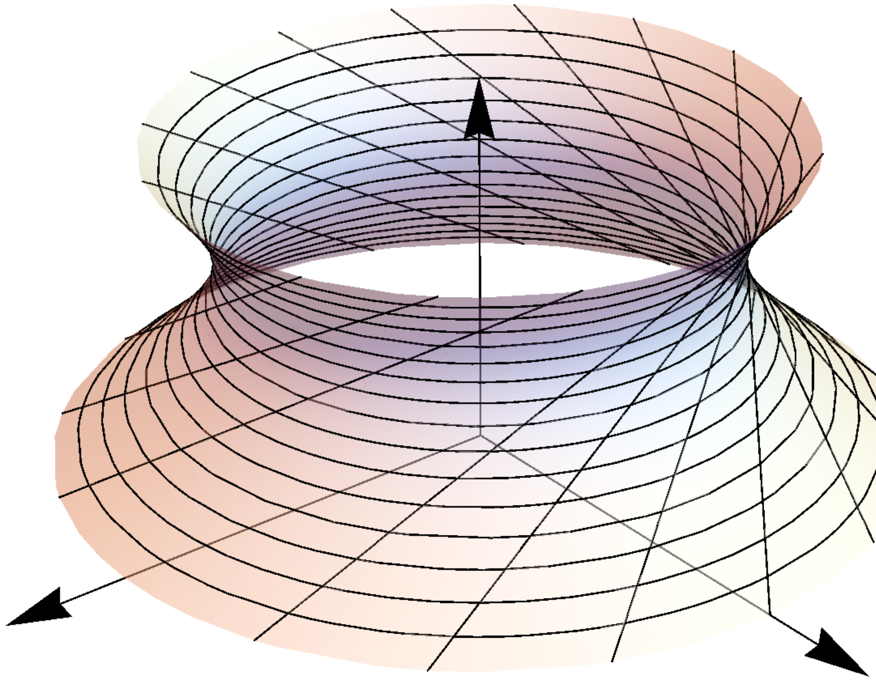
数IIIが得意になる本

体積問題編

DOLOR SET AMET

チャプタ 1

回転体の体積



セクション１

回転軸をまたがる図形

富山大学2014

1. $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で方程式 $\cos 2x - cosx = 0$の解を求めよ。
2. $0 \leqq x \leqq \pi$の範囲で２つの曲線 $y = cos2x$と $y = cosx$で囲まれた図形の面積を求めよ。
3. （２）の図形を x軸の周りに１回転させてできる立体の体積Vを求めよ。

1.は三角方程式の解法問題です。

$$\cos 2x - cosx = 0$$

$$2cos^2x - cosx - 1 = 0$$

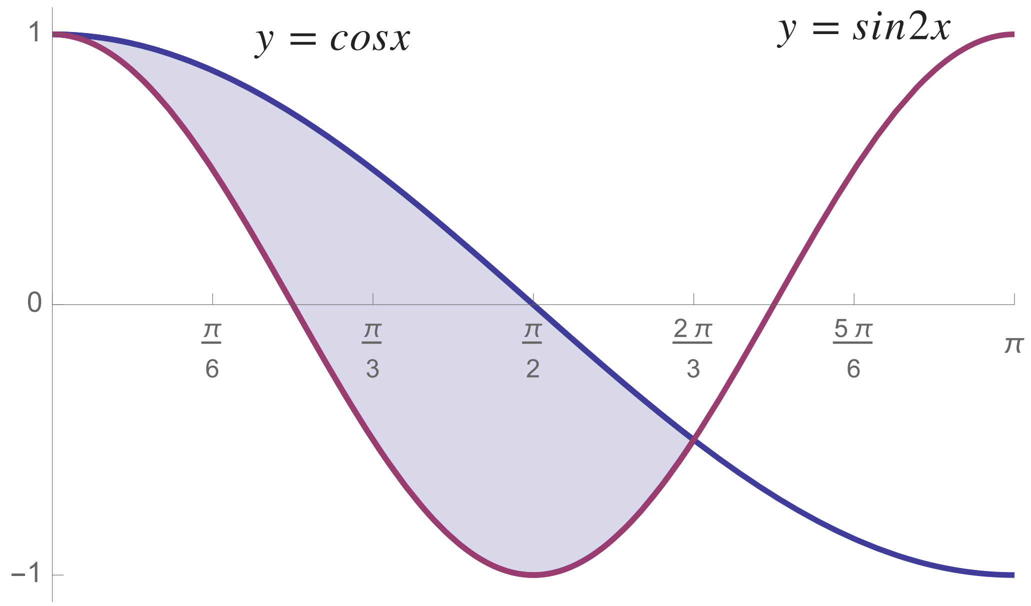
$$(2cosx + 1)(cosx - 1) = 0$$

$$cosx = -\frac{1}{2} \quad cosx = 1$$

$$x = 0, x = \frac{2\pi}{3} \cdot \cdot \cdot (答)$$

2.グラフの上下関係に注意する。

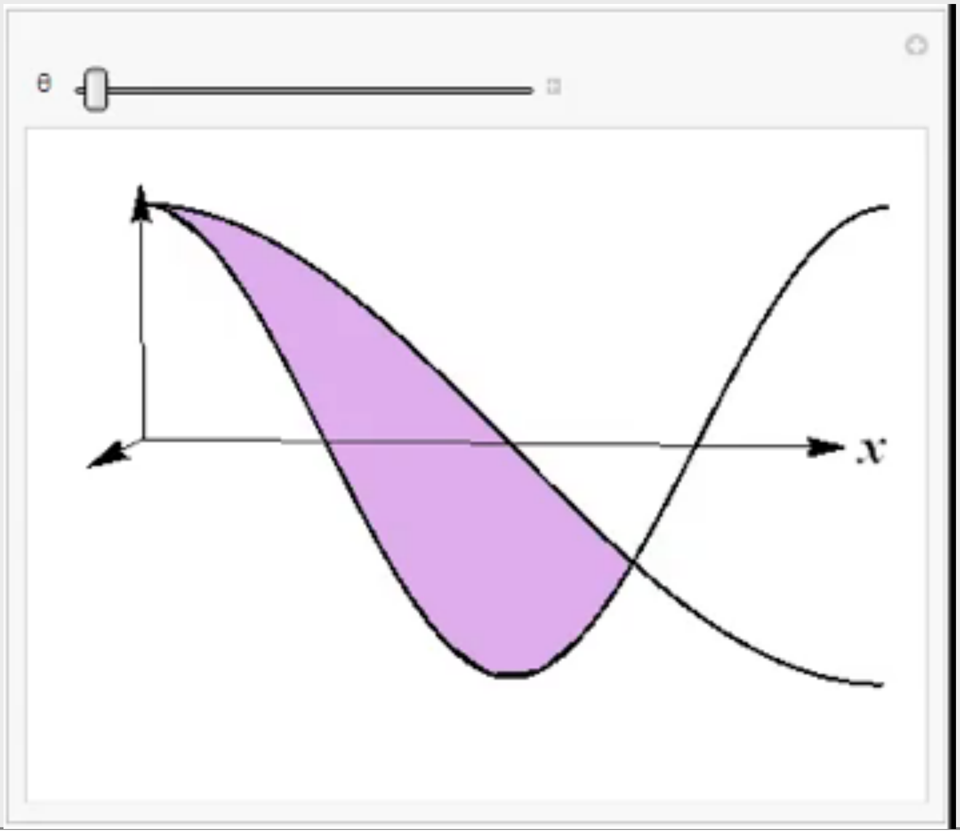
上部の $y = cosx$から、下部の $y = cos2x$を引き、積分すると囲まれた部分の面積を求めることができる。



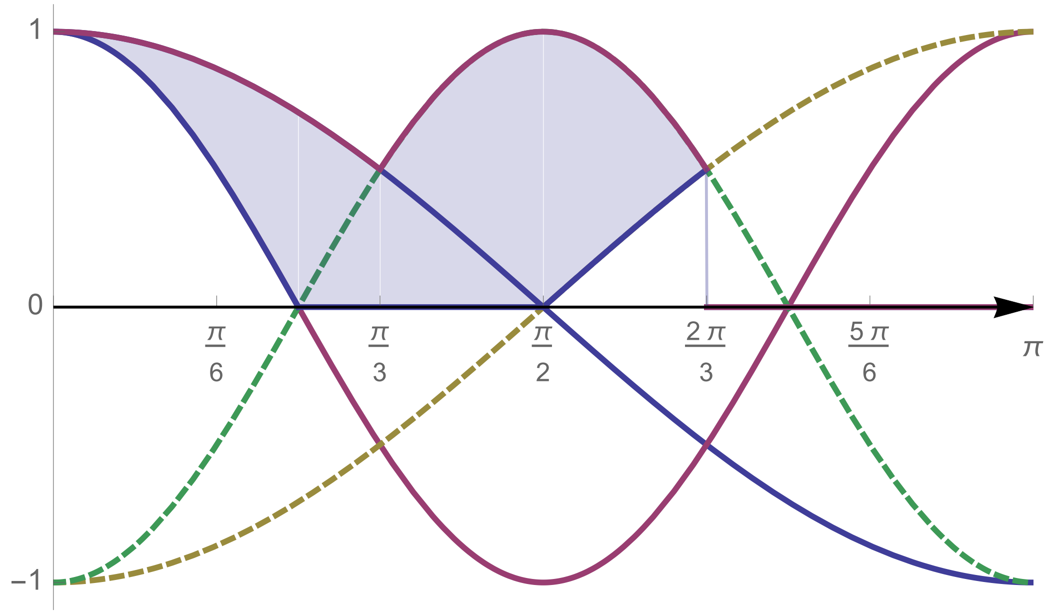
$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(cosx - cos2x\right)dx = \left[sinx - \frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \cdot \cdot (答)$$

3.回転軸に交差する図形を回転すると重複する部分が発生する。

ムービー 1.1 x軸に交差する図形の回転

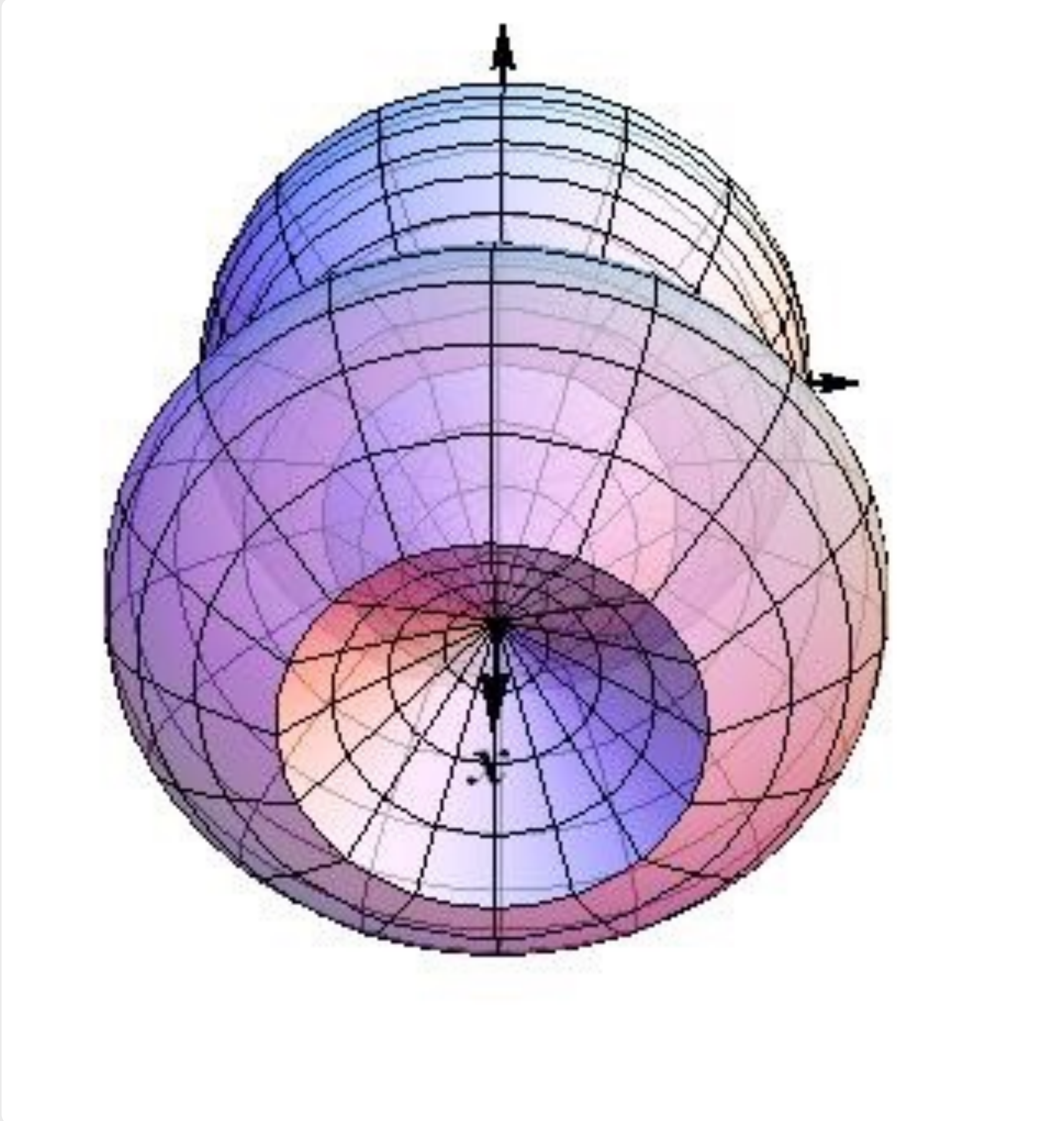


回転軸（x軸）の下側にある部分を線対称した図形を回転する。



この回転体は、かなりの凹凸ができる。

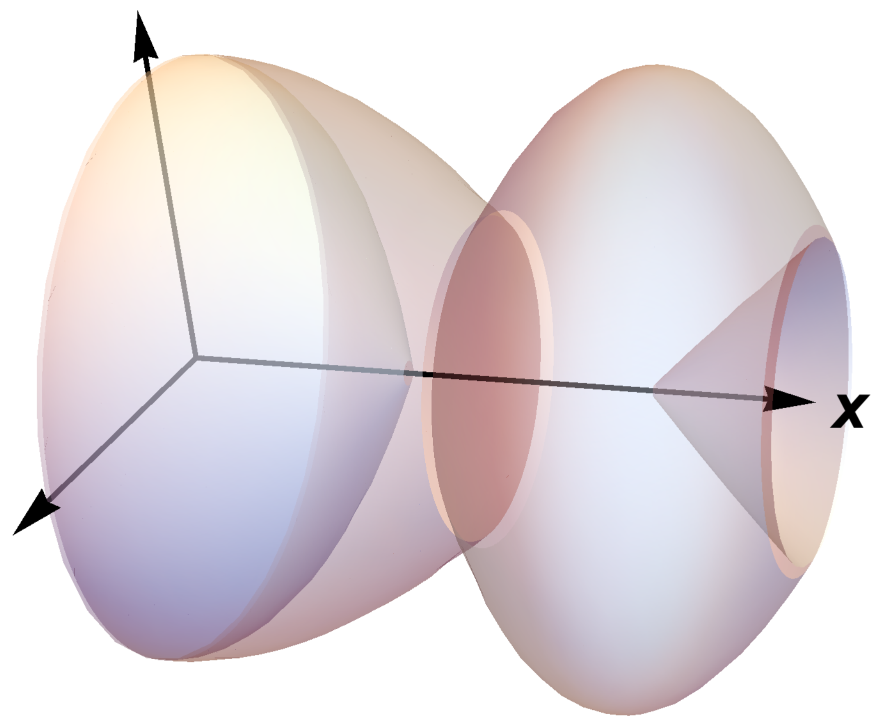
ギャラリー 1.1 凹凸のある回転体を見る。



上側関数回転による外側立体図形の体積から、下側関数回転による内側図形の体積をひくとよい。

最初に、外側立体の体積 V_1 を求める。

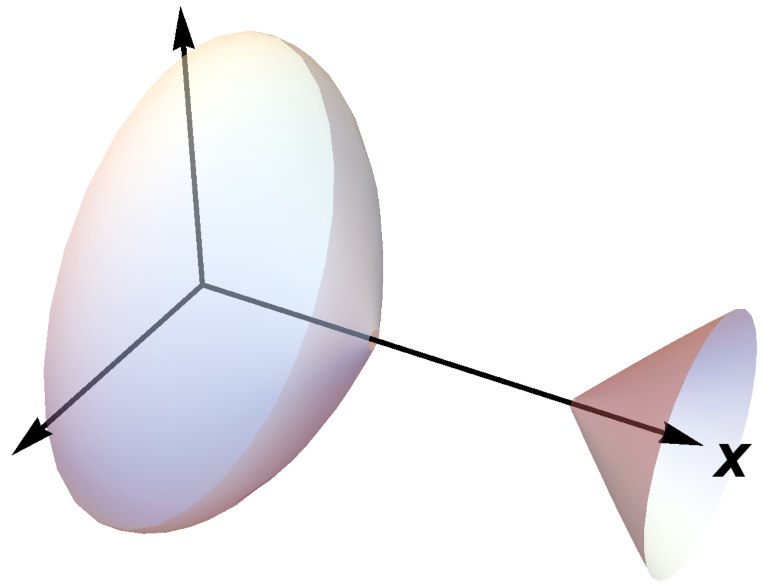
回転軸からの距離が最大となる回転体の体積 V_1とする。



$$V_1 = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cosx)^2 dx + \pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (-cos2x)^2 dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{pi}{3}} \left(1 + cos2x\right)dx + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(1 + cos4x\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{1}{4}sin4x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \cdot \cdot ①$$

