フィボナッチ数列

第 95 回数学教育実践研究会資料
北海道留萌高等学校　宮野　昌彦

０．はじめに

フィボナッチ数列は、黄金比などの日常生活と密接した様々性質が発見されるなど、数学的に大変面白い分野だと感じる。高校数学の中でも、時折登場してくるフィボナッチ数列において、自分なりに興味深い発見がありましたので、証明しました。

１．フィボナッチ数列の一般項について

フィボナッチ数列は次のように定義され、一般項も高校の知識で求めることができる。

【定義】 $a_n + a_{n+1} ＝ a_{n+2} \quad (a_1 = 1, a_2 = 1, n \geq 1)$

【一般項】 $$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$ ※ビネの公式

２．フィボナッチ数列の一般項の証明

$$a_n + a_{n+1} ＝ a_{n+2} \quad (a_1 = 1, a_2 = 1, n \geq 1)$$

【証明】定数α、β（$\alpha \leq \beta$）を求める。

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots ①$$
$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \cdots ②$$

①、②から $a_{n+2} = (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$ と表すことができる。

ここで $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ により

$(\alpha+\beta) = 1, \alpha\beta = -1$

ゆえに、$\alpha,\ \beta$ は２次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の２つの解で $\alpha \leq \beta$ から

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}、\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

すなわち、①は数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ が公比βの等比数列であることを示しており、

その初項は $a_2 - \alpha a_1 = 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \beta$

したがって、数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta \cdot \beta^{n-1} = \beta^n \cdots ③$$

同様にして②から $a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n \cdots ④$

④－③より $a_{n+1} - \beta a_n - (a_{n+1} - \alpha a_n) = \alpha^n - \beta^n$

$$(\alpha - \beta)a_n = \alpha^n - \beta^n$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)a_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$-\sqrt{5}a_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

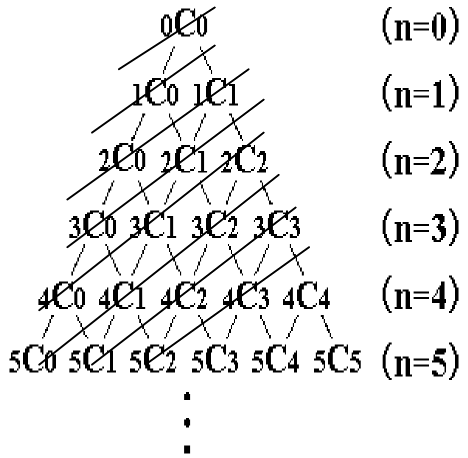
$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$ ［終］

3．フィボナッチ数列とパスカルの三角形

[パスカルの三角形] ⟶ 1が垂直に並ぶように傾けると

[パスカルの三角形]	1が垂直に並ぶように傾けると		（和）
1	1	→	1
1　1	1	→	1
1　2　1	1　1	→	2
1　3　3　1	1　2	→	3
1　4　6　4　1	1　3　1	→	5
1　5　10　10　5　1	1　4　3	→	8
1　6　15　20　15　6　1	1　5　6　1	→	13

フィボナッチ数列



斜めの和

(0)C(0)=1
(1)C(0)=1
(2)C(0)+(1)C(1)=2
(3)C(0)+(2)C(1)=3
(4)C(0)+(3)C(1)+(2)C(2)=5
(5)C(0)+(4)C(1)+(3)C(2)=8

すなわち、パスカルの三角形にフィボナッチ数列が隠れており、一般項は、次のように表される。　※[　　]はガウス記号である

$$a_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (n-k)C(k-1)$$

【証明】

$$a_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (n-k)C(k-1)$$

$$= (n)C(0) + (n-1)C(1) + \cdots + \left(n - \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)C\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$$

自然数nに対してnを越えない最大の整数を$[n]$で表す。

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] \begin{cases} n\text{が偶数のとき} & \dfrac{n}{2} \\ n\text{が奇数のとき} & \dfrac{n+1}{2} \end{cases}$$

- nが偶数のとき

$n=2m \quad (m=1,2,3,\cdots)$とおくと

$$\boldsymbol{a_{n-1}}+\boldsymbol{a_n}=a_{2m-1}+a_{2m}$$
$$=\{(2m-1)C(0)+(2m-2)C(1)+\cdots+(m)C(m-1)\}$$
$$+\{(2m)C(0)+(2m-1)C(1)+\cdots+(m)C(m)\}$$

※$(\mathbf{n})\mathbf{C}(\mathbf{r})=(\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathbf{C}(\mathbf{r}-\mathbf{1})+(\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathbf{C}(\mathbf{r})$により

$$=(2m+1)C(0)+(2m)C(1)+\cdots+(m+1)C(m)$$
$$=a_{2m+1}$$
$$=\boldsymbol{a_{n+1}}$$

- nが奇数のとき

$n=2m+1$とおくと

$$\boldsymbol{a_{n-1}}+\boldsymbol{a_n}=a_{2m}+a_{2m+1}$$
$$=\{(2m)C(0)+(2m-1)C(1)+\cdots+(m)C(m)\}$$
$$+\{(2m+1)C(0)+(2m)C(1)+\cdots+(m+1)C(m)\}$$

※$(\mathbf{n})\mathbf{C}(\mathbf{r})=(\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathbf{C}(\mathbf{r}-\mathbf{1})+(\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathbf{C}(\mathbf{r})$により

$$=(2m+2)C(0)+(2m+1)C(1)+\cdots+(m+1)C(m+1)$$
$$=a_{2m+2}$$
$$=\boldsymbol{a_{n+1}}$$

よって、並びかえたパスカルの三角形の和がフィボナッチ数列になることが証明された。

【結論】

$$\boldsymbol{a_n}=\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(n-k)C(k-1)=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\left\{\left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}}-\left(\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}}\right\}$$

４．フィボナッチ数列の和の証明

フィボナッチ数列の第n項をa(n)、第n項までの和をS(n)と表すとすると

$S(n)=a(1)+a(2)+a(3)+\cdots\cdots+a(n-1)+a(n)$ ・・・①

$S(n)=\qquad a(1)+a(2)+\cdots\cdots+a(n-2)+a(n-1)+a(n)$ ・・・②

①＋②と $a(k-1)+a(k-2)=a(k)$より、

$2S(n)=a(1)+a(3)+a(4)+\cdots\cdots+a(n)+a(n+1)+a(n)$

$2S(n)=\underbrace{a(1)+a(2)+a(3)+a(4)+\cdots\cdots+a(n)}_{S(n)}+a(n+1)+a(n)-a(2)$

$2S(n)=S(n)+a(n+1)+a(n)-a(2)$

$S(n)=a(n+1)+a(n)-a(2)$

$S(n)=a(n+2)-1$

よって、求める和は

$$S(n)=a(n+2)-1$$