot 2 + 1 = 13 \equiv 3 \pmod{5}$ より 余りは３

＝ 約数と倍数 ＝

■ **Check_1** ■

(1) 次の３つの数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

① 42，72，120

解）$42=2\cdot3\cdot7$，$72=2^3\cdot3^2$，$120=2^3\cdot3\cdot5$

最大公約数　$2\cdot3=6$

最小公倍数　$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7=2520$

② 216，360，900

解）$216=2^3\cdot3^3$，$360=2^3\cdot3^2\cdot5$，$900=2^2\cdot3^2\cdot5^2$

最大公約数　$2^2\cdot3^2=36$

最小公倍数　$2^3\cdot3^3\cdot5^2=5400$

(2) 1998 の約数の個数を求めよ。また，約数の和を求めよ。ただし，正の整数 a の約数には１と a を含める。

解）$1998=2\cdot3^3\cdot37$　　約数は　$2^p\cdot3^q\cdot37^r$　（p，q，r は整数：$0\leqq p\leqq1$，$0\leqq q\leqq3$，$0\leqq r\leqq1$）

と表せるから　約数の個数は　$2\times4\times2=16$ 個

約数の和は　$(1+2)(1+3+3^2+3^3)(1+37)=4560$

(3) $\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ。

解）$\sqrt{\dfrac{756}{n}}=\sqrt{\dfrac{2^2\cdot3^3\cdot7}{n}}$　だから根号内が平方数となればよい。$n=2^p\cdot3^q\cdot7^r$　とすると

$\sqrt{\dfrac{756}{n}}=\sqrt{\dfrac{2^2\cdot3^3\cdot7}{2^p\cdot3^q\cdot7^r}}=\sqrt{2^{2-p}\cdot3^{3-q}\cdot7^{1-r}}$　　$0\leqq p\leqq2$，$0\leqq q\leqq3$，$0\leqq r\leqq1$の整数だから

$$\begin{cases}2-p=0,\ 2\\3-q=0,\ 2\\1-r=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=2,\ 0\\q=3,\ 1\\r=1\end{cases}$$　より　４通りあり

$n=2^2\cdot3^3\cdot7^1$，$2^2\cdot3^1\cdot7^1$，$2^0\cdot3^3\cdot7^1$，$2^0\cdot3^1\cdot7^1$　$\Leftrightarrow$　$n=756$，84，189，21