次に、内側立体の体積を求める。つまり、回転軸からの距離が最小となる回転体の体積 V_2とする。



$$V_2 = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos2x)^2 dx + \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} (-cosx)^2 dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + cos4x)dx + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} (1 + cos2x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{1}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{1}{2}sin2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \cdot \cdot ②$$

外側の体積ー内側の体積（①ー②）

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi(\pi + 3\sqrt{3})}{8} \cdot \cdot \cdot \text{（答）}$$

回転してできる曲面

北海道大学　理系

a,bを正の実数とする。

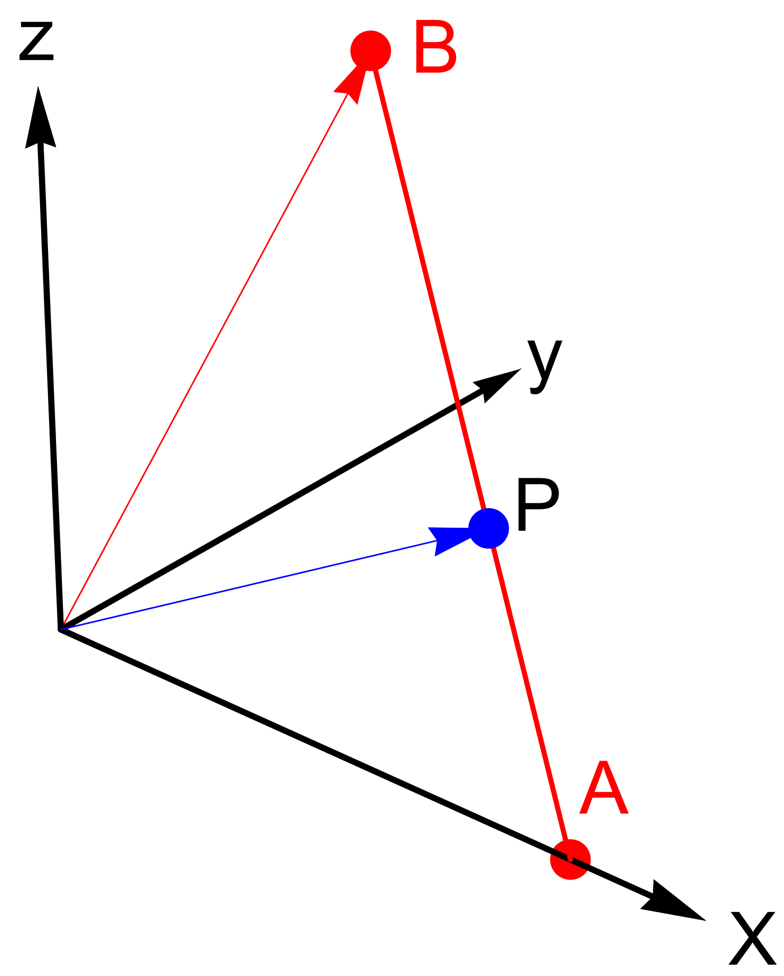
xyz空間内の２点 $A(a,0,0), B(0,b,1)$を通る直線を lとし、直線lを z 軸のまわりに一回転して得られる曲面をMとする。

1.$P(x,y,z)$を曲面M上の点とする。このとき x,y,zが満たす関係式を求めよ。

2. 曲面Mと２つの平面 $z=0$と $z=1$で囲まれた立体の体積を求めよ。

1.$a>0,b>0,A(a,0,0),B(0,b,1)$より、直線 lの方向ベクトルは、

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(0,b,1)-(a,0,0)=(-a,b,1)$$



l上の任意の点 $P(x,y,z)$とすると、左図より$\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}\quad(t\text{はパラメーター})$$

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{AB}$$

成分表示すると、

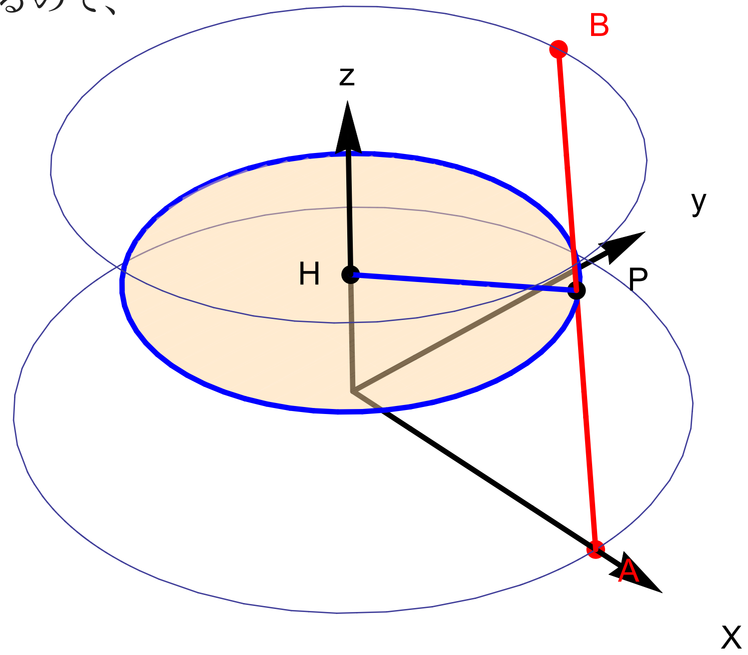
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a - at \\ y = tb \\ z = t \end{cases}$$

直線 l上の点$P(x, y, z)$からz軸へ垂線を引き、その交点をHとする。

$$H(0,0,t)$$

曲面Mを平面 $z = t$で切断したときの切断面は、点Hを中心とする半径HPの円となるので、



$$HP = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(a - at)^2 + (tb)^2}$$

$$x^2 + y^2 = (a - at)^2 + (tb)^2 = a^2 - 2a^2t + (a^2 + b^2)t^2 \qquad z = t$$

$$x^2 + y^2 = a^2 - 2a^2z + (a^2 + b^2)z^2 \cdot \cdot \cdot \quad (答)$$

2.平面 $z = t$による曲面Mの断面積を $S(t)$とすると、

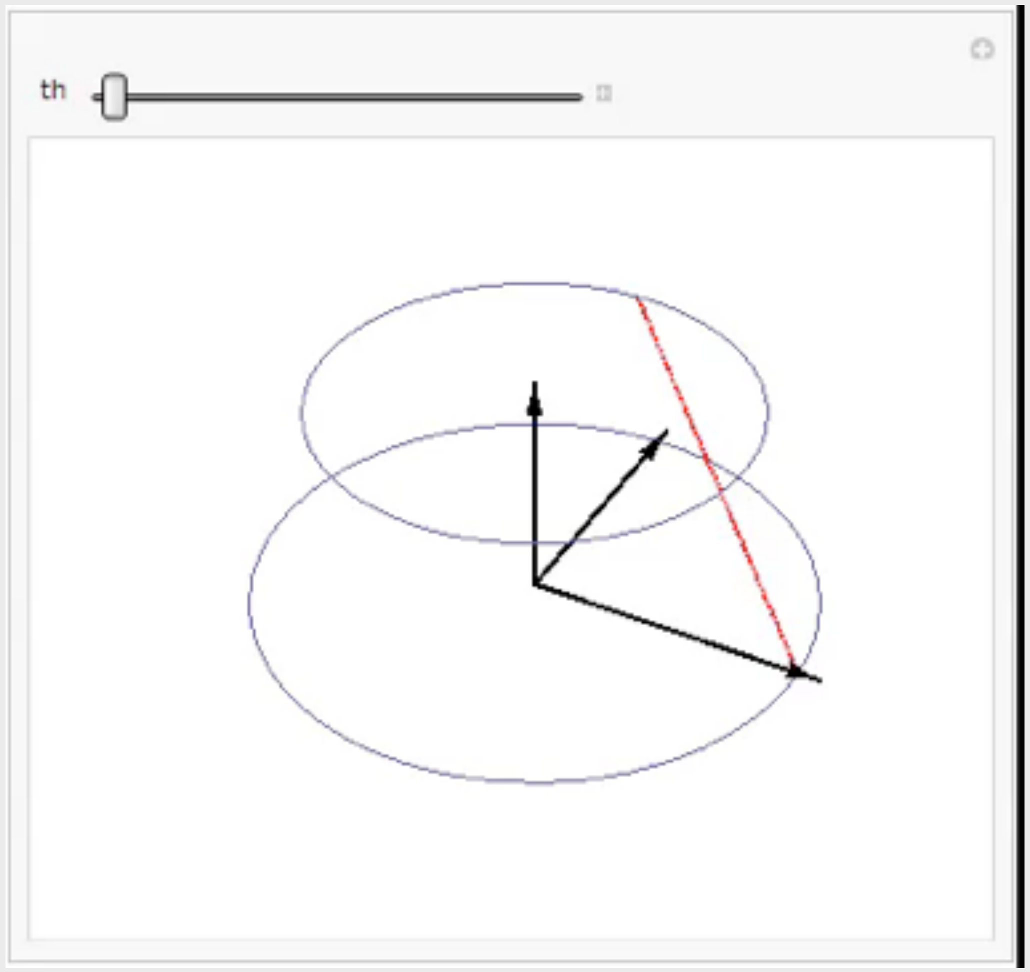
$$S(t) = \pi HP^2 = \pi\{a^2 - 2a^2t + (a^2 + b^2)t^2\}$$

求める体積Vとすると、 $0 \leqq z \leqq 1$ なので

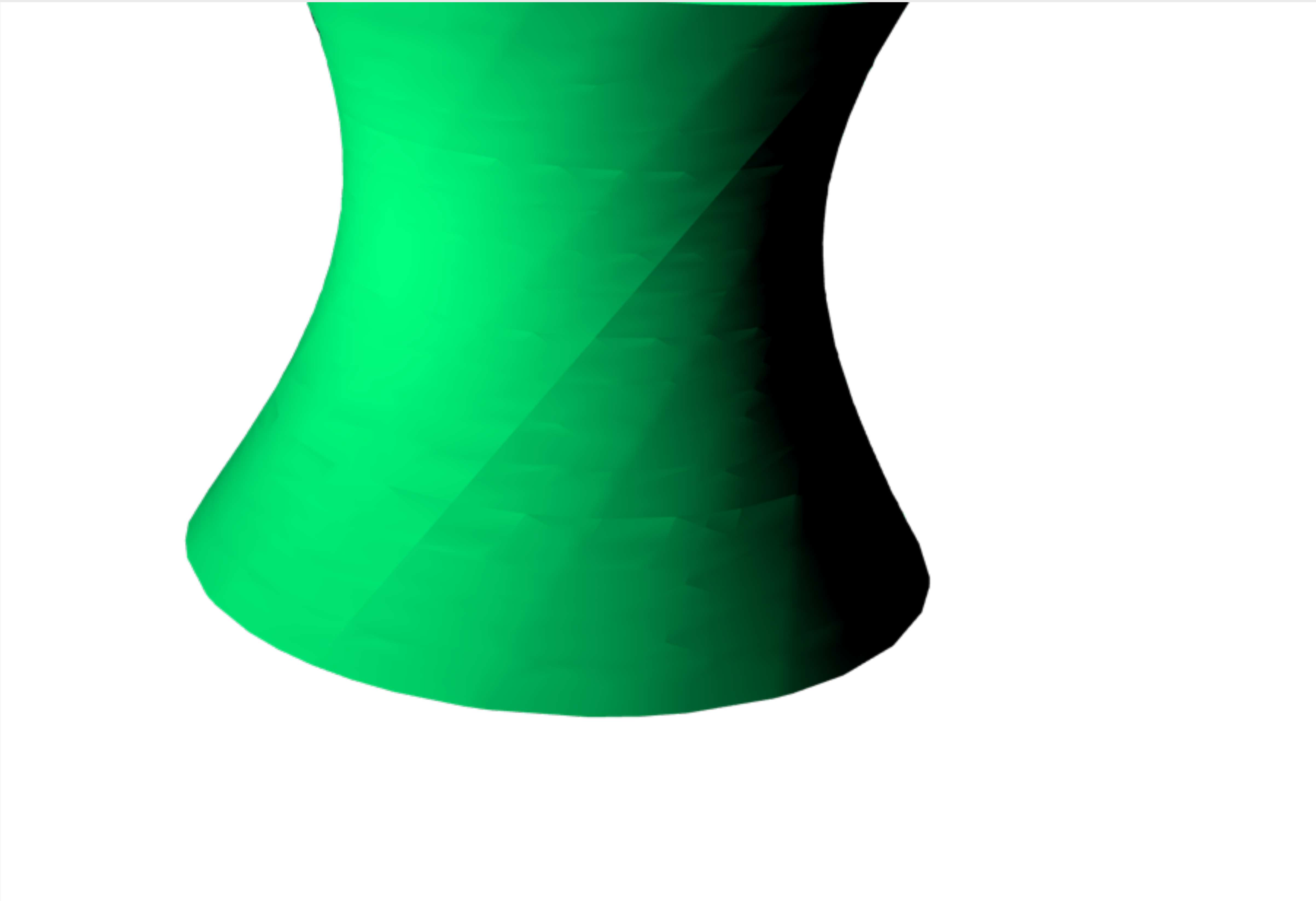
$$V = \int_0^1 S(t)dt = \pi \int_0^1 \{a^2 - 2a^2t + (a^2 + b^2)t^2\}dt$$

$$= \pi\left[a^2t - a^2t^2 + \frac{(a^2 + b^2)t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{3} \cdot \cdot \cdot \quad (答)$$

ムービー 1.2 線分を回転すると双曲面ができる。



インタラクティブ 1.1 回転双曲面



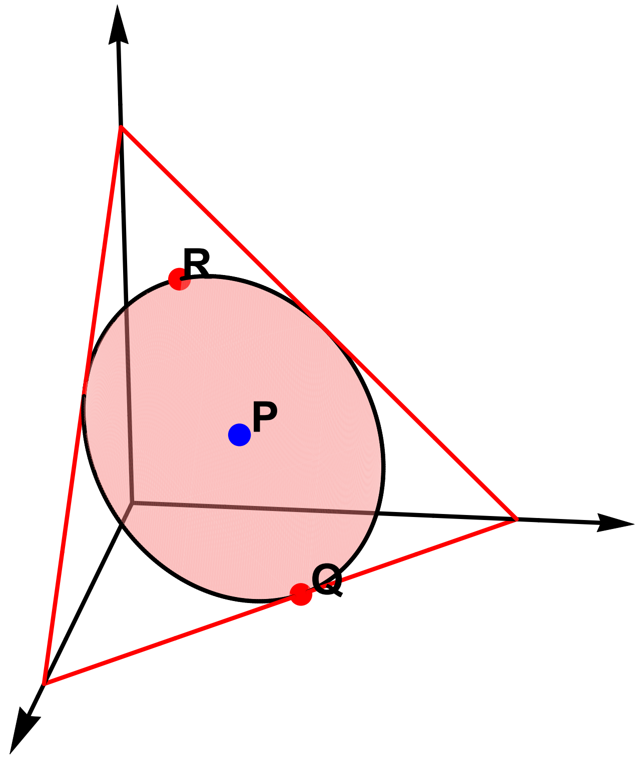
円板の回転体

筑波大学2013

xyz空間において、点 $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$を通る平面上にあり、正三角形ABCに内接する円板をDとする。円板Dの中心をP, 円板Dと辺ABの接点をQとする。

