平成 22 年 6 月 12 日（土）第 73 回数学教育実践研究会
北海道大学　情報教育館 3F スタジオ型多目的中講義室

図形とイメージ

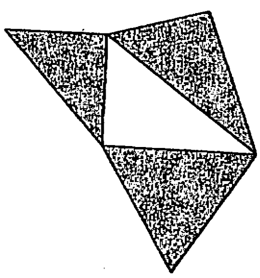
立体図形の解説 ——— 電子書籍時代の教材作成，そしてその将来

松本睦郎（札幌北高等学校）

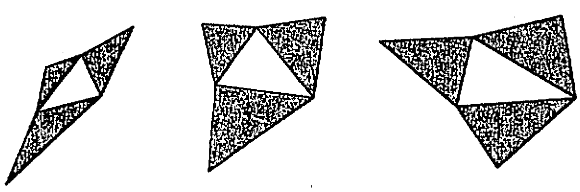
2010 年 5 月 28 日に i-Pad が発売され、インターネット経由で電子書籍が配信される時代に変化しようとしている。かつての大学受験ラジオ講座が圧倒的な人気があったように　この新しいメディアをどう活用するのかは、今後　我々の教育現場の工夫によるものがある。2009 年北海道大学、2010 年札幌医科大学の入試問題を題材にして生徒のモチベーションが高まることを目標において、電子書籍時代の教材を試作してみた。

北海道大学 2009 年

図はある三角錐 V の展開図である。ここで、AB ＝4，AC＝3，BC＝5，∠ACD＝90°で・ ABE は正三角形である。このとき、V の体積を求めよ。



立体図形の効果的指導方法として視覚に訴えて数学的空間イメージを育成することが必要である。Mathematica6.0 から立体をあらゆる視点から見る機能が標準装備された。マウスを動かすことによって自由に視点を変化させることができる。

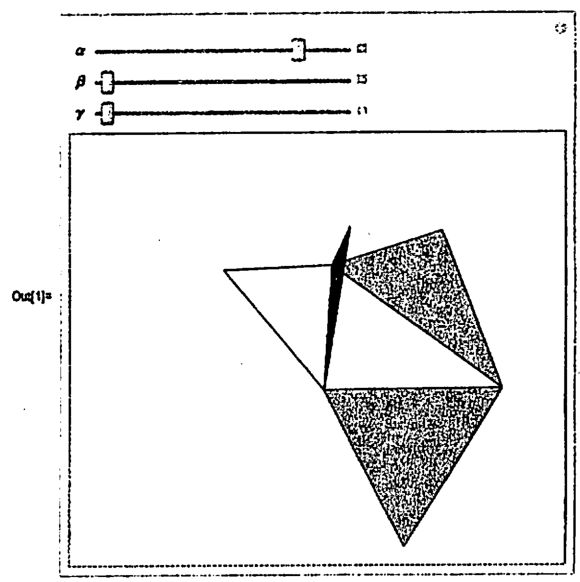


i-Pad では指を触れるだけで動かすことができるであろう。

グラフィックの動的インタラクティブを作成

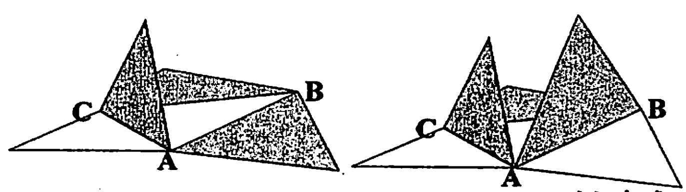
Manipulate 機能も新しく加わり、それぞれの平面のスライダーを動かすことによって独立して動かすことができる。立体図形を仮想体験することができる。

日本語機能も強化され、プレゼンテーションも可能となった。



Step1　図形的イメージを体験する。

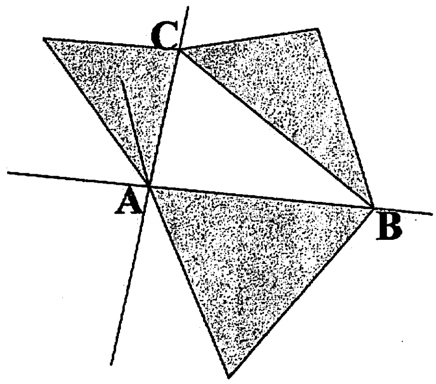
各平面のスライダーを動かし、図形変化や視点を変えることにより 3D 図形を見ることができる。



