1/z 変換をイメージ化する

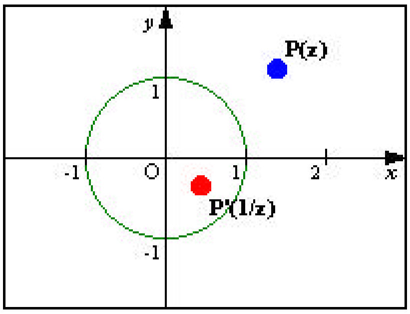
札幌稲北高校　早苗　雅史

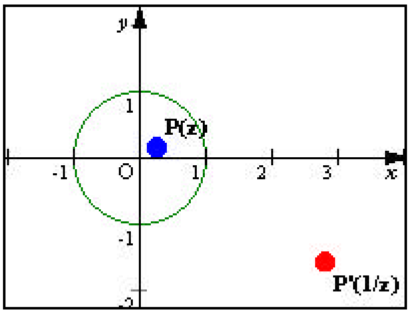
新川高校の中村文則先生が'99.8 の数実研で発表された「メービウスのわだち」は，複素作用素による図形変換を詳細に解説してただき大変興味深いものでした．べきと反転という初等幾何の手法を用いて，複素変換の神秘的な魅力を私たちに教えてくれました．

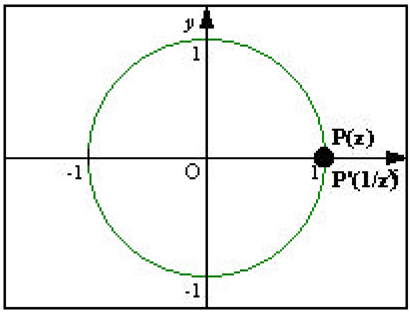
ここでは 1/z 変換を視覚的にイメージ化することで，難解な作用素としての変換を簡単に理解できるよう工夫してみました．べきという初等幾何はできる限り用いず，また解析的にもならないように，中村先生のいうその " 神秘性"を保って作成したつもりです．関数表示ソフト「Grapes」を用いていますので，パラメータを変化させることで，より動きのあるイメージが得られると思います．

1.　点の変換

変換　$f: z \to 1/z$　は次の図のように，$|z|$が大きくなる，すなわち原点からの距離が大きくなればなるほど，その像は原点に近づく．反対に原点に近づけば，その像は原点から遠ざかる．その境目は単位円となる．また，点±1 は不動点となる．



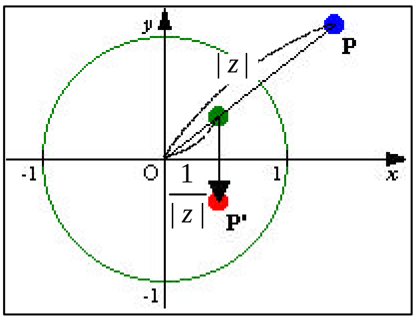




変換　$f: z \to 1/z$　の図形的解釈は

$$1/z = \bar{z}/|z|^2$$

より，点 P(z) に対して OP を $1/|z|$ 倍して，実軸に関して対称移動したものと考えられる．



2.　リーマン球面との位相同形

変換　$f: z \to 1/z$　は，複素数平面上の点をリーマン球面上の点に対応させることで 1：1 対応が可能となる．

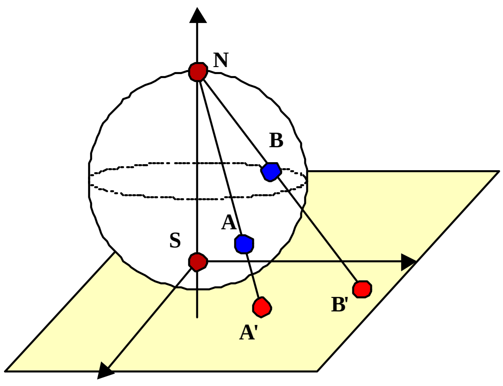
右の図のように N 極を通る直線とリーマン球面上の点 A を結んで複素平面上に投影する．その点を A'とする．