1. 点Pと点Qの座標を求めよ。
2. 円板Dが平面 $z=t$と共有点もつ tの範囲を求めよ。
3. 円板Dと平面 $z=t$の共通部分が線分であるとき、その線の長さを tを用いて表せ。
4. 円板Dをz軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ

1. 点Pは△ABCの重心、点Qは線分ABの中点なので

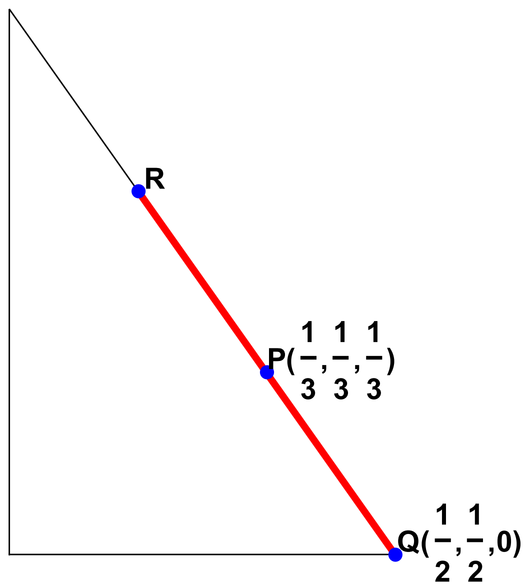


$$\therefore P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) \cdots \text{(答)}$$

2. 円板Dを平面 $y=x$で切断した図形で考える。

Pのz座標が $\frac{1}{3}$なので、この円板D上の点で、最もz座標が大きい点をRとすると、線分RQの中点がPである。$R(x,y,z)$とおくと、中点の公式より、

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{3}, \frac{y+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{3}, \frac{z+0}{2}=\frac{1}{3}$$



$$R\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$$

円板Dが平面 $z=t$ と共有点を持つためには、z成分を比較する。

$$\therefore 0 \leqq t \leqq \frac{2}{3} \cdot\cdot\cdot \text{（答）}$$

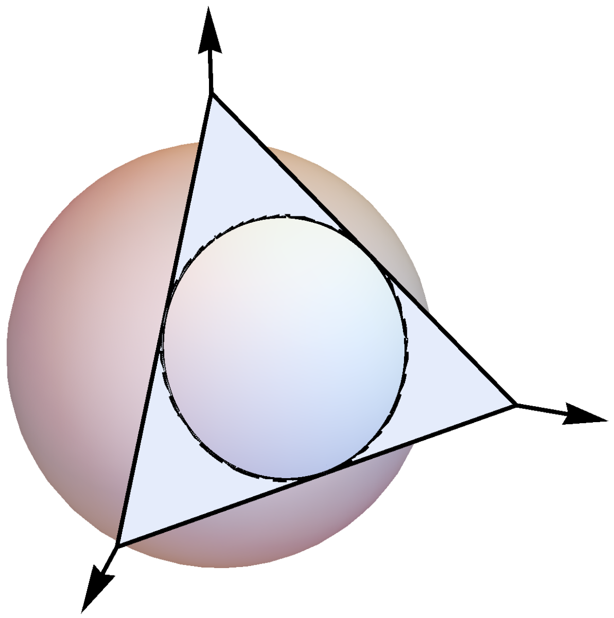
3. 球面の方程式、平面の方程式を活用する。

円板Dの半径 $PQ=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{6}}$

円板Dは、「点Pを中心、半径 $\sqrt{\frac{1}{6}}$ の球の内部」　かつ

「平面ABC; $x+y+z=1$ 上」を満たす点の集合である。

テキストを入力してくださ
い



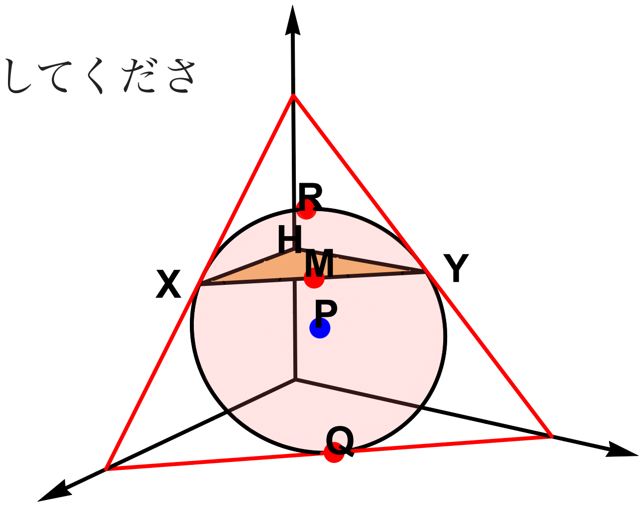
球の方程式； $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2 \leqq \frac{1}{6}$ を展開すると、

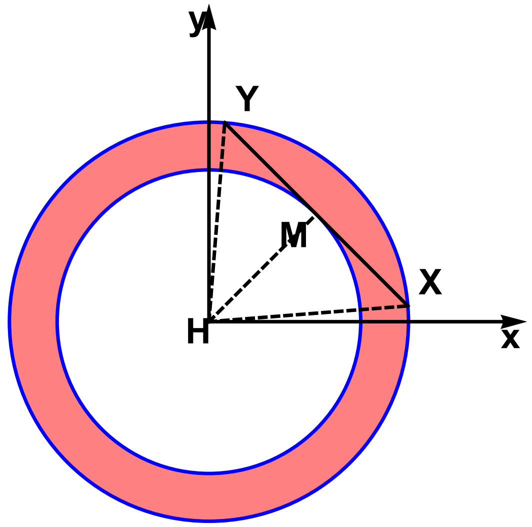
$x^2+y^2+z^2-\frac{2}{3}(x+y+z)+\frac{1}{3} \leqq \frac{1}{6}$ ，$x+y+z=1$ を代入する。

円板Dの表示法； $x+y+z=1, x^2+y^2+z^2 \leqq \frac{1}{2}$

この立体を、平面 $z=t$ で切断すると、 $x+y=1-t, x^2+y^2 \leqq \frac{1}{2}-t^2$

直線と円板の交点の両端をX,Yとし、線分XYの中点をMとする





$$HX^2=\frac{1}{2}-t^2$$

点 $H(0,0,t)$ と直線 $x+y=1-t$ との距離公式より、

$$HM=\frac{|1-t|}{\sqrt{2}}, 0 \leqq t \leqq \frac{2}{3}$$

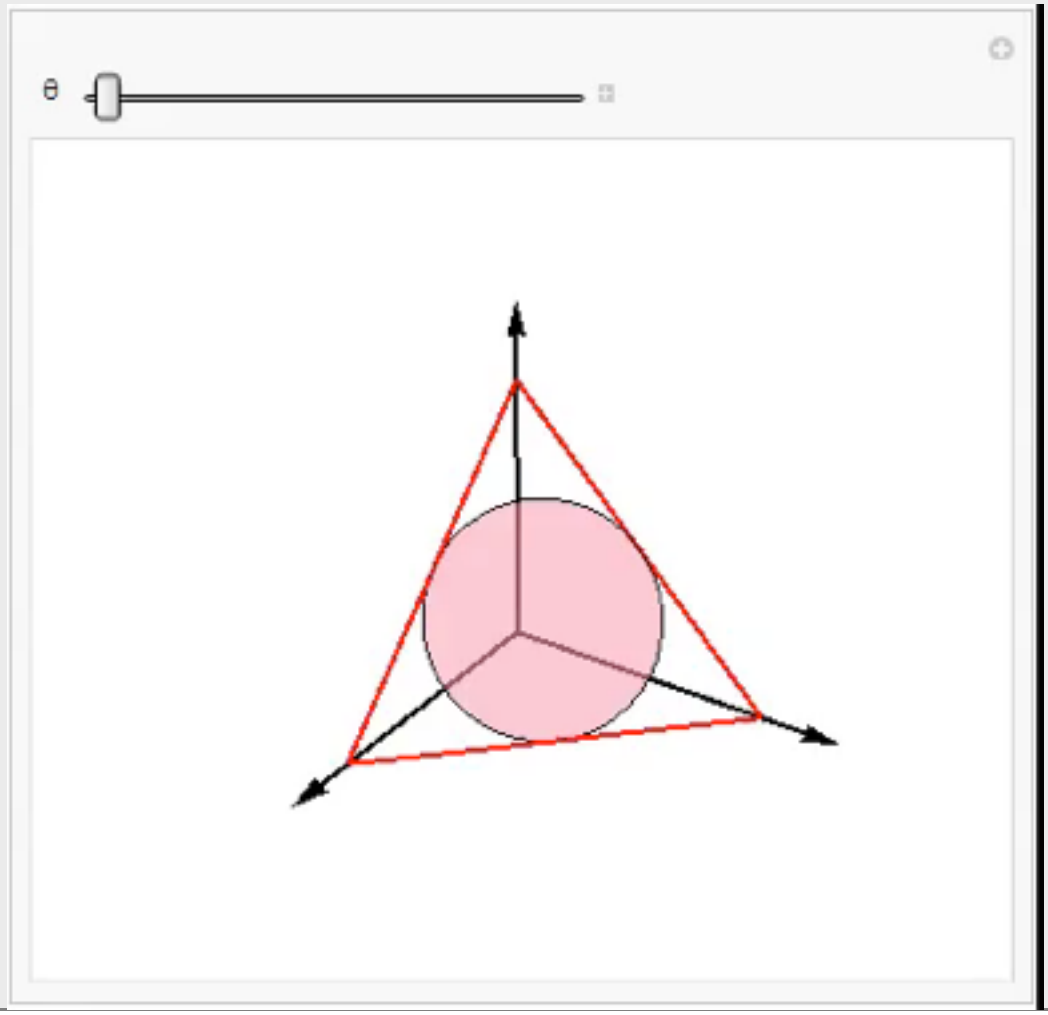
$HX^2 = HM^2 + MX^2$より、$MX^2 = HX^2 - HM^2 = \frac{1}{2} - t^2 - \frac{(1-t)^2}{2}$

$$\therefore MX = \sqrt{t - \frac{3}{2}t^2}$$

よって、求める線分の長さは、$2\sqrt{t - \frac{3}{2}t^2}$・・・（答）

4. 円板Dを、z軸のまわりに回転すると、どのような図形になる？

ムービー 1.3 円盤をz軸の周りに回転する。



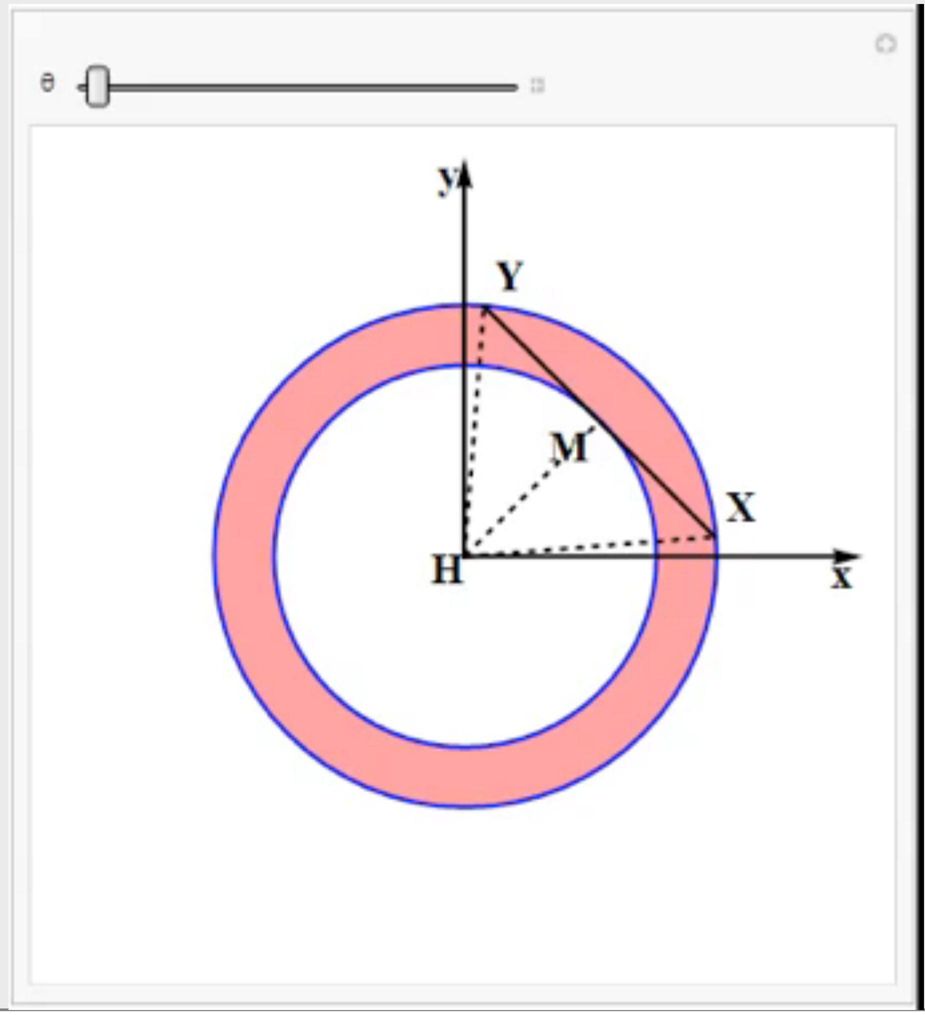
円板Dをz軸のまわりに回転してできる立体を、平面$z = t$で切断してできる断面積をSとおくと、断面は線分XYの通過領域になるので、ドーナッツ形になる。

ドーナッツの面積を求めよう。

$$S = \pi(HX^2 - HM^2) = \pi\left(\frac{1}{2} - t^2 - \frac{(1-t)^2}{2}\right) = \pi\left(t - \frac{3}{2}t^2\right)$$