(4) 20 の倍数で正の約数の個数が 15 である自然数 n をすべて求めよ。

解）約数の個数が　$15=1\times15=3\times5$　であるから，p，q（$p<q$）を素数として

$n=p^{14}$　または　$n=p^2\cdot q^4$　の形である。n は$20=2^2\cdot5$の倍数であるから

$n=2^2\cdot5^4=2500$　または　$n=2^4\cdot5^2=400$

(5) 次の条件を満たす２つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

① 和が 168，最大公約数が 14

解）a'，b'（$a'<b'$）を互いに素な整数として２数は

$14a'$，$14b'$　とおける。条件より

$14a'+14b'=168$　$\Leftrightarrow$　$a'+b'=12$

よって

$(a',b')=(1,11)$，$(5,7)$

従って

$(a,b)=(14,154)$，$(70,98)$

② 積が 288，最大公約数 6

解）a'，b'（$a'<b'$）を互いに素な整数として２数は

$6a'$，$6b'$　とおける。条件より

$6a'\times6b'=36a'b'=288$　$\Leftrightarrow$　$a'b'=8$

よって

$(a',b')=(1,8)$　　従って　$(a,b)=(6,48)$

(6) n を自然数とする。n と 182 の最大公約数が 26，最小公倍数が 1092 であるような n を求めよ。

解）$182n=26\times1092$　より　$n=156$

別解）$182=26\times7$　より　$n=26a$　（a と 7 は互いに素）とおける。また，最小公倍数が 1092 だから

$1092=7\times a\times26$　より　$a=6$　従って　$n=26\times6=156$

(7) a，b は整数とする。a を 7 で割ると 2 余り，b を 7 で割ると 5 余る。このとき，次の数を 7 で割ったときの余りを求めよ。

① $3a+b$

解）k，l を整数として

$a=7k+2$ ，$b=7l+5$

とおく。

$3a+b=3(7k+2)+7l+5$

$=7(3k+k+1)+4$

よって，余り 4

② ab

解）$ab=(7k+2)(7l+5)$

$=7(7kl+5k+2l+1)+3$

余りは　3

別解）$a\equiv 2 \pmod{7}$

$b\equiv 5 \pmod{7}$

$ab\equiv 2\cdot 5\equiv 3 \pmod{7}$

③ a^2+b^2

解）$a^2\equiv 2^2=4 \pmod{7}$

$b^2\equiv 5^2=4 \pmod{7}$

$a^2+b^2\equiv 4+4\equiv 1 \pmod{7}$

余り　1

(8) n は自然数とする。$n+1$ は 6 の倍数であり，$n+4$ は 9 の倍数であるとき，$n+13$ は 18 の倍数であることを証明せよ。

解）条件より　k，l を整数として　$n+1=6k$，$n+4=9l$ と表せる。

$n+13=(n+1)+12=6k+12=6(k+2)$ だから　$n+13$ は 6 の倍数

同様に　，　$n+4=(n+4)+9=9l+9=9(l+1)$ だから　$n+13$ は 9 の倍数

よって，$6(k+2)=9(l+1)$ すなわち　$2(k+2)=3(l+1)$　2 と 3 は互いに素だから　$k+2=3m$（m は整数）

従って，$n+13=6(k+2)=6\cdot 3m=18m$ となるから 18 の倍数である。

(9) n は整数とする。n^3+5n は 6 の倍数であることを証明せよ。

解）$n^3+5n=n^3-n+6n=n(n^2-1)+6n=(n-1)n(n+1)+6n$

ここで，連続する 3 つの整数の積 $(n-1)n(n+1)$ は 6 の倍数であり，$6n$ も 6 の倍数だから

n^3+5n は 6 の倍数となる。

別解）『剰余系の活用』～（6 の倍数である証明）⇒6 を法とする剰余系

n	0	1	2	3	4	5
n^3	0	1	$8\equiv 2$	$27\equiv 3$	$64\equiv 4$	$125\equiv 5$
$5n$	0	5	$10\equiv 4$	$15\equiv 3$	$20\equiv 2$	$25\equiv 1$
n^3+5n	0	$6\equiv 0$	$6\equiv 0$	$6\equiv 0$	$6\equiv 0$	$6\equiv 0$

＝OnePoint＝

①連続する２数の積 ⇔ $1\cdot 2=2$ の倍数

Ex/ $(n-2)(n-1)$，$(n-1)n$ ，$n(n+1)$ など　即ち n^2-3n+2 ，n^2-n ，n^2+n

②連続する３数の積 ⇔ $1\cdot 2\cdot 3=6$ の倍数

Ex/ $(n-2)(n-1)n$ ，$(n-1)n(n+1)$ ，$n(n+1)(n+2)$ など　即ち n^3-3n^2+2n，n^3-n，n^3+3n^2+2n

＝ ユークリッドの互除法・不定方程式 ＝

■ Check_2 ■

(1) 次の２整数の最大公約数を，ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

① 527，713

解）$713=527\cdot1+186 \Leftrightarrow 527=186\cdot2+155$

$\Leftrightarrow 186=155\cdot1+31 \Leftrightarrow 155=\boxed{31}\cdot5+0$

G.C.M は 31

② 1189，1517

2	1	1	1	3	1
$\boxed{41}$) 82	) 123	) 205	) 328	) 1189	) 1517
82	82	123	205	984	1189
0	41	82	123	205	328

G.C.M は 41

(2) $3n+16$ と $4n+18$ の最大公約数が 5 となるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