観察することにより、個々の空間イメージを育成

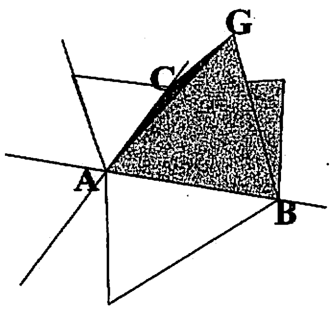
することがで、図形のイメージから「ひらめき」を引き出す。この「ひらめき」がモチベーションをたかめる

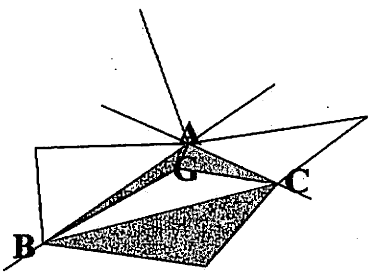
Step2　座標を導入する。



$CB^2 = CA^2 + AB^2$ より

∠ACB＝90°となるので、△ABC は直角三角形となるので、AB を x 軸、AC を y 軸にとって座標を導入すると良い。





△ABE は正三角形なので、この三角錐の頂点 G の x 成分は 2 である。

△ACD は∠C は直角とする直角三角形なので三角錐の頂点 G の y 成分は 3 である。

$G(2,3,z)$ と表示できる。

Step3　高さを求める。

AG＝4 より

$2^2+3^2+z^2=4^2$

$z^2=3$

$z=\sqrt{3}$

Step4　体積を求める。

$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times\sqrt{3}$

$V=2\sqrt{3}$

札幌医科大学2010年

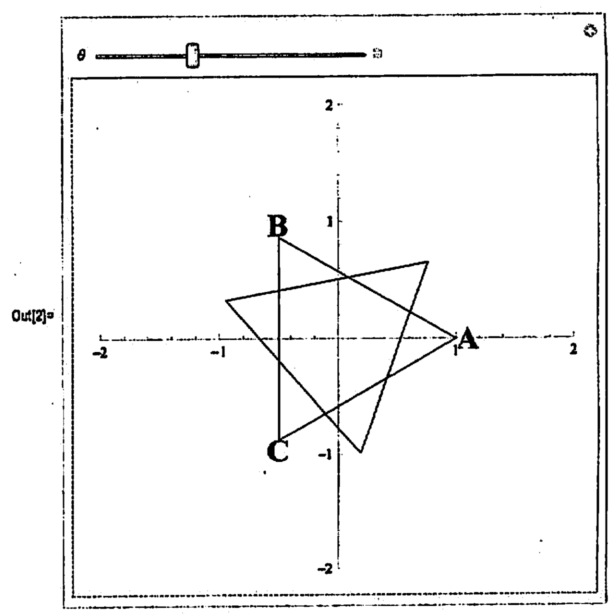
a,h を正の定数とし、$0^\circ<\theta<120^\circ$ とする。空間内に３点 $A(a,0,0)$，$B\left(-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2},0\right)$，$C\left(-\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}a}{2},0\right)$ がある。xy 平面上で、３点 A,B,C を原点中心にθだけ回転させた点をそれぞれ D,E,F とする。さらに３点 D,E,F を z 軸方向に h だけ平行移動した点をそれぞれ X,Y,Z とする。

（１）点 D と、直線 AB の距離を a とθを用いて表せ。

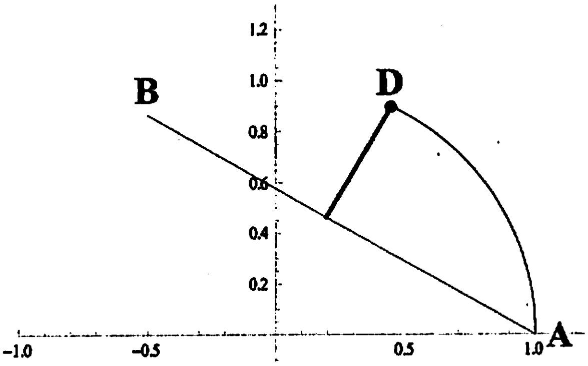
（２）三角形 ABX の面積が最大となるときのθを求め、そのときの面積を a と h を用いて表せ。