断面積を積分すると、体積が求めることができるから、求める体積をVとおくと、この断面積を積分すると、体積が求められるので、

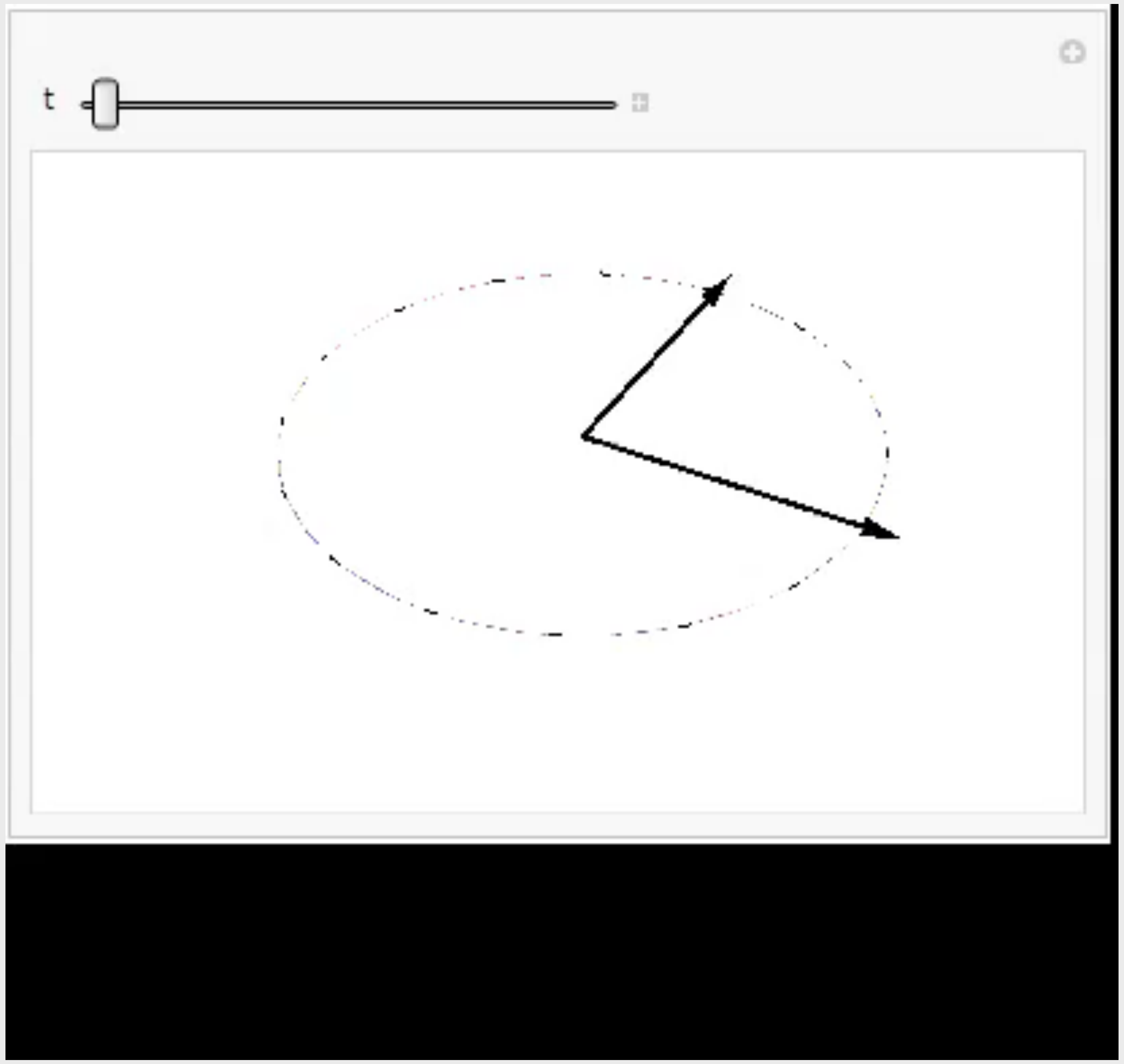
ムービー 1.4 断面を積分する。



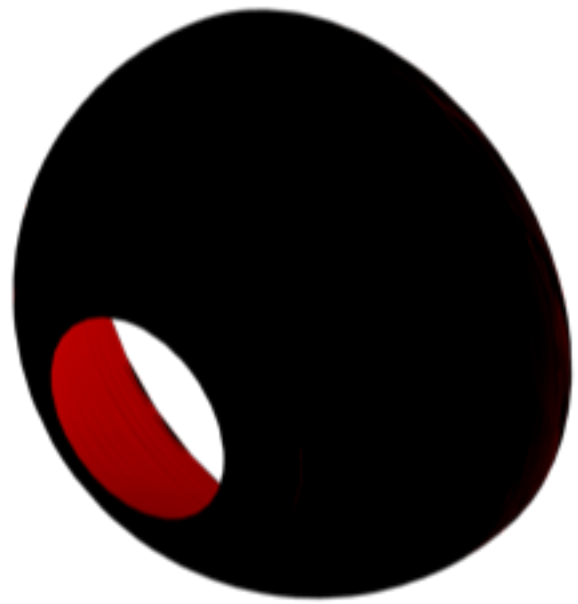
・・・（答）

求める立体は、下のような図形となる。

ムービー 1.5 立体の完成



インタラクティブ 1.2 穴のあいたお椀に触れてみよう。



任意軸の回転体

東京工業大学

xyz空間の原点と点 (1,1,1)を通る直線を lとする。

1. l上の点 $\left(\frac{t}{3},\frac{t}{3},\frac{t}{3}\right)$を通り lと垂直な平面が、xy平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

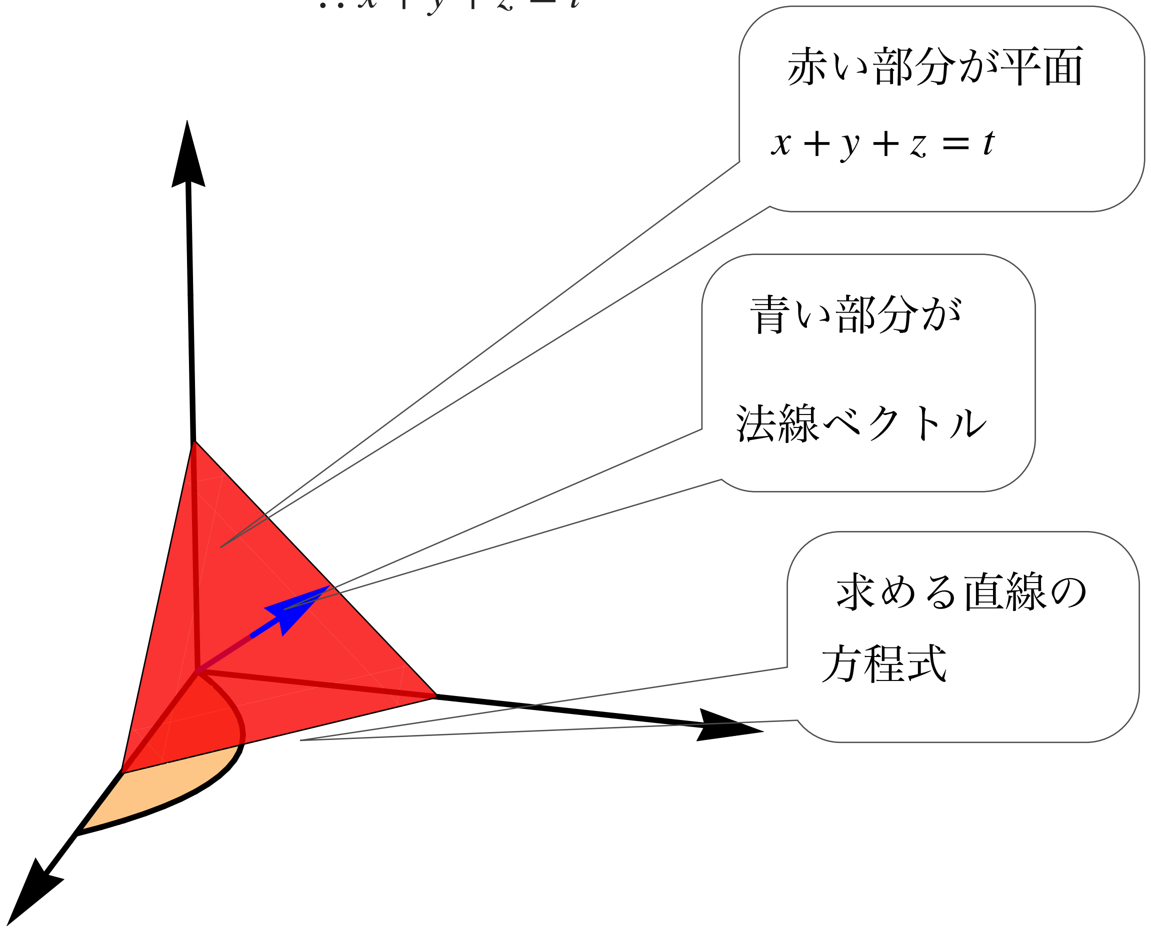
2. 不等式 $0 \leqq y \leqq x(1-x)$ の表す xy平面内の領域をDとる。 lを軸としてDを回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

1. $\overrightarrow{OT} = \left(\frac{t}{3},\frac{t}{3},\frac{t}{3}\right), \vec{\alpha} = (1,1,1)$とする。

点 $T\left(\frac{t}{3},\frac{t}{3},\frac{t}{3}\right)$を通り、$\vec{\alpha}$を法線ベクトルとする平面の方程式

は、$\left(x-\frac{t}{3}\right)+\left(y-\frac{t}{3}\right)+\left(z-\frac{t}{3}\right)=0$

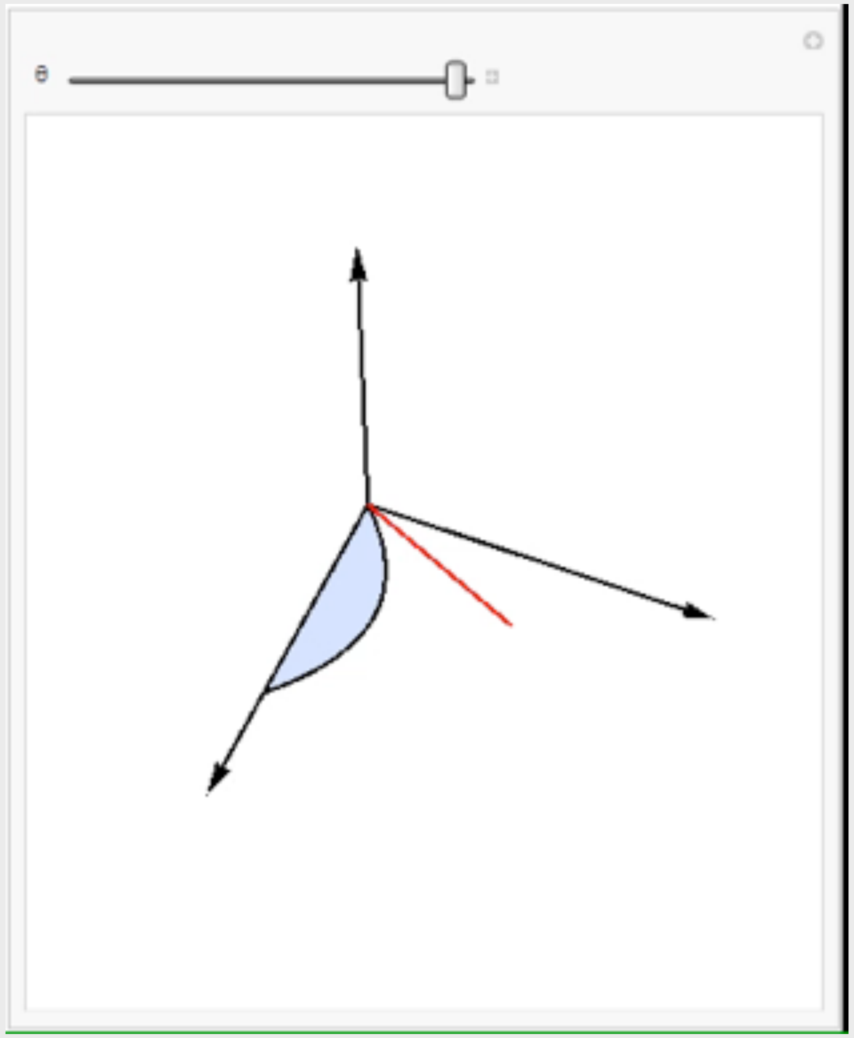
$$\therefore x+y+z=t$$



xy平面; との交線は、 $\therefore x+y=t, z=0$・・・（答）

2.

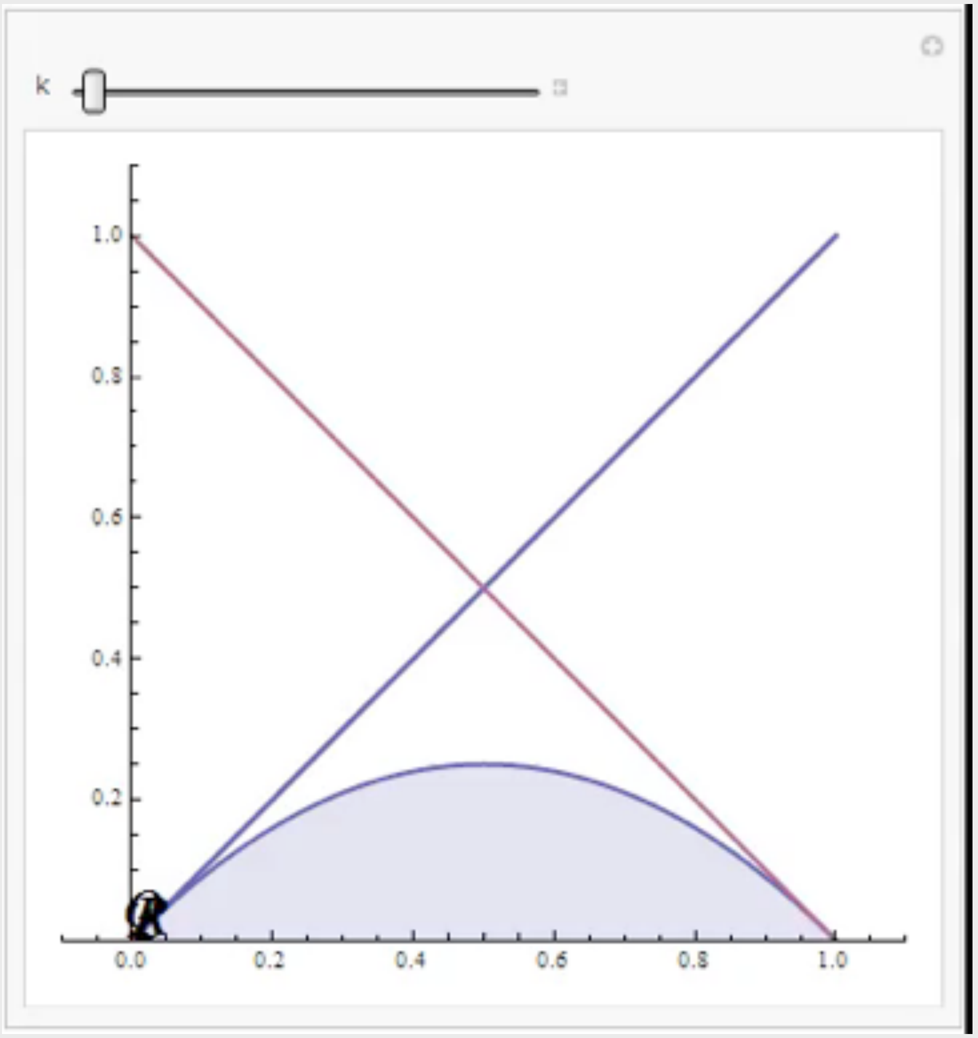
ムービー 1.6 領域Dを回転する。



xy平面において、交線 $y=-x+t$ は、傾き-1,y切片 tの直線である。xy平面上において、 領域D;$0 \leqq y \leqq x(1-x)$と 交線 $y=-x+t$が 共通部分を持つための y切片 tの範囲を求める。$y=x(1-x)$ 上の点 (1,0)における接線は、 $y=x-x^2$ より、 $y'=1-2x$ 接線の傾きは、