　　A→N のとき，A'→∞

また，

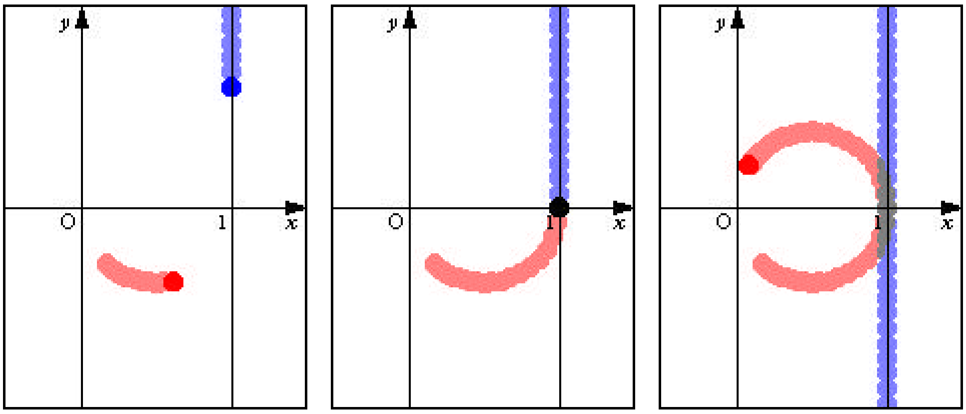
　　A→S のとき，A'→S

つまり，N 極が無限円点に S 極が不動点に対応する．

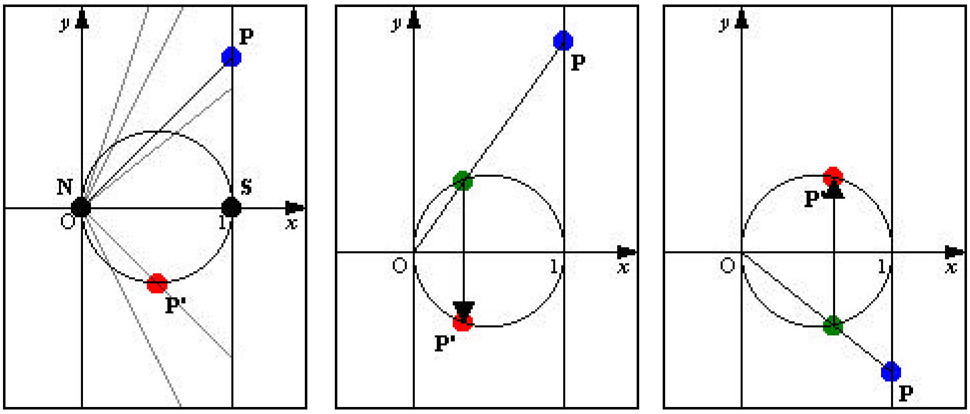


3.　実軸に垂直な直線の変換

それでは実軸に垂直で 1 を通る直線 $z(1)$を変換させて見る．次の図のように像は原点を通る円となる．



これは N 極を原点，S 極を 1 だと考え，NS を直径とする円を考えれば説明がつく．直線上の動点 P と N 極（原点）とを結ぶ線分と円との交点を，実軸に関して対称に折り返した点が 1/z による像 P’となる．この実軸に関して対称に折り返すことで，ねじれのような状態が生じている．