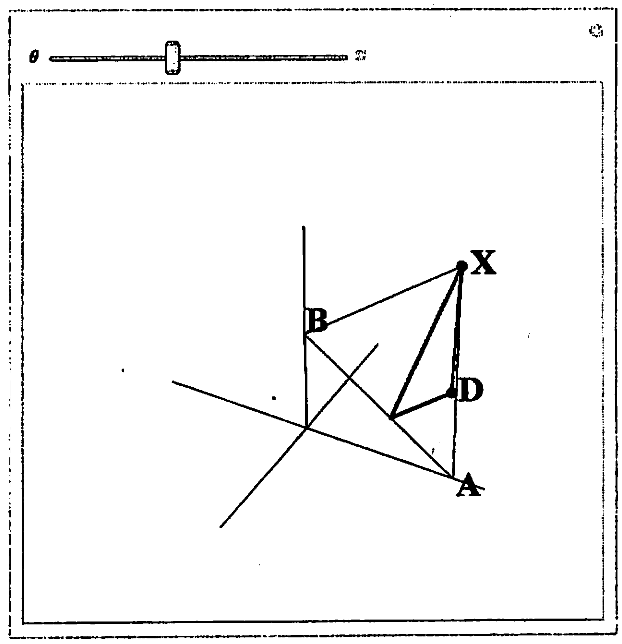
（３）下面が三角形 ABC，上面が三角形 XYZ，側面が６つの三角形 AXZ，BYX，CZY，XAB，YBC，ZCA であるような立体を考える。（２）で求めたθに対して、この立体の体積を a と h を用いて表せ。

Step1 問題のイメージを把握する。



Manipulate 機能を使ってスライダーを動かし問題の状況を把握する。





Step 2 必要な部分を Close Up する。

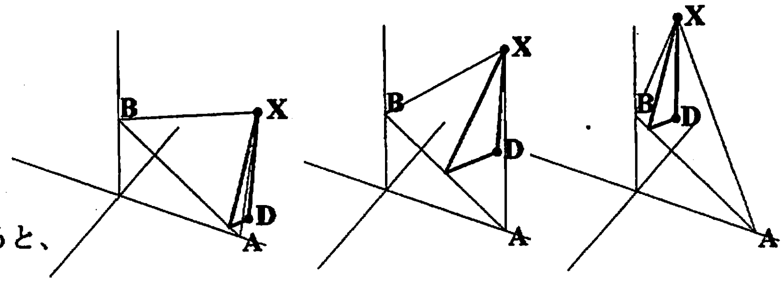
必要なものを明確にしておく。

点 D の座標を求める。xy 平面上において、

$$\overline{OD}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\theta\\ a\sin\theta\end{pmatrix}\cdots①$$

直線 AB の方程式；$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-a)$

AB；$\sqrt{3}\,x+3y-a\sqrt{3}=0\cdots②$



点 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ と直線②との距離 d とすると、

点と直線の距離公式により

$$d=\frac{\left|\sqrt{3}\,a\cos\theta+3a\sin\theta-a\right|}{\sqrt{3+9}}$$
$$=\frac{a\left|\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-1\right|}{2}$$
…（答）

（2）

Step3 座標を導入する。

$$A(a,0,0), B\left(-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}\,a}{2},0\right), X(a\cos\theta, a\sin\theta, h)$$

h は一定なので、△ABX の高さ e とすると

Step4 同値な条件を発見する。

θ の値を変化させ図形から同値な条件を発見する。

e の最大値⇔d の最大値

三角形ＡＢＸの面積が最大となるときは

d が最大になるときである。前問題（1）より

$$d=\frac{a\left|\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-1\right|}{2}$$

$$d=\frac{a\left|2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)-1\right|}{2}$$

$0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ より $\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$ となり、

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき d は最大になる。

このとき、$d=\dfrac{a}{2}\left|\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{\pi}{3}-1\right|=\dfrac{a}{2}$