$$\left[1-2x\right]_{x=1}=-1$$

ムービー 1.7　$y=-x+t$の動き

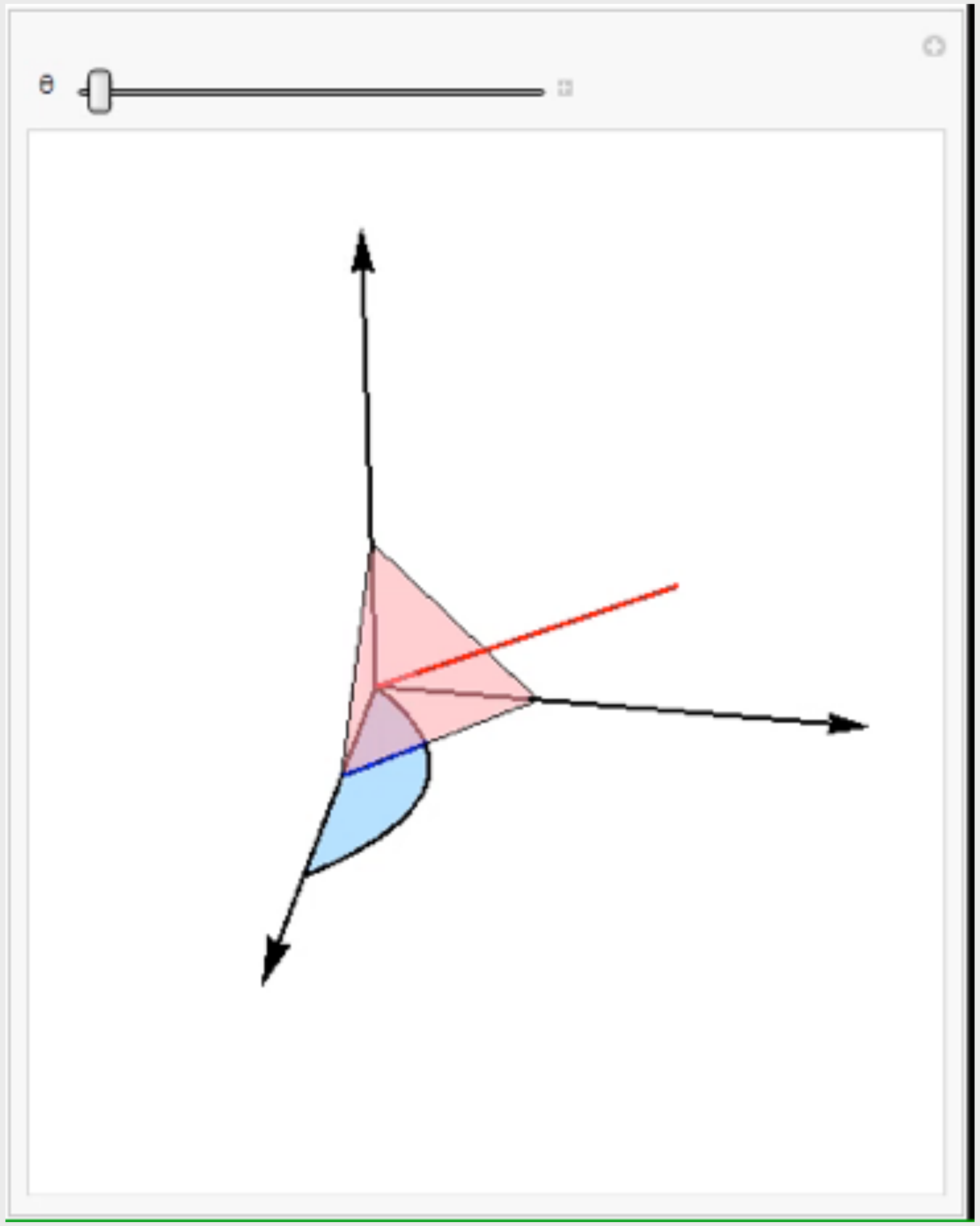


$y=-(x-1)+0$, $\therefore y=-x+1$　左図より、y切片の取り得る範囲は、

$$0 \leqq t \leqq 1$$

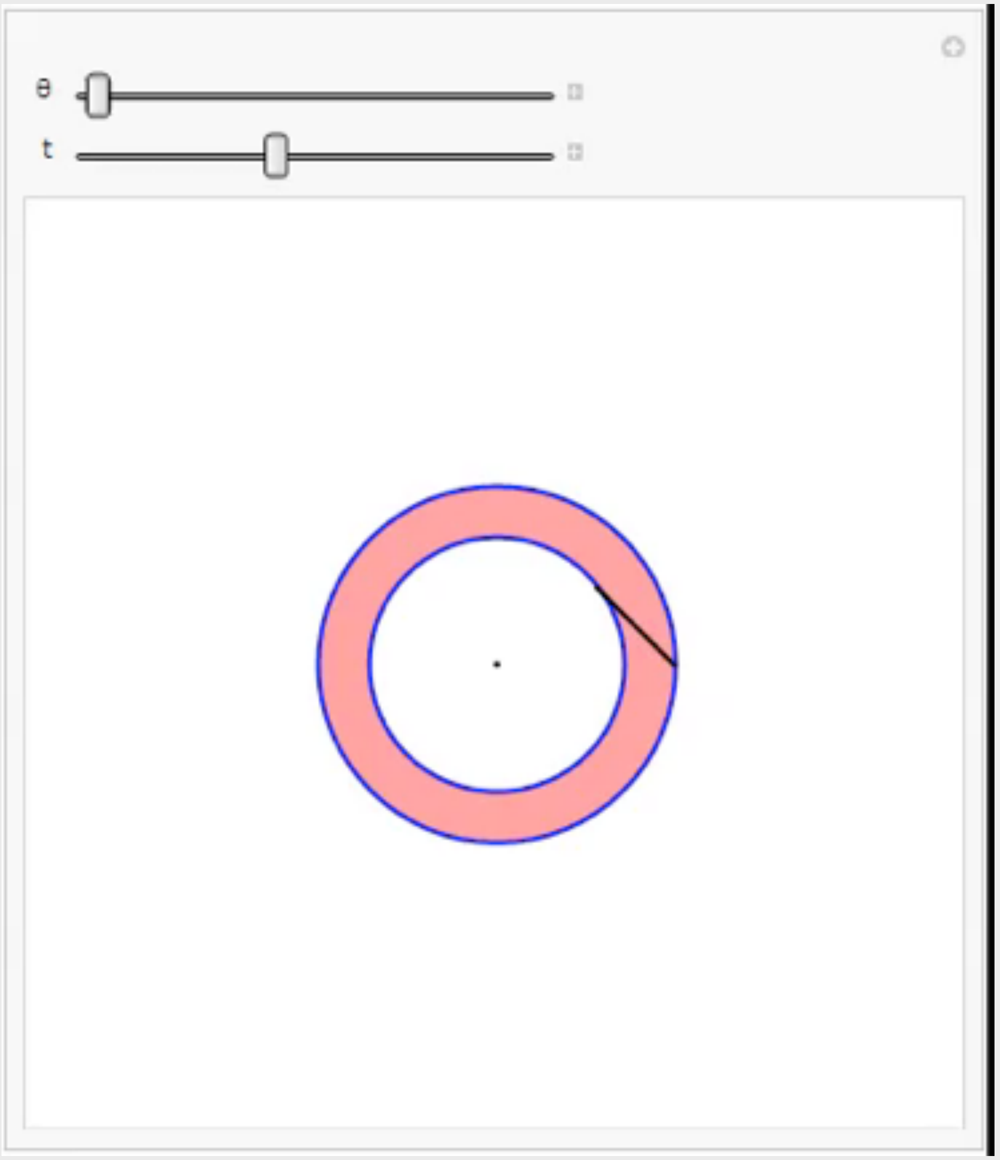
領域Dと交線 $x+y=t, z=0$ の境界点をQ,Rとする。線分QRを直線 l を回転軸として回転してできるドーナッツの面積が、回転体を平面 $x+y+z=t$ で切断した断面であることがわかる。

ムービー 1.8 断面はドーナッツ



このドーナッツの面積　$S=\pi(TQ^2-TR^2)$　を回転軸に沿って積分すると、回転体の体積を求めることができる。

ムービー 1.9 線分の回転はドーナッツを作る



$$\overrightarrow{OT} = \left(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}\right) \quad \text{より} \ u = |\overrightarrow{OT}| = \sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2} = \frac{t}{\sqrt{3}}$$

とおくと、$t;0 \longmapsto 1$ のとき $u;0 \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ なので、$V = \pi\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} Sdu$$Q, R$の座標を求める。点$Q$は 交線 $y = -x + t$と x軸 $y = 0$との交点なので、

$$\therefore Q(t,0,0)$$

点 Rは、交線 $y = -x + t$と2次関数$y = x(1-x)$ の２交点の x座標の小さい方なので、 $\therefore R(1-\sqrt{1-t}, t-1+\sqrt{1-t}, 0)$

$$TQ^2 = \left(\frac{t}{3} - t\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2$$

$$TR^2 = \left(\frac{t}{3} - 1 + \sqrt{1-t}\right)^2 + \left(\frac{t}{3} - t + 1 - \sqrt{1-t}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2$$

$$TQ^2 - TR^2 = 2(2-t)\sqrt{1-t} - 4(1-t)$$

$$u = \frac{t}{\sqrt{3}} \ \text{より、} \ du = \frac{1}{\sqrt{3}}dt$$

$$V = \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} Sdu = \pi\int_0^1 \left(2(2-t)\sqrt{1-t} - 4(1-t)\right)\frac{dt}{\sqrt{3}}$$

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1 \left(2(2-t)\sqrt{1-t} - 4(1-t)\right)dt$$

置換積分を行う。

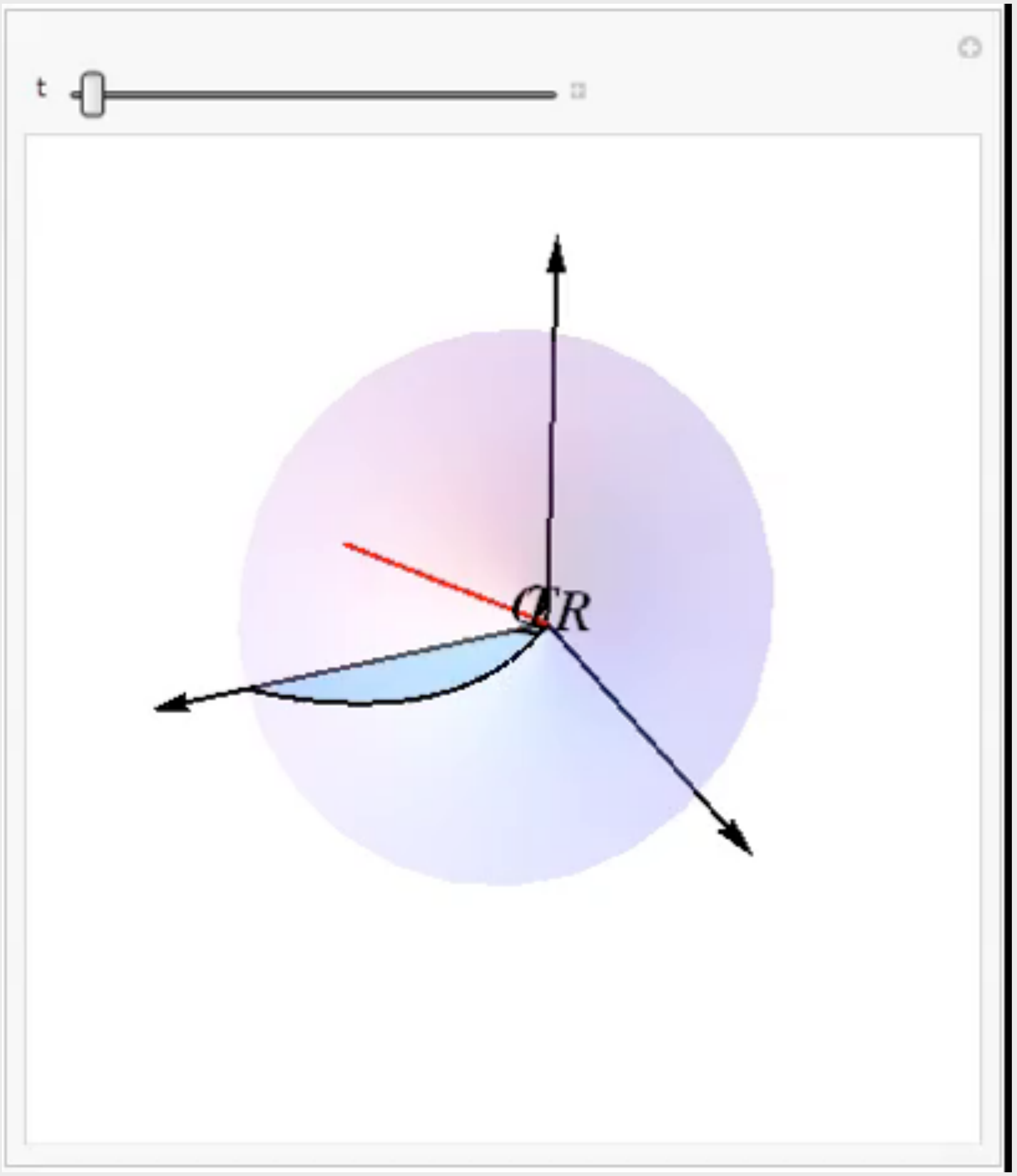
$v = \sqrt{1-t}$ とおく。

$t;0 \longmapsto 1$ のとき $v;0 \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{3}}v^2 = 1 - t$ より、 $t = 1 - v^2 \quad \therefore dt = -2vdv$

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1 \left(2(1+v^2)v - 4v^2\right)2vdvV = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1 4v^2(v-1)^2dv$$

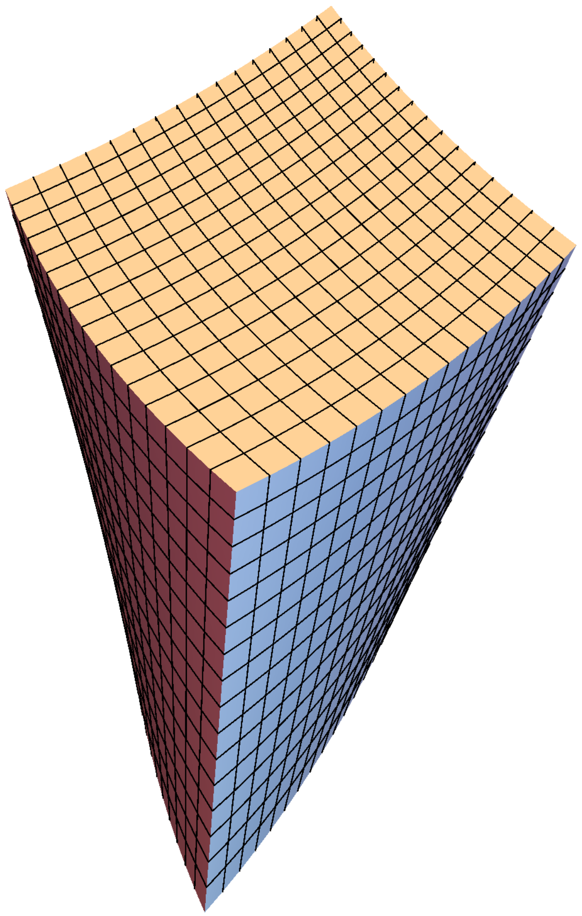
$$V = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \times \frac{(-1)^2 2!2!}{5!} = \frac{2\pi}{15\sqrt{3}} \cdots \text{（答）}$$

ムービー 1.10 ドーナッツを積分すると体積になる



チャプタ 2

非回転体の体積



立体構造不明

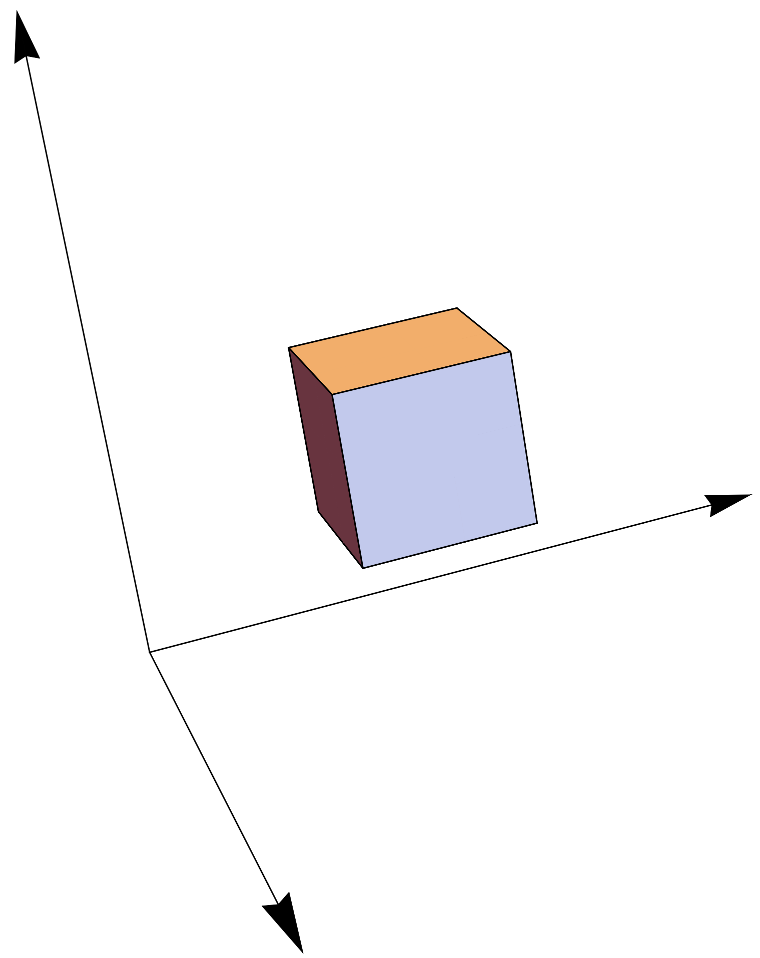
東京大学2000年

$x = \dfrac{ab}{a+c}, y = a+c, z = \dfrac{ab}{a+c}$

1. a, b, c が　$1 \leqq a \leqq 2, 1 \leqq b \leqq 2, 1 \leqq c \leqq 2$ の範囲で動くとき $P(x, y, z)$が描く立体をKとする。立体Kを平面 $y = t$で切った切り口の面積を求めよ。

2. この立体Kの体積を求めよ。

1.