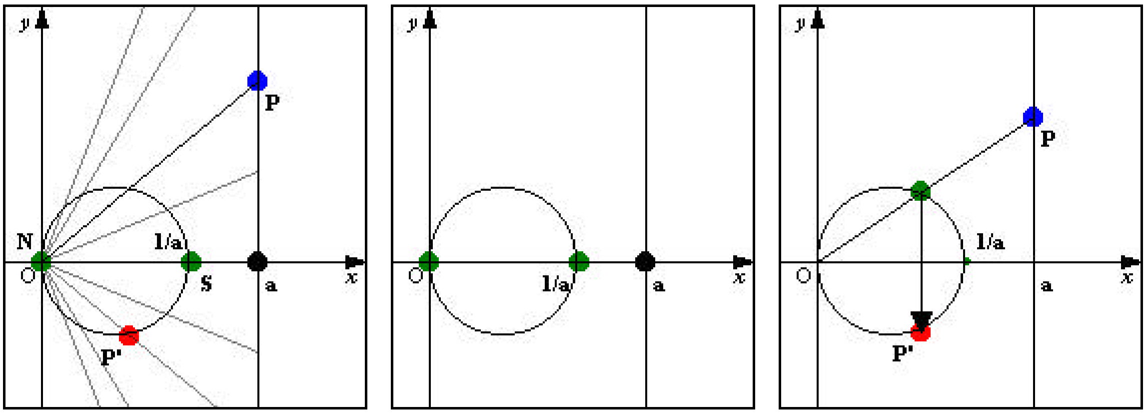
同様にして実軸に垂直で a を通る直線 $z(a)$を変換させて見る．先ほどと同様に N 極を原点にとる．また，原点から最も近い点 a を変換した点 $1/a$ を S 極ととればよい．つまり直線の変換された像は，原点と $1/a$ を直径とする円と考えられる．また，点 P の像は原点と結んだ線分と円との交点を実軸に対象に折り返した点である．