解）$4n+18=(3n+16)\cdot1+n+2 \Leftrightarrow 3n+16=(n+2)\cdot3+10$ より

$3n+16$ と $4n+18$ の G.C.M は，$n+2$ と 10 の G.C.M である。$10=5\times2$ であるから

$n+2$ と 10 の G.C.M が 5 となるのは，$n+2$ が奇数の 5 の倍数となるときである。

よって，$3\leqq n+2\leqq 52$ では　$n+2=5, 15, 25, 35, 45$　従って　$n=3, 13, 23, 33, 43$

(3) 次の方程式を満たす整数解を求めよ。

① $11x+8y=1$ …①

	11	8	
1	8	6	2
	3	2	
1	2		
	$\boxed{1}$		

	a	b	
1	b	$2a-2b$	2
	$a-b$	$-2a+3b$	
1	$-2a+3b$		
	$\boxed{3a-4b}$		

解）$x=3, y=-4$ は

解の一つである。

よって，

$11\cdot3+8\cdot(-4)=1$ …②

①−②より

$11(x-3)+8(y+4)=0$

$\Leftrightarrow 11(x-3)=-8(y+4)$

11 と 8 は互いに素だから $x-3=8k$（$k\in\mathbb{Z}$）

$11\cdot8k=-8(y+4) \Leftrightarrow y+4=-11k$

以上より

$x=8k+3$，$y=-11k-4$ $(k\in\mathbb{Z})$

② $56x+23\cdot(-y)=2$

	56	23	
2	46	20	2
	10	3	
3	9		
	$\boxed{1}$		

	a	b	
2	$2b$	$2a-4b$	2
	$a-2b$	$-2a+5b$	
3	$-6a+15b$		
	$\boxed{7a-17b}$		

解）$x=7, -y=-17$ は

解の一つである。

よって，$56\cdot7+23\cdot(-17)=1$

$56\cdot14+23\cdot(-34)=2$ …②

①−②より

$56(x-14)+23(-y+34)=0$

$\Leftrightarrow 56(x-14)=-23(-y+34)$

56 と 23 は互いに素だから $x-14=23k$（$k\in\mathbb{Z}$）

$56\cdot23k=-23(-y+34) \Leftrightarrow -y+34=-56k$

以上より

$x=23k+14$，$y=56k+34$ $(k\in\mathbb{Z})$

別解）＝合同式で不定方程式を解いてみよう＝

8 を法とすると　$11x+8y=1 \Leftrightarrow 11x\equiv1\ (\mathrm{mod}.8) \Leftrightarrow 8x+3x\equiv1\ (\mathrm{mod}.8) \Leftrightarrow 3x\equiv1\ (\mathrm{mod}.8)$

$\Leftrightarrow 3x\equiv1+8=9\ (\mathrm{mod}.8)$　3 と 8 は互いに素だから　$x\equiv3\ (\mathrm{mod}.8)$　$\therefore$　$x=8k+3$

$11(8k+3)+8y=1 \Leftrightarrow 8y=11\cdot8k+32$　$\therefore$　$y=11k+4$　$(k\in\mathbb{Z})$

(4) 次の等式を満たす整数 x，y の組を一つ求めよ。

① $42x+29y=2$

解）$42\cdot9+29\cdot(-13)=1$

$\Leftrightarrow 42\cdot18+29\cdot(-26)=2$

従って　$x=18$，$y=-26$

	42	29	
1	29	26	2
	13	3	
4	12		
	$\boxed{1}$		

	a	b	
1	b	$2a-2b$	2
	$a-b$	$-2a+3b$	
4	$-8a+12b$		
	$\boxed{9a-13b}$		

② $25x-61y=12$

解）$25\cdot5+61\cdot(-2)=3 \Leftrightarrow 25\cdot20+61\cdot(-8)=12$

$\Leftrightarrow 25\cdot20-61\cdot8=12$　よって　$x=20$，$y=8$

	25	61	
2	22	50	2
	$\boxed{3}$	11	

	a	b	
2	$-4a+2b$	$2a$	2
	$\boxed{5a-2b}$	$-2a+b$	

(5) 7 で割ると 2 余り，9 で割ると 7 余る自然数 n を，63 で割ったときの余りを求めよ。

解）x，y を整数として　$n=7x+2$，$n=9y+7$　と表せる。

$7x+2=9y+7 \Leftrightarrow 7x-9y=5$　…①

$x=2$，$y=1$　は解の一つである。よって，$7\cdot 2-9\cdot 1=5$　…②

①－②より　$7(x-2)-9(y-1)=0 \Leftrightarrow 7(x-2)=9(y-1)$　7 と 9 は互いに素だから

$k\in\mathbb{Z}$　として　$x-2=9k \Leftrightarrow x=9k+2$　であるから

$n=7(9k+2)+2=63k+16$　，従って，n を 63 で割ったときの余りは　16

別解）合同式で不定方程式を解く　※①までは同じ

7 を法とすると　$7x-9y=5 \Leftrightarrow 7x-9y\equiv 5 \pmod{7} \Leftrightarrow -9y\equiv 5 \pmod{7}$