$e^2=h^2+d^2$ より $e=\sqrt{h^2+\dfrac{a^2}{4}}\cdots③$

$$AB=\sqrt{\left(a+\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}$$

$AB=\sqrt{3}\,a\cdots④$

三角形ＡＢＸの面積の最大値＝

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\times\sqrt{\frac{a^2}{4}+h^2}$ …（答）

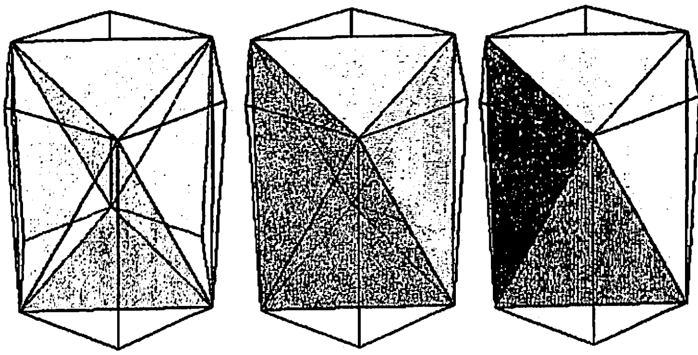
（３）

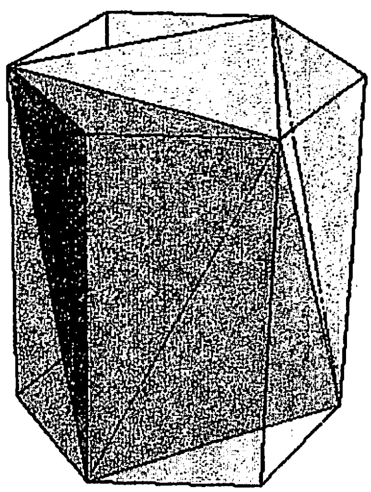
Opacity－立体図形の透明化

Mathematica6.0 以降 Opacity 機能が加わり立体図形を透明化することができるようになった。

Step5 立体構造を把握する。

条件を変えて立体図形を観察し発見することができる。





前問（2）より $\theta=\frac{\pi}{3}$ であるので、求める立体の体積は、高さ h、１辺の長さ a の正六角柱の体積から、三角柱 A-PXZ の体積を６個分引いた体積に等しい。

正六角柱の体積＝$\frac{6}{2}a^2\,h\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h$

三角柱 A-PXZ の体積

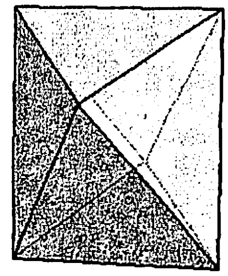
$$=\frac{1}{3}a^2\,h\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h$$

求める立体の体積

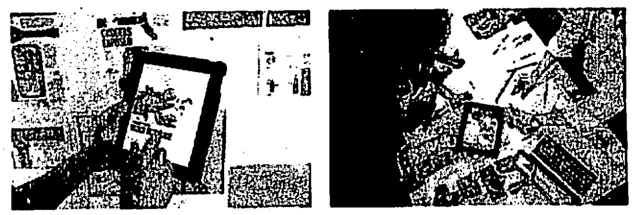
＝正六角柱の体積－6×三角柱 A-PXZ の体積

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h-\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h\times 6$

$=\sqrt{3}\,a^2h$ …（答）



i-Pad 時代の教材作成



<Popular Science の i-Pad アプリケーション開発風景　　　Apple 社のサイトから抜粋>↑

2010年4月3日に米国で i-Pad が発売されると同時に科学出版社から i-Pad アプリケーション Popular Science+が発売され、現在では100種類以上の電子書籍が米国と欧州で発行される計画で準備されている。開発チームの基本概念は、「自分の手に持って操作するマルチタッチスクリーンを通じて読者の体験を作り変える。」ことである。

「触れる」→「動かす」→「体験する」ことを目標に開発するのが電子出版の成功のポイントである。近未来には日本においても教科書に i-Pad のような電子書籍出版が普及することも想定される。今は、「黒船到来」の時代に似ている。このシステムは教育分野－授業でも活用できる。数学の中に純粋論理だけでなく、感覚的要素；「触れる」→「動かす」→「体験する」→「規則性の発見」→「感動」→「モチベーションを高める」を可能にする電子書籍教材開発が、教育現場に求められている気がする。

松本睦郎（札幌北高等学校）