先ほどのリーマン球面との対応で示したように，

原点の反転が∞，∞の反転が 0

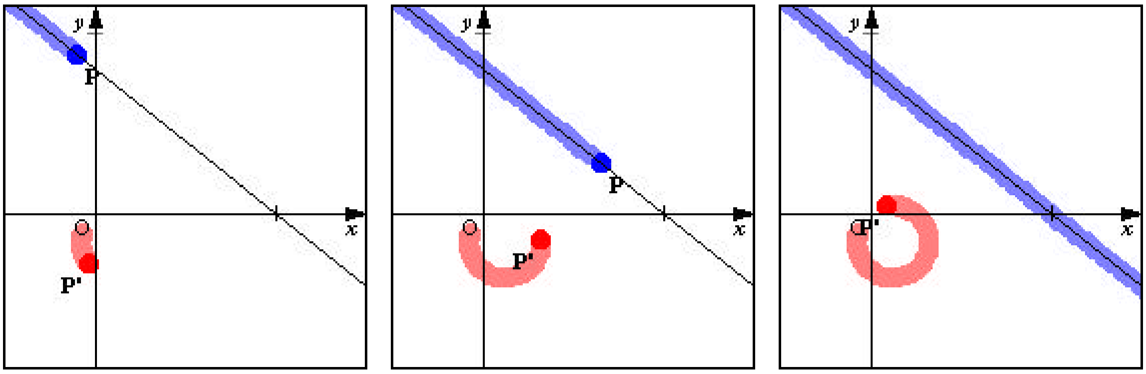
原点からの距離が最小な点の反転は，原点からの距離が最大

と考えるのである．

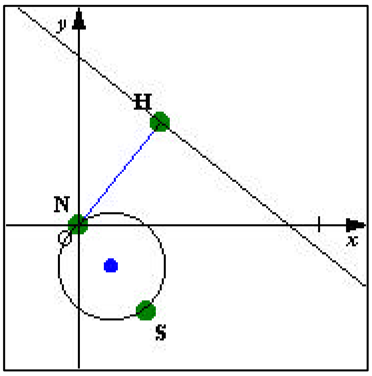


4.　原点を通らない直線の変換

それでは一般的な直線はどうであろうか．次の図のようにやはり円となる．

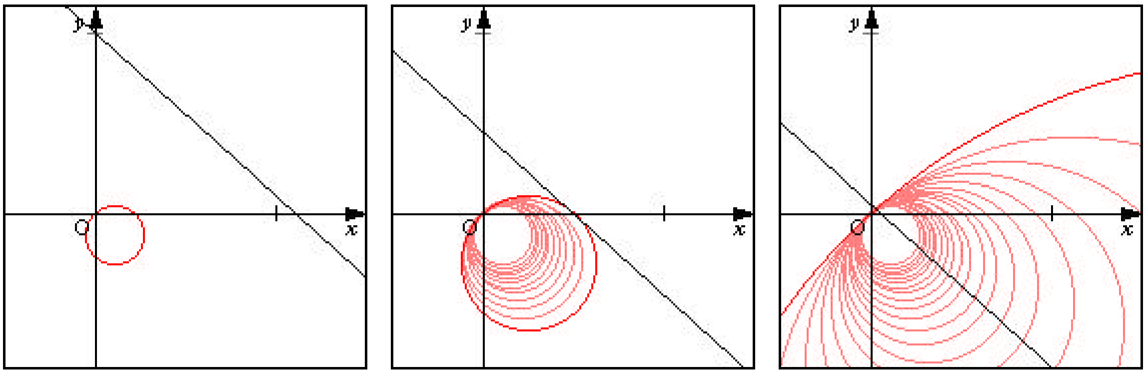


原点からの距離が最も大きくなる無限円点を原点に考える．この点と最も近くなる点，すなわち原点からこの直線に下ろした垂線の足を反転させた点を直径の両端に持つ円と考えればよい．

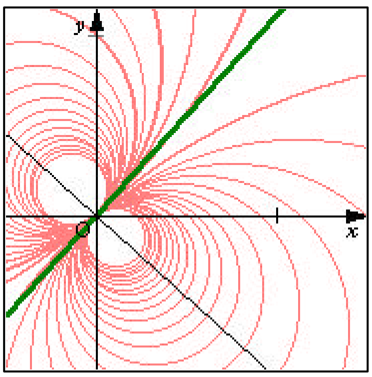


5.　原点を通る直線の変換

原点を通る直線の場合はそうはいかない．次の図は直線を傾き一定のまま，原点に近づけていったものである．原点に近づけば近づくほど円の半径は大きくなり，やがて直線になる．



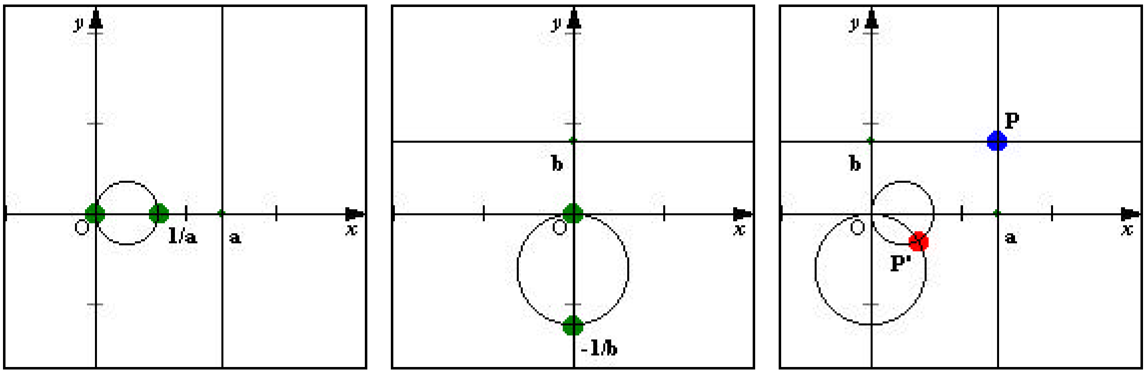
この直線は原像の直線を実軸に関して対称に移動した直線である．また，原点を通る直線を半径∞の円と考えれば，すべての直線は円に変換される，と考えることもできる．



6.　点の変換～再び

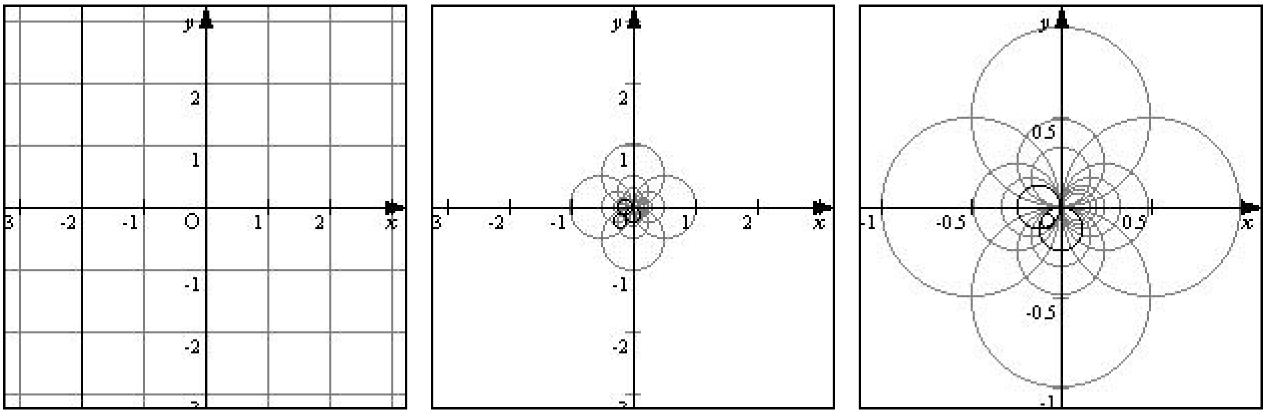
さて直線の変換から点の変換をもう一度見直してみよう．点 P(z)の変換は 1．で幾何的に見てきたが，実軸に垂直な直線の変換と虚軸に垂直な直線の交点と考えることでも得られる．