$\Leftrightarrow 17y-9y\equiv 5 \pmod{7} \Leftrightarrow 5y\equiv 5 \pmod{7}$，$(5,7)=1$ より $\Leftrightarrow y\equiv 1 \pmod{7}$

従って，k を整数として $y=7k+1$　だから　$n=9(7k+1)+7=63k+16$　より

n は 63 で割ると 16 余る

(6)　$xy-2x+4y+1=0$　を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

解）$x(y-2)+\underline{4(y-2)+8}+1=0 \Leftrightarrow (x+4)(y-2)=-9$

$(x+4,\ y-2)=(-1,9),(1,-9),(-9,1),(9,-1),(-3,3),(3,-3)$

$(x,\ y)=(-5,11),(-3,-7),(-13,3),(5,1),(-7,5),(-1,-1)$

(7)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=1$　を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

解）両辺に xy をかけると，$y+3x=xy \Leftrightarrow x(y-3)\underline{-(y-3)-3=0} \Leftrightarrow (x-1)(y-3)=3$

$1\leqq x$，$1\leqq y$　より　$0\leqq x-1$，$-2\leqq y-3$　となるから

$(x-1,\ y-3)=(1,3),(3,1)$　$\therefore$　$(x,y)=(2,6),(4,4)$

(8)　$x^2-y^2=21$　を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

解）$(x-y)(x+y)=21$　x，y は自然数だから　$x+y$，$x-y$ は整数で　$x+y\geqq 2$　かつ　$x-y<x+y$

従って　$(x-y,x+y)=(1,21)$，$(3,7)$　$\therefore$　$(x,y)=(11,10),(5,2)$

(9) n は自然数とする。$\sqrt{n^2+40}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

解）k を自然数とすると　$\sqrt{n^2+40}=k \Leftrightarrow k^2-n^2=40 \Leftrightarrow (k-n)(k+n)=40$

k，n は自然数だから　$k-n$，$k+n$ は整数で　$k+n\geqq 2$　かつ　$k-n<k+n$

従って　$(k-n,k+n)=(1,40)$，$(2,20)$，$(4,10)$，$(5,8)$

ゆえに　$(k,n)=\left(\dfrac{41}{2},\dfrac{39}{2}\right),(11,9),(7,3),\left(\dfrac{13}{2},\dfrac{3}{2}\right)$　，k，n は整数だから　$n=9,3$

＝ N 進法 ＝

■ **Check_3** ■

(1) 次の数を 10 進法で表せ。

① $110101_{(2)}$

解）$1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^2+1=53$

※ $P(x)=x^5+x^4+x^2+1$ で $P(2)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 6 & 12 & 26 & 52 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 13 & 26 & \boxed{53} \end{array}$$

② $22102_{(3)}$

解）$P(x)=2x^4+2x^3+x^2+2$ で $P(3)$

$P(3)=2\cdot 3^4+2\cdot 3^3+3^2+2=227$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ & & 6 & 24 & 75 & 225 \\ \hline & 2 & 8 & 25 & 75 & \boxed{227} \end{array}$$

③ $0.0101_{(2)}$

解）$P(x)=x^2+x^4$ で

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(1\times 2^2+1\right)=\frac{5}{16}=0.3125$

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{5} \end{array} \Rightarrow \frac{\boxed{5}}{\mathbf{2^4}}=\frac{5}{16}$$

※ $0.0101_{(2)}=\frac{101_{(2)}}{10000_{(2)}}=\frac{5_{(10)}}{16_{(10)}}=0.3125$

(2) 次の 10 進数を[　]内の記数法で表せ。

① 27　[2 進法]

解）$11011_{(2)}$

$$\begin{array}{l} 2\,\underline{)27} \\ 2\,\underline{)13}\cdots 1 \\ 2\,\underline{)\ 6}\cdots 1 \\ 2\,\underline{)\ 3}\cdots 0 \\ 2\quad 1\cdots 1 \\ \quad\ \ 0\cdots 1 \end{array}$$

② 0.6875　[2 進法]

解）$0.1011_{(2)}$

$$\begin{array}{r|r} 0 & 0.6875 \\ \times & 2 \\ \hline 1 & +0.375 \\ \times & 2 \\ \hline 0 & +0.75 \\ \times & 2 \\ \hline 1 & +0.5 \\ \times & 2 \\ \hline 1 & .0 \end{array}$$