$1 \leqq a \leqq 2, 1 \leqq b \leqq 2, 1 \leqq c \leqq 2$を満たす立体は、立方体である。

変換　$(a, b, c) \Longrightarrow (x, y, z)$　　$x = \dfrac{ab}{a+c}, y = a+c, z = \dfrac{ab}{a+c}$

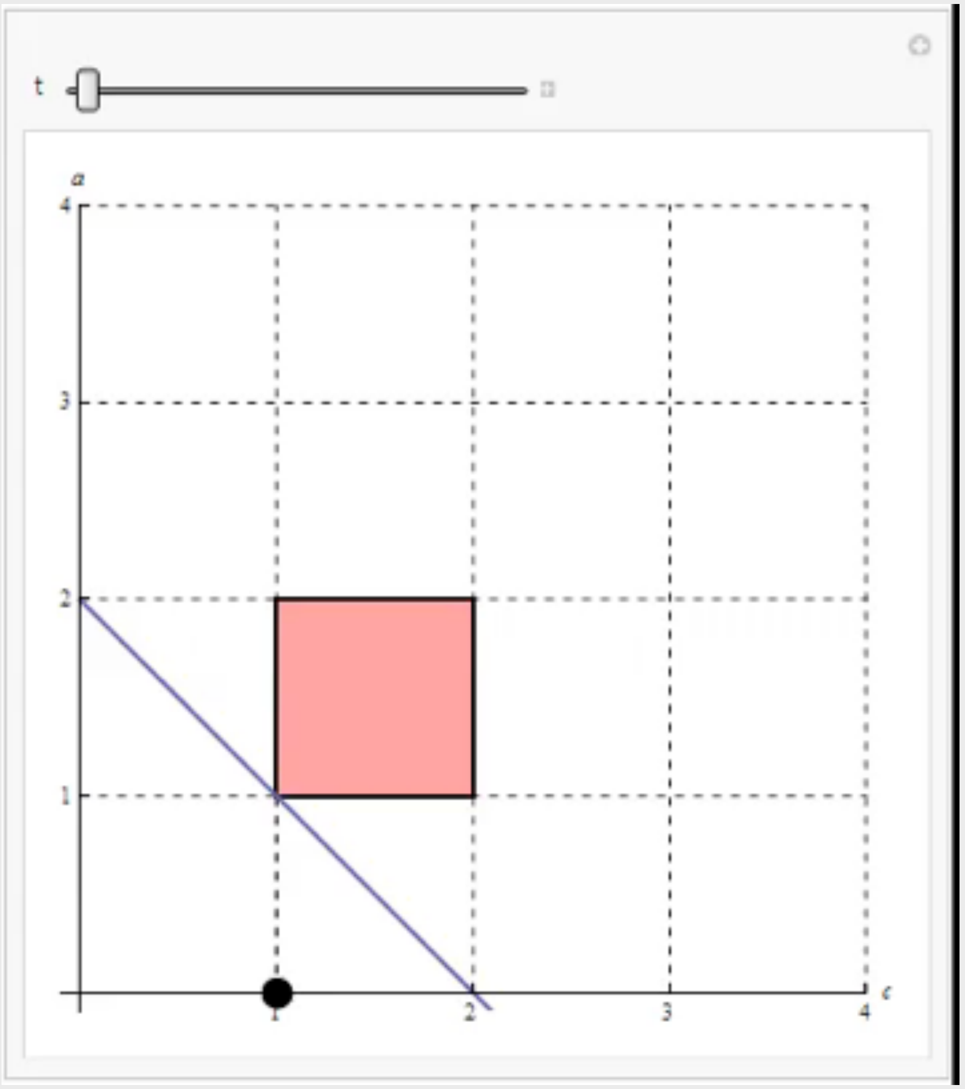
によって、どのような立体に変身するのだろうか？

$x = \dfrac{ab}{a+c}, y = a+c, z = \dfrac{ab}{a+c}$　に共通に含まれる $a + c = t$とおく。

$t = a + c$ $(1 \leqq a \leqq 2, 1 \leqq c \leqq 2)$ より t のとり得る値の範囲を求める。

縦軸 a,横軸 bの座標平面上において、$a = -c + t$は、傾き -1 ,縦軸切片 tの直線を表す。

ムービー 2.1 $a = -c + t$ の動き方Type1



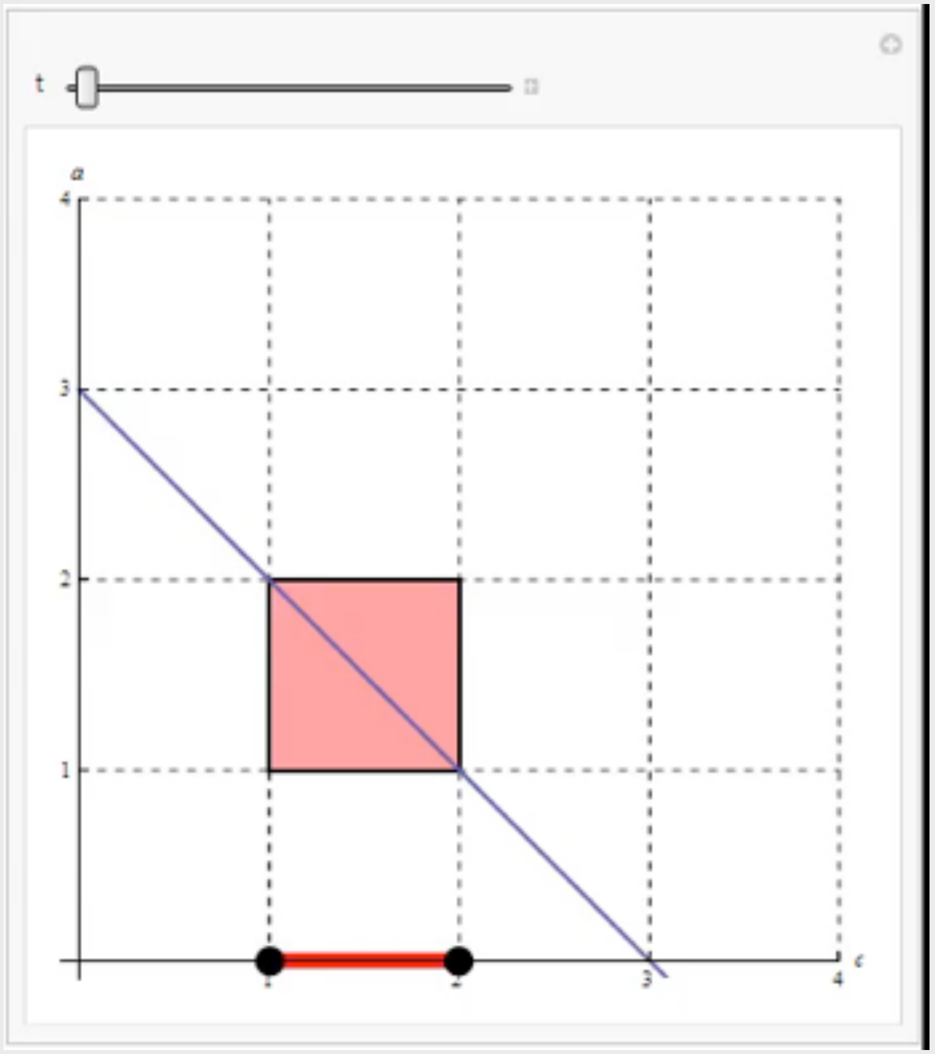
Step1 cの範囲を求める。

[Type1]; $2 \leqq t \leqq 3$ のとき（縦軸切片の範囲）

上図より、 c のとり得る範囲（横軸赤い実線）は、 $1 \leqq c \leqq t - 1$

[Type2]; $3 \leqq t \leqq 4$ のとき（縦軸切片の範囲）

ムービー 2.2 $a = -c + t$ の動き方Type2

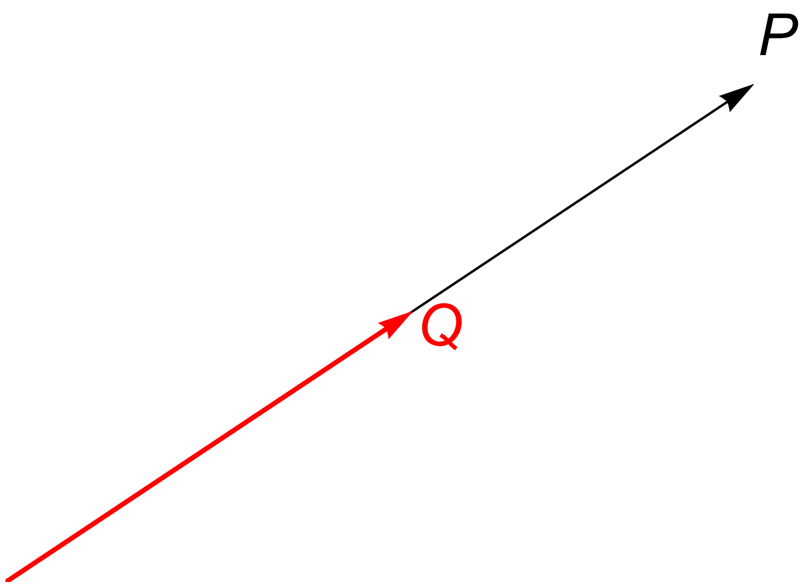


上図より、 c のとり得る範囲（横軸赤い実線）は、

$$t - 2 \leqq c \leqq 2$$

Step 2　(x, z)の通過領域を求める。

$x=\dfrac{ab}{a+c}, z=\dfrac{ab}{a+c}, t=a+c$ と置いたので、このとき点 (x,z)の存在範囲を求める。$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}$とおく。



$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}=\frac{b}{a+c}\begin{pmatrix}c\\a\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}\frac{c}{t}\\\frac{a}{t}\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}\frac{c}{t}\\\frac{t-c}{t}\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}\frac{c}{t}\\\frac{t-c}{t}\end{pmatrix}$ とおくと, $\overrightarrow{OP}=b\overrightarrow{OQ}, 1\leqq b\leqq 2$

点 Pは、線分 OQを b倍した点である。$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}\frac{c}{t}\\\frac{t-c}{t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\z'\end{pmatrix}$ とおく。

点 $Q(x',z')$の存在範囲を求める。

$$x'+z'=\frac{c}{t}+\frac{t-c}{t}=1$$

点 $Q(x',z')$、 $xz-$平面において、直線 $x+z=1$上に存在する。

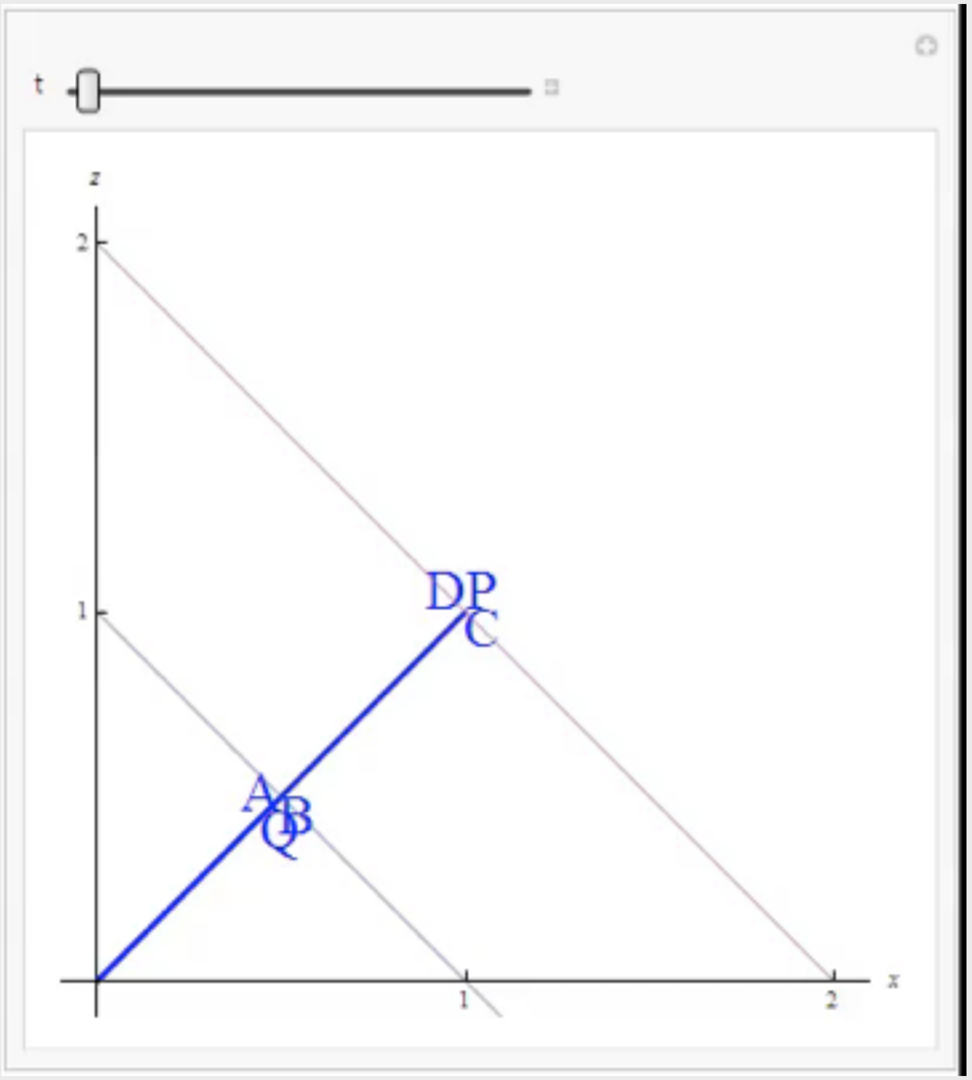
[Type1];$2\leqq t\leqq 3$ のとき、$1\leqq c\leqq t-1$　なので、

$1\leqq c\leqq t-1$の両辺を tで割ると、　$\dfrac{1}{t}\leqq\dfrac{c}{t}\leqq 1-\dfrac{1}{t}$

$$\frac{1}{t}\leqq x'\leqq 1-\frac{1}{t}$$

線分 QPの通過領域は、次のような図になる。

ムービー 2.3 QPの通過領域（ピンク部分）



$$A\left(\frac{1}{t},1-\frac{1}{t}\right),B\left(1-\frac{1}{t},\frac{1}{t}\right),C\left(2-\frac{2}{t},\frac{2}{t}\right),D\left(\frac{2}{t},2-\frac{2}{t}\right)$$

△ OABの面積を S_1とすると、

$$S_1=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{t^2}-\left(1-\frac{1}{t}\right)^2\right|=\frac{t-2}{2t}$$