つまり，実軸と a で垂直に交わる直線の像である原点と $1/a$ を直径とする円，虚軸と b で垂直に交わる直線の像である原点と $-1/b$ を直径とする円，この 2 つの円の交点と考えることができる．

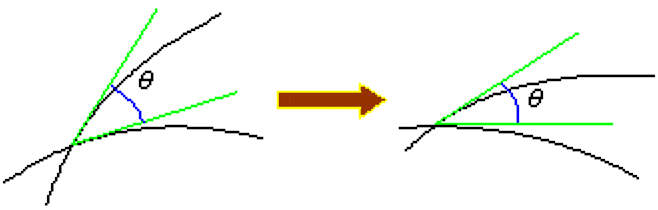


7.　座標平面の変換

同様にすれば座標平面全体を変換することができる．次の図のように直行座標全体を変換させると，円形に広がる座標系が得られる．一番右の図はそれを拡大したものである．

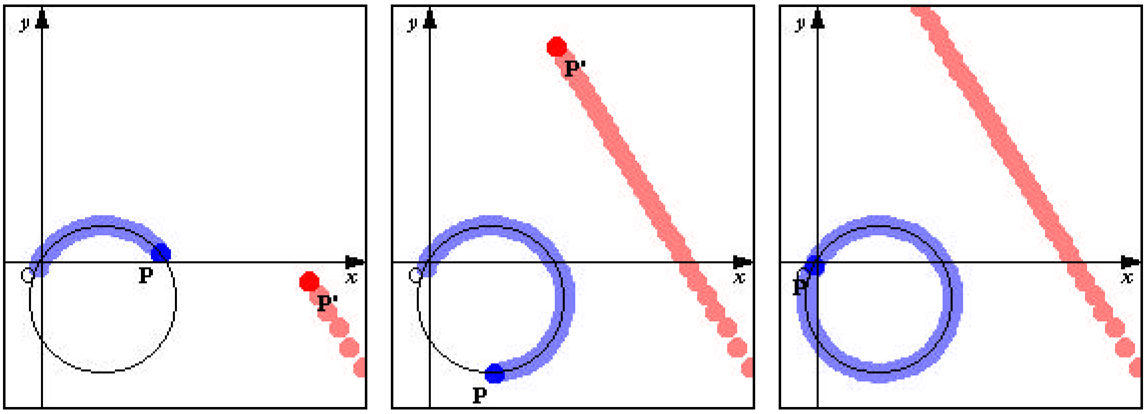


この変換は等角写像と呼ばれている．与えられた任意の 2 つの曲線の曲線のなす角が，写されたあとにも等しく保たれているからである．曲線と曲線のなす角とは，次の図のように，交点でそれぞれの曲線に接線を引き，その間の角をいう．