③ 0.3　[5 進法]

解）$0.1\dot{2}_{(5)}$

$$\begin{array}{r|r} 0 & 0.3 \\ \times & 5 \\ \hline 1 & +0.5 \\ \times & 5 \\ \hline 2 & \boxed{+0.5} \end{array}$$

(3) 次の数を［　］内の記数法で表せ。

① $1101011_{(2)}$　[3 進法]

解）$1101011_{(2)}\xrightarrow{(10)}107_{(10)}\xrightarrow{(3)}10222_{(3)}$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & & 2 & 6 & 12 & 26 & 52 & 106 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 13 & 26 & 53 & \boxed{107} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3\,\underline{)107} \\ 3\,\underline{)\ 35}\cdots 2 \\ 3\,\underline{)\ 11}\cdots 2 \\ 3\,\underline{)\ \ 3}\cdots 2 \\ 3\,\underline{)\ \ 1}\cdots 0 \\ \quad\ \ \ 0\cdots 1 \end{array}$$

② $212121_{(3)}$　[9 進法]

解）$212121_{(3)}\xrightarrow{(10)}637_{(10)}\xrightarrow{(9)}777_{(9)}$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & & 6 & 21 & 69 & 210 & 636 \\ \hline & 2 & 7 & 23 & 70 & 212 & \boxed{637} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9\,\underline{)637} \\ 9\,\underline{)\ 70}\cdots 7 \\ 9\,\underline{)\ \ 7}\cdots 7 \\ \quad\ \ \ 0\cdots 7 \end{array}$$

(4) 次を計算し，その結果を同じ記数法で表せ。

① $1101_{(2)}\times 101_{(2)}$

解）$1000001_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times)\ \ 101 \\ \hline 1101 \\ 1101\ \ \\ \hline 1000001_{(2)} \end{array}$$

② $3420_{(5)}-1344_{(5)}$

解）$2021_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 3420 \\ -)1344 \\ \hline 2021_{(5)} \end{array}$$

③ $313_{(5)}\times 203_{(5)}$

解）$120044_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 313 \\ \times)\ \ 203 \\ \hline 1444 \\ 1131\ \ \\ \hline 120044_{(5)} \end{array}$$

④ $1341_{(5)}\div 32_{(5)}$

解）$23_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 23_{(5)} \\ 32\overline{)1341} \\ 114\ \ \\ \hline 201 \\ 201 \\ \hline 0 \end{array}$$

(5)　次の有理数を２進法の小数で表せ。

① $\dfrac{5}{8}$

解）$0.101_{(2)}$

$$
\begin{array}{rl}
0 & \frac{5}{8} \\
\times & 2 \\ \hline
1 & +\frac{1}{4} \\
\times & 2 \\ \hline
0 & +\frac{1}{2} \\
\times & 2 \\ \hline
1 &
\end{array}
$$

② $\dfrac{5}{6}$

解）$0.1\dot{1}\dot{0}_{(2)}$

$$
\begin{array}{rl}
0 & \frac{5}{6} \\
\times & 2 \\ \hline
1 & \frac{2}{3} \\
\times & 2 \\ \hline
1 & \frac{1}{3} \\
\times & 2 \\ \hline
0 & \frac{2}{3} \\
\times & 2 \\ \hline
1 & \frac{1}{3}
\end{array}
$$

(6)５進法で表すと４桁になる正の整数の個数を求めよ。

解）求める正の整数を N とすると　$5^3 \leqq N < 5^4$　を満たす。

　よって，$(5^4-1)-(5^3-1)=4\cdot 5^3=500$ 個

(7) 10 進法の 44 を n 進法で表すと $134_{(n)}$ になる 2 以上の自然数を求めよ。

解）10 進法で考えると

$134_{(n)}=1\cdot n^2+3\cdot n+4=44 \iff n^2+3n-40=(n+8)(n-5)=0$

n は自然数だから　$n=5$

(8) 8 進法で $abb_{(8)}$ と表される自然数を９進法で表したところ $baa_{(9)}$ になった。その自然数を 10 進法で表せ。

解）$abb_{(8)}=a\times 8^2+b\times 8+b=64a+9b$ …①　，$baa_{(9)}=b\times 9^2+a\times 9+a=81b+10a$ …②