△ OCDの面積を S_2とすると、

$$S_2=4S_1=\frac{2(t-2)}{t}$$

台形 $ABCD$の面積を Sとすると、

$$S=S_1-S_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{t}\right)$$

[Type2];$3 \leqq t \leqq 4$ のとき、$t-2 \leqq c \leqq 2$の両辺を tで割ると、

$$1-\frac{1}{t} \leqq x' \leqq \frac{2}{t}$$

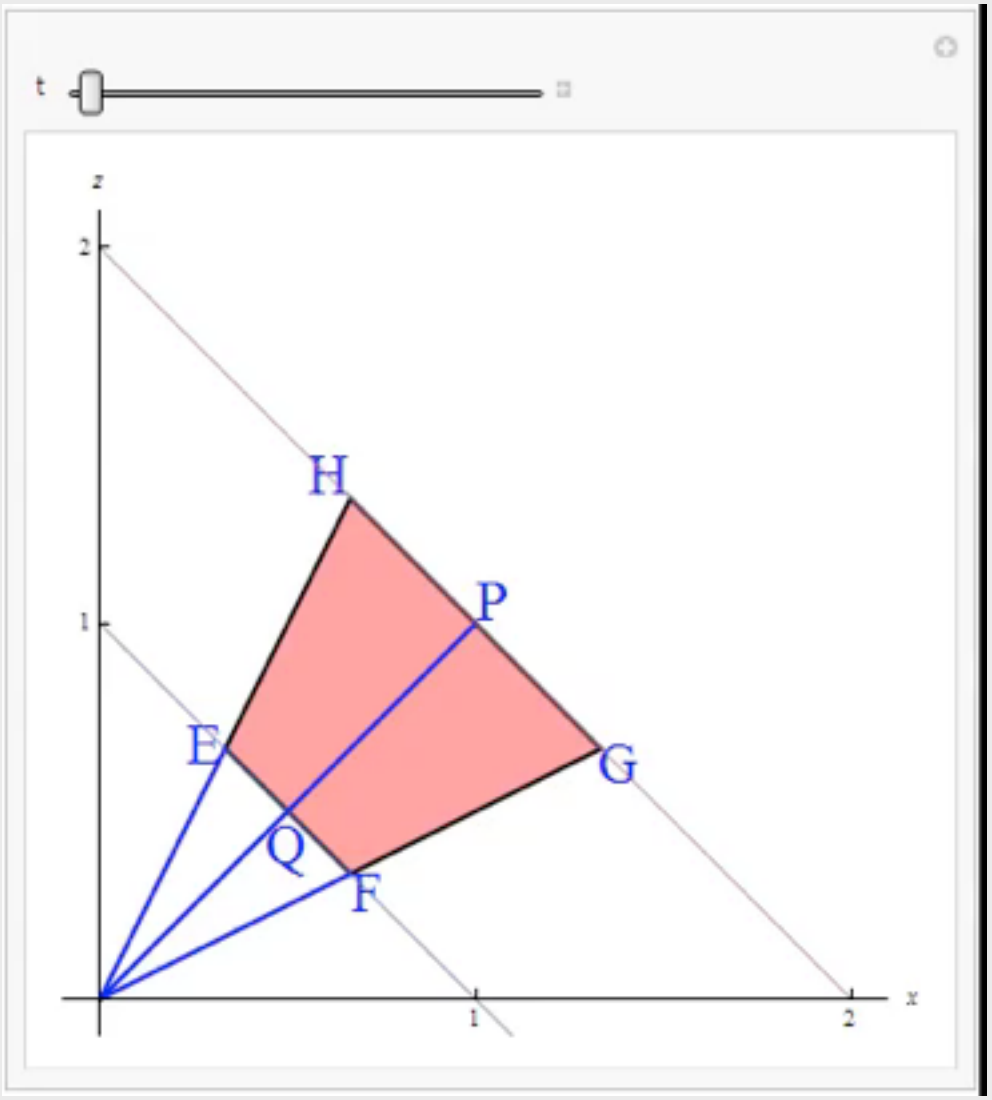
$$E\left(1-\frac{2}{t},\frac{2}{t}\right),F\left(\frac{2}{t},1-\frac{2}{t}\right),G\left(\frac{4}{t},2-\frac{4}{t}\right),H\left(2-\frac{4}{t},\frac{4}{t}\right)$$

△ OEFの面積を T_1とすると、

$$T_1=\frac{1}{2}\left|\left(1-\frac{2}{t}\right)^2-\frac{4}{t^2}\right|=\frac{4-t}{2t}$$

△ OGHの面積を T_2とすると、

ムービー 2.4 QPの通過領域（ピンク部分）



$$T_2=4T_1=\frac{2(4-t)}{t}$$

台形 $EQGH$の面積を Tとすると、

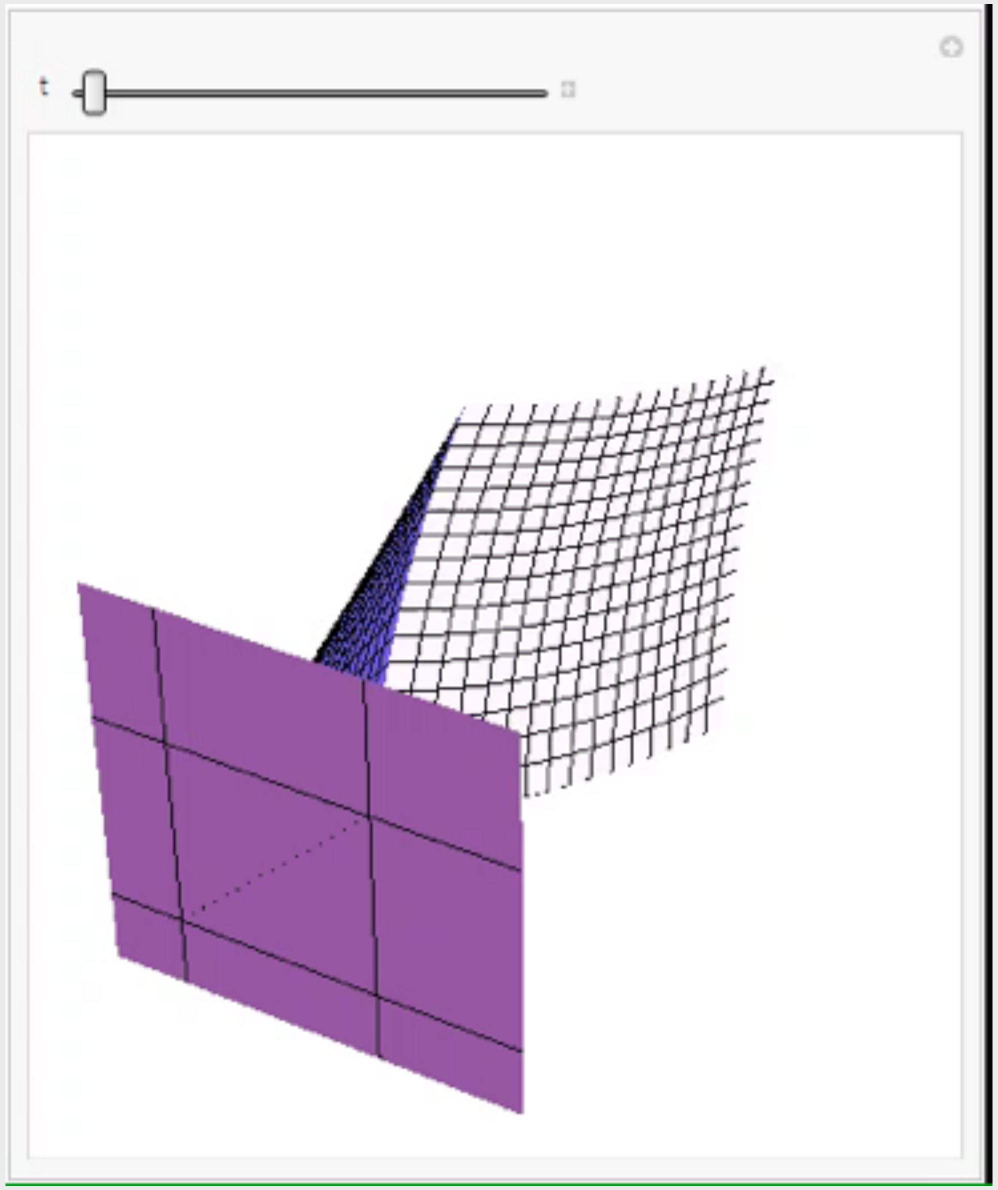
$$T=T_2-T_1=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{t}-1\right)$$

2. 求める立体の体積を Vとすると、

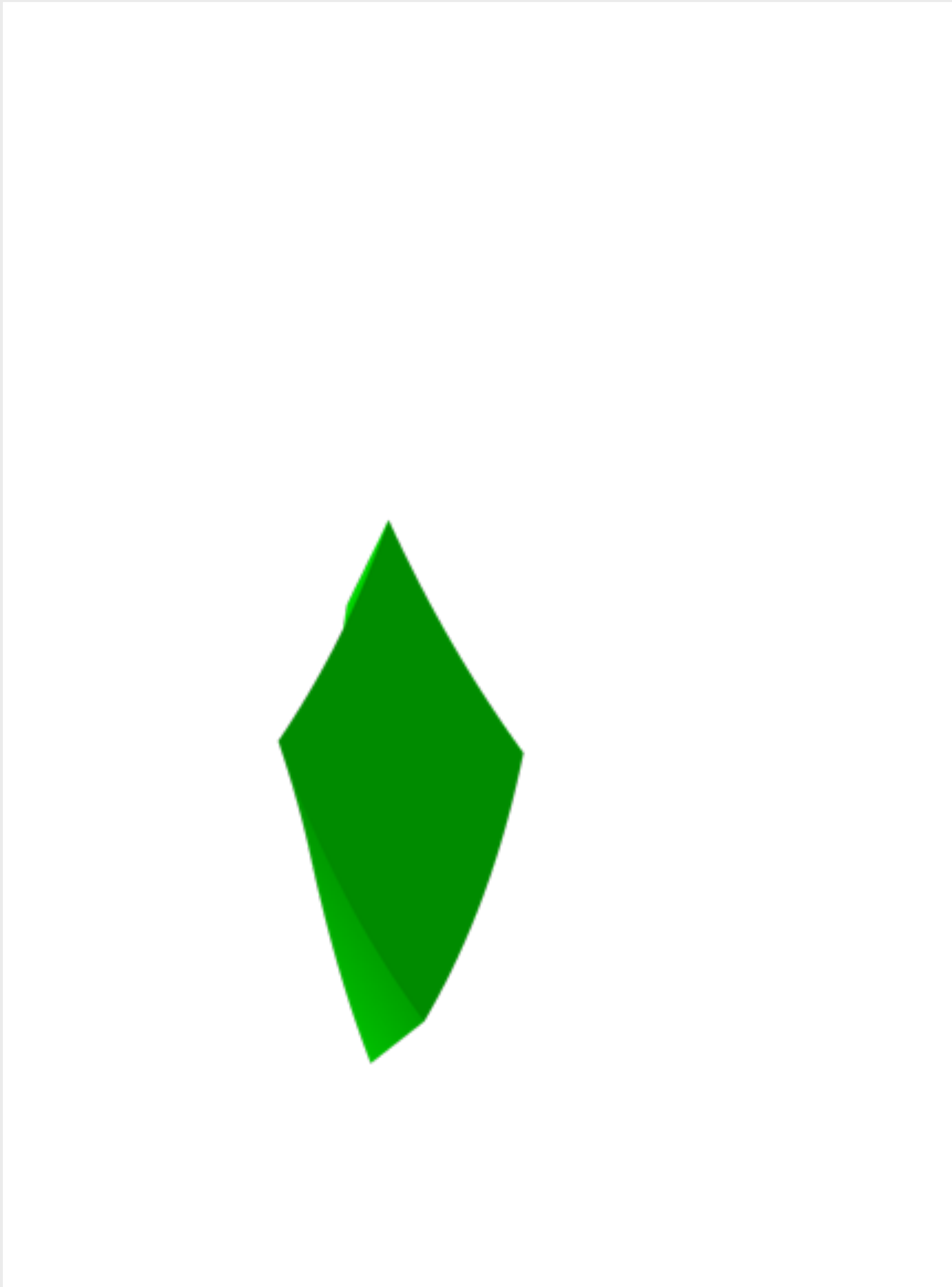
$$V=\int_2^3 \frac{3}{2}\left(1-\frac{2}{t}\right)dt+\int_3^4 \frac{3}{2}\left(\frac{4}{t}-1\right)dt=15\log 2-9\log 3$$

・・・（答）

ムービー 2.5 断面を貼り付けた図形



インタラクティブ 2.1 変換後の立体図形



3 変数関数の体積

北海道大学 2007

xyz空間において、

連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq z \leqq 1$

$x^2+y^2+z^2-2xy-1 \geqq 0$　の表す立体を考える。

1. この立体を平面 $z=t$で切ったときの断面を xy平面に図示し、この断面の面積 $S(t)$を求めよ。
2. この立体の体積を求めよ

1. $z=t$ を$x^2+y^2+z^2-2xy-1 \geqq 0$へ代入する

$$x^2+y^2+t^2-2xy-1 \geqq 0 \cdot\cdot\cdot ①$$

xy平面上に、この①の領域を作図する。

$$(x-y)^2-(1-t^2) \geqq 0$$

$0 \leqq t \leqq 1$ より、 $1-t^2 \geqq 0$ となるので、

$$(x-y)^2-(\sqrt{1-t^2})^2 \geqq 0$$

$(x-y-\sqrt{1-t^2})(x-y+\sqrt{1-t^2}) \geqq 0$ と因数分解できる。

TypeI； $x-y-\sqrt{1-t^2} \geqq 0$ かつ　$x-y+\sqrt{1-t^2} \geqq 0$

$$y \leqq x-\sqrt{1-t^2} \quad \text{かつ} \quad y \leqq x+\sqrt{1-t^2}$$

$$\therefore y \leqq x-\sqrt{1-t^2}$$

傾き 1 y切片 $-\sqrt{1-t^2}$の直線の下側領域 を表す。

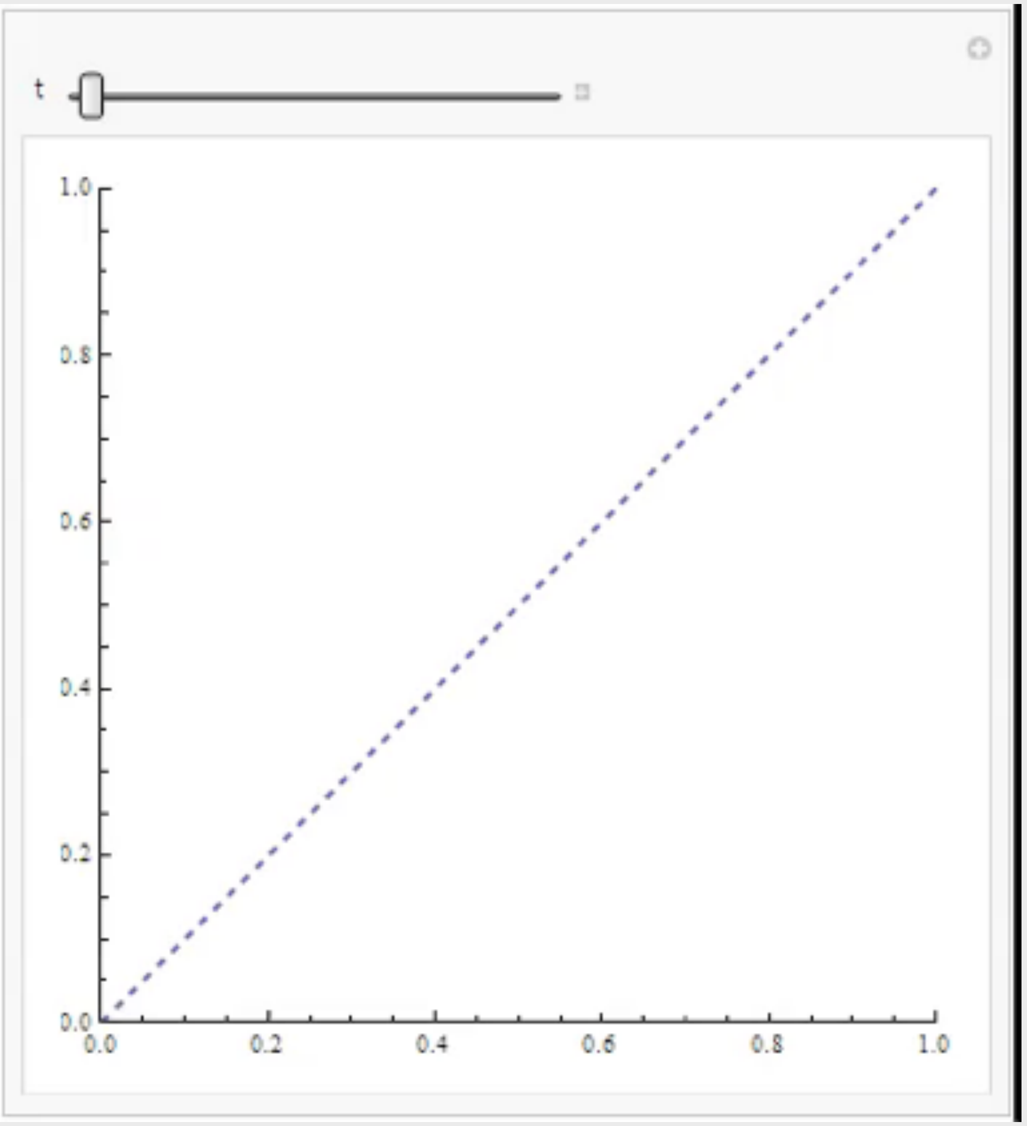
TypeII；$x-y-\sqrt{1-t^2} \leqq 0$ かつ　$x-y+\sqrt{1-t^2} \leqq 0$