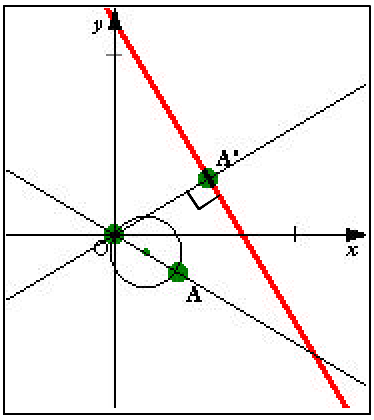


8.　原点を通る円の変換

原点を通る円を変換させてみよう．直線が円に変換されることを考えれば，その逆変換は直線になる．

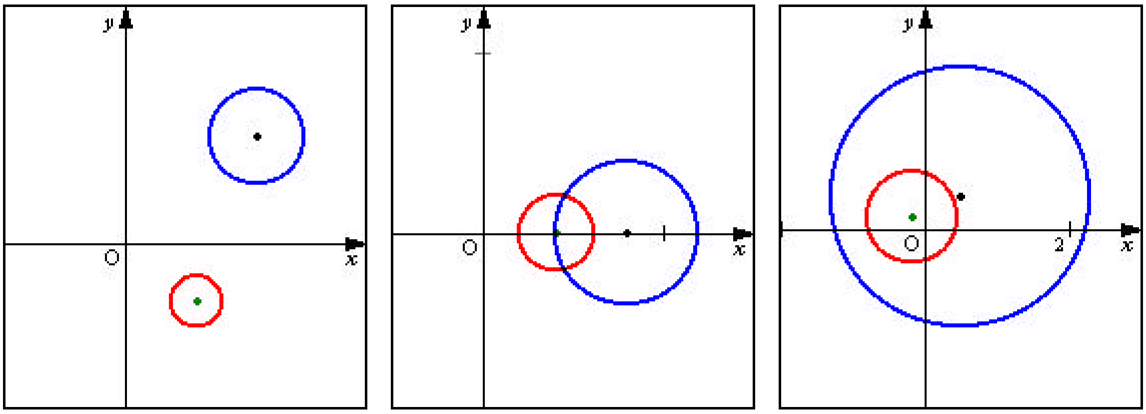


原点の反転が無限円点になり，原点からの距離が最大な点の反転が原点からの距離が小になることを考えれば説明がつく．円周上では，原点と反対の直径の点 A との距離が最大であるから，変換された直線では距離が最小になる．つまり，A を変換した点 A'を通り，A'と原点を結ぶ線分に垂直な直線となるわけである．

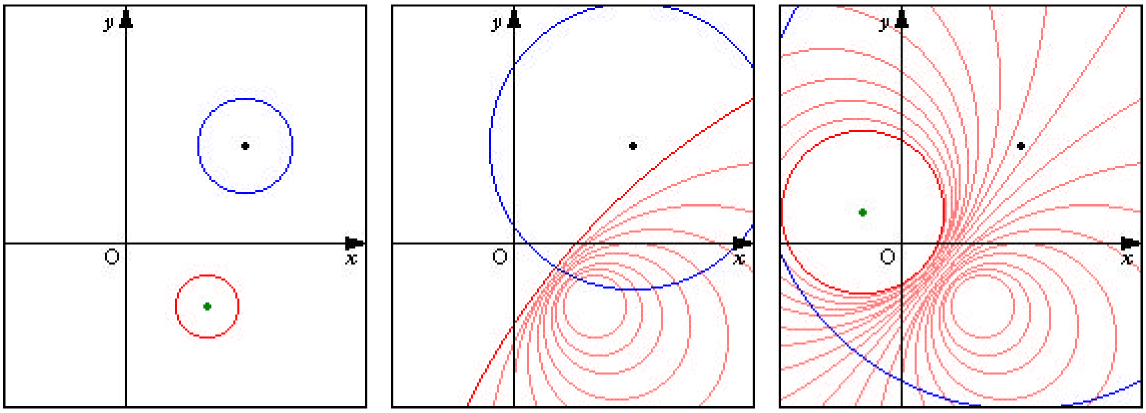


9.　原点を通らない円の変換

原点を通らない円は，先ほどの逆変換から円となる．



次の図は原像の円の中心を固定して半径を大きくしていったときの，変換される円の軌跡を表したものである．次第に変換される円の半径が大きくなり，原像が原点を通るときに直線となり，次に反対側にまた円が現れてくるのが分かる．