ここで，$1\leqq a\leqq 7$ ，$1\leqq b\leqq 7$ …③

①，②より

$64a+9b=81b+10a \iff 54a=72b \iff 3a=4b$

3 と 4 は互いに素だから　③より　$a=4$，$b=3$

このとき，この自然数は　$64\times 4+9\times 3=283$

(9) 10！を次の記数法で表すと，末尾に連続 n 個の 0 が続いている。n の値を求めよ。

① ２進法

解）２進法で末尾に並ぶ 0 の個数は，10！に含まれる素因数 2 の個数に一致する。よって，1 から 10 までの自然数のうち

2 の倍数は　5 個

2^2 の倍数は　2 個

2^3 の倍数は 1 個

従って，素因数 2 の個数は　$5+2+1=8$ となり

末尾に並ぶ 0 の個数は 8 個。

② ３進法

解）３進法で末尾に並ぶ 0 の個数は，10！に含まれる素因数 3 の個数に一致する。よって，1 から 10 までの自然数のうち

3 の倍数は　3 個

3^2 の倍数は　1 個

従って，素因数 3 の個数は　$3+1=4$ となり

末尾に並ぶ 0 の個数は 4 個。

＝ 入試問題で整数問題を極めよ！ ＝

Step Up

（2016 ｾﾝﾀｰ本試験　＝選択問題＝）

(1) 不定方程式 $92x+197y=1$ を満たす整数 x，y の組の中で x の絶対値が最小のものは，

$x=$ アイ ，$y=$ ウエ 　である。

不定方程式 $92x+197y=10$ を満たす整数の組の中で，x の絶対値が最小のものは，

$x=$ オカキ ，$y=$ クケ 　である。

(2) ２進法で $11011_{(2)}$ と表される数を４進法で表すと $\boxed{コサシ}_{(4)}$ である。

次の⓪～⑤の６進法の小数のうち，10 進数で表すと有限小数として表せるのは，ス，セ，ソ である。ただし，解答の順序は問わない。

⓪ $0.3_{(6)}$　① $0.4_{(6)}$　② $0.33_{(6)}$　③ $0.43_{(6)}$　④ $0.033_{(6)}$　⑤ $0.043_{(6)}$

（2017 ｾﾝﾀｰ本試験　＝選択問題＝）

(1) 百の位の数が 3，十の位の数が 7，一の位の数が a である 3 桁の自然数を $37a$ と表記する。

$37a$ が 4 で割り切れるのは　$a=$ ア ，イ

のときである。ただし，ア ，イ の解答の順序は問わない。

(2) 千の位の数が 7，百の位の数が b，十の位の数が 5，一の位の数が c である 4 桁の自然数を $7b5c$ と表記する。

$7b5c$ が 4 でも 9 でも割り切れる b，c の組は，全部で ウ 個ある。これらのうち，$7b5c$ の値が最小になるのは $b=$ エ ，$c=$ オ のときで，$7b5c$ の値が最大になるのは $b=$ カ ，$c=$ キ のときである。

また，$7b5c=(6\times n)^2$ となる b，c と自然数 n は

$b=$ ク ，$c=$ ケ ，$n=$ コサ 　である。

(3) 1188 の正の約数は全部で シス 個ある。

これらのうち，2 の倍数は セソ 個，4 の倍数は タ 個ある。

1188 のすべての正の約数の積を 2 進法で表すと，末尾には 0 が連続して チツ 個並ぶ。

◆（2017 北大_前期_文）

自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a，n，k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき

$a \geqq k^2+2k-1$ 　　が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

◆（2017 小樽商大）

n を自然数とする。$\sqrt{n^2+2017}$ が自然数となるような n を求めると，$n=$ $\boxed{}$ である。

必要があれば，2017 は素数であることを用いてよい。

◆（2017 千葉大学 教育）

a，b を正の整数とするとき，次を証明せよ。

(1) a^3-a は 3 の倍数である。

(2) $a-b$ が 3 の倍数ならば，a^3-b^3 は 9 の倍数である。

(3) a^3-b^3 は，3 の倍数ならば 9 の倍数である。

参考）[1] 札幌旭丘高校　菅原満／展望 「数学Ａ~整数の性質」（その１）　第 70 回数実研

[2] 札幌旭丘高校　中村文則／２元１次不定方程式特殊解の簡便法による求め方 第 89 回数実研