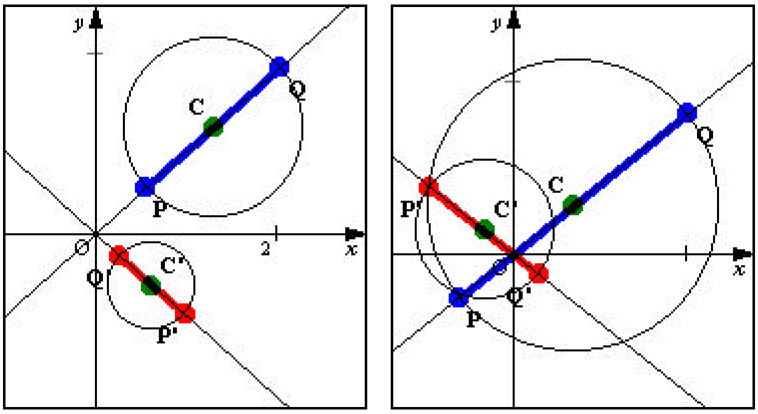
さて変換されたあとの円の中心と半径はどうなるであろう．原像の円の直径を P(z_1)，Q(z_2)（原点に近いほうを P）とする．原点からの距離は P が最も小さく，Q が最も大きい．P，Q の像を P’(z_1)，Q’(z_2)とすると，変換された円は P’Q’ を直径とする円である（今度は原点に近いほうが Q’）．ここで，

$P'Q'=|1/z_1-1/z_2|=|(z_1-z_2)/z_1z_2|=PQ/\ OP\cdot OQ$

より，変換された円の直径はもとの円の直径を，OP・OQ で割った値となる．また，

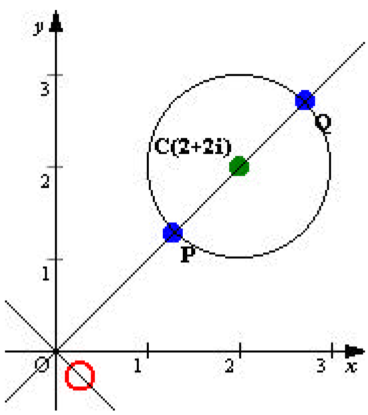
$(z_1+z_2)/2=(1/\ z_1+1/\ z_2)/2=(z_1+z_2)/2\ z_1z_2=1/\ z_1z_2\ \cdot(z_1+z_2)/2$

より，変換された円の中心はもとの円の中心を z_1z_2 で割ったものとなる．ここで z_1z_2 とは有向線分 OP，OQ の積を考えることで，もとの円が原点を含む場合にも対応できる．



具体例で見てみる．

(1) 中心 C(2+2*i*)，半径 1 の円の変換



$OC=2\sqrt{2}$ より，$\overrightarrow{OP}=2\sqrt{2}-1$，$\overrightarrow{OQ}=2\sqrt{2}+1$

$\therefore\ \ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}-1)=7$

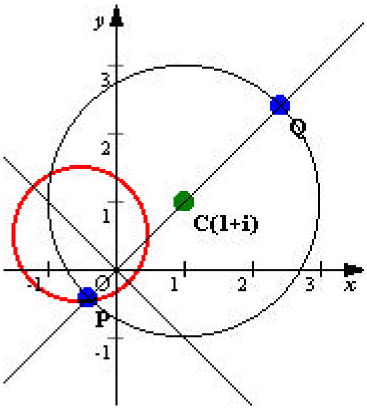
∴ 変換された円の中心は C’(2/7+2*i*/7)，半径は 1/7

(2) **中心** C(1+i)，**半径** 2 **の円**

$OC=\sqrt{2}$ **より，** $\vec{OP}=2-\sqrt{2}$，$\vec{OQ}=2+\sqrt{2}$

∴ $\vec{OP}\cdot\vec{OQ}=-(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})=-2$

∴ **変換された円の中心は** C'(－1/2+*i*/2)，**半径は** 2×1/2=1



10. 円の内部の変換

円の内部を変換するとどうなるであろう．基本的に円の内部もまた円の内部に変換される．しかし，円周が原点を通るとき，先ほど見た直線の原点を含まない側の領域に移される．また円内に原点を含むときはもとの円を変換した円の外部に移される．これも直線を半径無限大の円と同一視することでイメージ化することができる．