$$y \geqq x-\sqrt{1-t^2} \quad \text{かつ} \quad y \geqq x+\sqrt{1-t^2}$$

$$\therefore y \geqq x+\sqrt{1-t^2}$$

傾き 1 y切片 $\sqrt{1-t^2}$の直線の上側領域 を表す。

ムービー 2.6 平面$z = t$で切断した断面の変化



上図が求める断面である。ピンクの２個の直角二等辺三角形の面積を求め積分すると体積を求めることができる。

右下部分の直角二等辺三角形の底辺は、$1-\sqrt{1-t^2}$　高さ$1-\sqrt{1-t^2}$となるので、求める面積は、

$S(t) = (1-\sqrt{1-t^2})^2 = 2 - t^2 - 2\sqrt{1-t^2}$・・・（答）

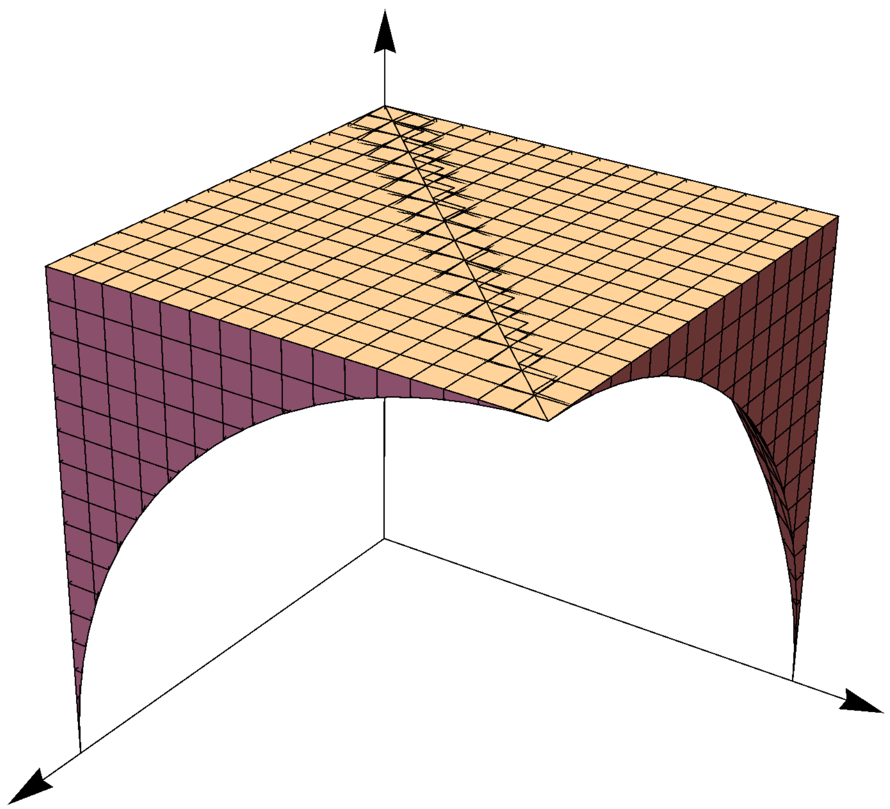
2. この断面積を積分すると、体積になるので、

$$\int_0^1 \left(2 - t^2 - 2\sqrt{1-t^2}\right)dt = \int_0^1 \left(2-t^2\right)dt - 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$$

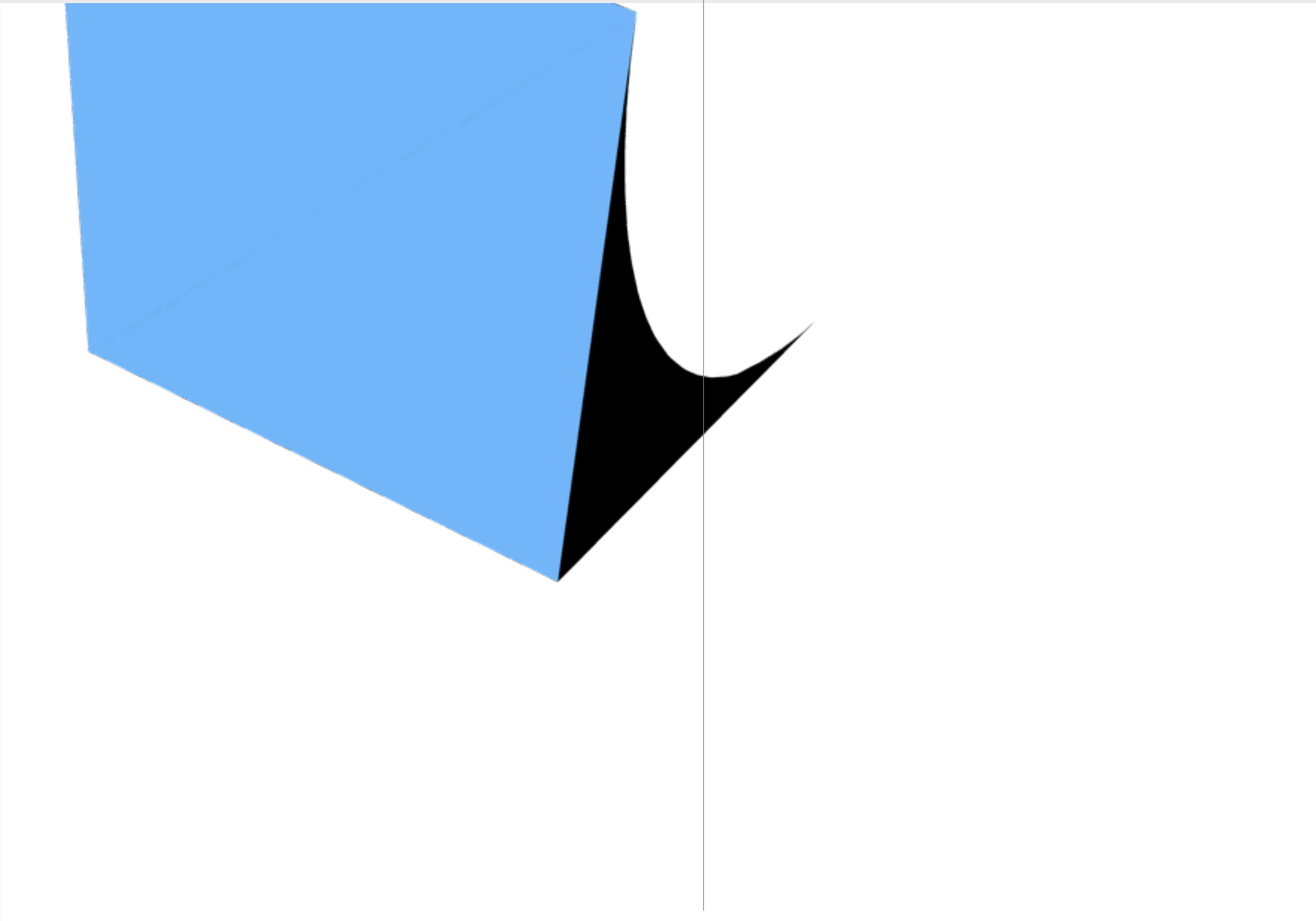
$$\int_0^1 \left(2-t^2\right)dt = \left[2t - \frac{t^2}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{4}$$

より、求める立体の体積は、$\frac{5}{3} - \pi$・・・(答)



インタラクティブ 2.2 立体に触れてみよう。



セクション 3

微分方程式

北海道大学 2003

曲線 $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を y軸の周りに回転 してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t = 0$に排水口を開けて排水を開始する。時刻 tにおいて容器に残っている水の深さを h、体積を Vとする。 Vの変化率 $\frac{dV}{dt}$は $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$

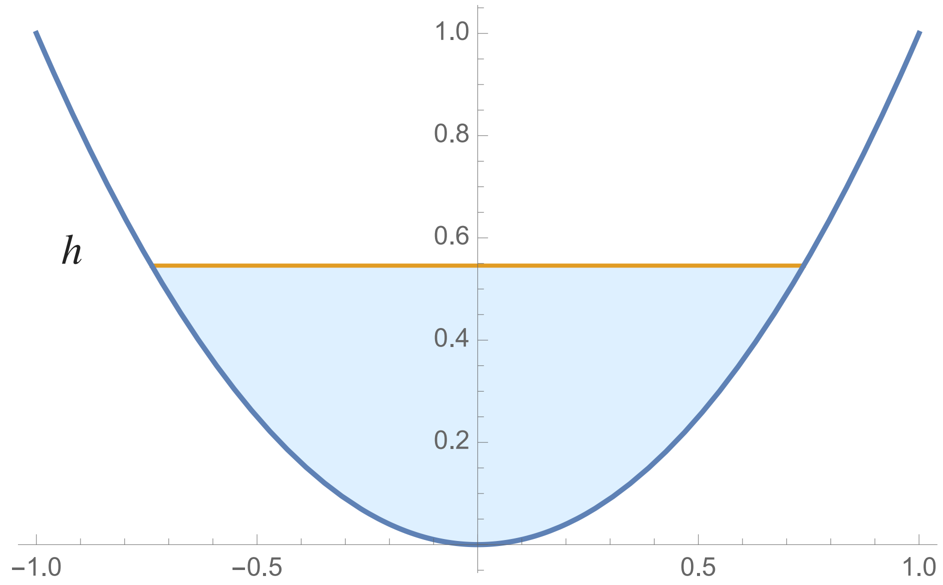
で与えられる。

1. 水深 hの変化率 $\frac{dh}{dt}$を hを用いて表せ。

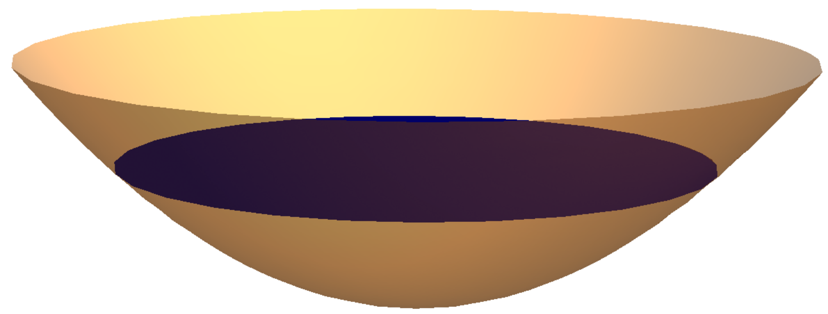
2. 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 Tを求めよ。

回転軸に垂直な断面積を求める。

水深が0から hまで変化するので、水深 hの体積が Vなので、



へ水深 $y = h$を代入すると、 $h = x^2$・・・①



y軸に垂直な平面で切断すると、その断面は、半径 xの円となるので、断面積は、円の公式により $x^2\pi$となる。

断面積を積分し、体積を求める。

$$V=\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h ydy=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2=\frac{h^2\pi}{2}$$

$V=\dfrac{\pi h^2}{2}$ の両辺を tで微分すると、

$$\frac{dV}{dt}=\pi h\frac{dh}{dt}$$

条件$\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$より、

$$-\sqrt{h}=\pi h\frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \frac{dh}{dt}=-\frac{1}{\pi\sqrt{h}}\cdot\cdot\cdot\quad（答）$$

2. 前問より、両辺に $\sqrt{h}$をかける。

$$\sqrt{h}\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{\pi}$$

両辺を tで積分すると、

$$\int\sqrt{h}\frac{dh}{dt}dt=-\frac{1}{\pi}\int dt$$

$$\frac{2}{3}h^{\frac{2}{3}}=-\frac{t}{\pi}+C$$

Cは不定積分定数とする。

初期条件として、0秒のとき、満水なので、$y=x^2$の $x=1$のとき、満水となり、高さ $h=1$なので、

$h=1,t=0$　を$\dfrac{2}{3}h^{\frac{2}{3}}=-\dfrac{t}{\pi}+C$に代入すると、

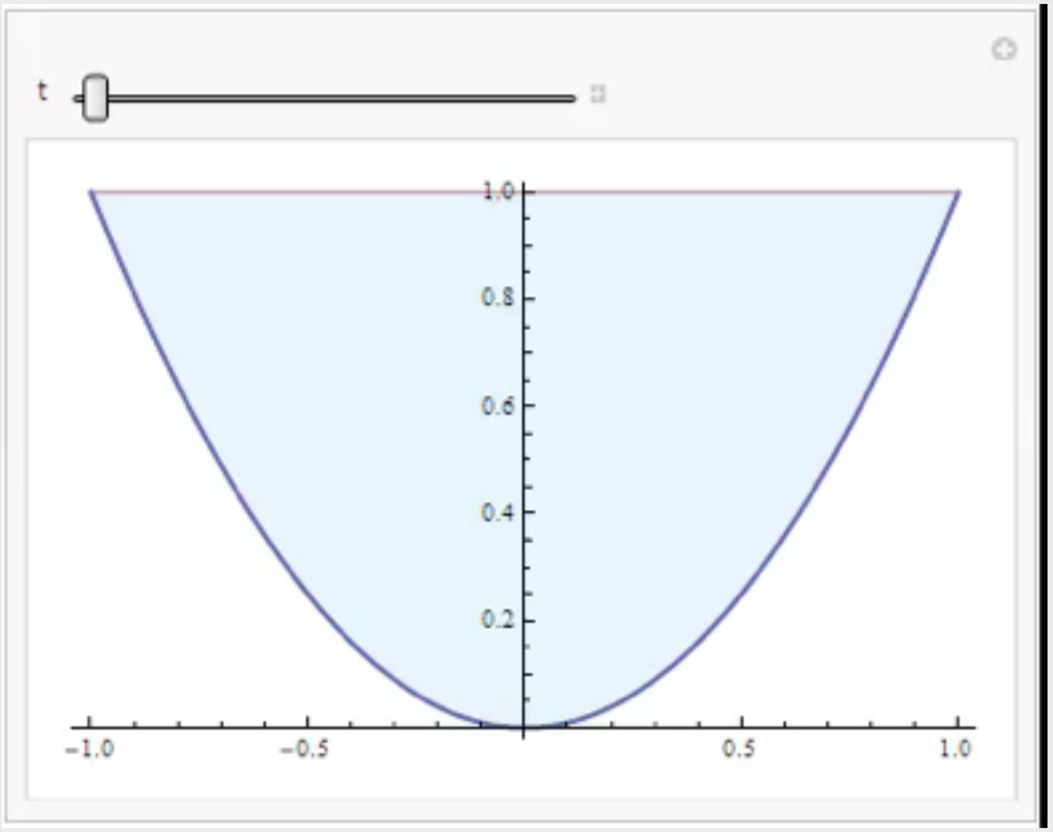
$$C=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}=-\frac{t}{\pi}+\frac{2}{3}$$

完全に排水するとき、水深 $h=0$　となるので、$h=0$を代入すると、

$$T=\frac{2\pi}{3}\cdot\cdot\cdot\quad（答）$$

ムービー 2.7 水面の動きを再現する。



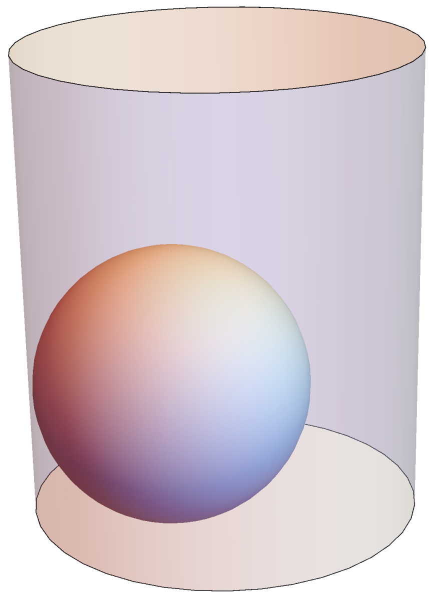
水の問題

千葉大学2013

底面の半径１、高さ $h(h > \sqrt{2})$の直円柱形の容器に水がいっぱいに張ってあり、半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$の鉄球が沈んでいる。容器を一定の方向に傾けて水をこぼしていく。容器が初めの位置から傾いた角度をθとすると、$\theta = \dfrac{\pi}{4}$のときに鉄球と水面が接した。

1. hを求めよ。
2. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$のとき、容器内に残っている水の体積を求めよ。
3. $\theta = \dfrac{3\pi}{8}$のとき、容器内に残っている水の体積を求めよ。

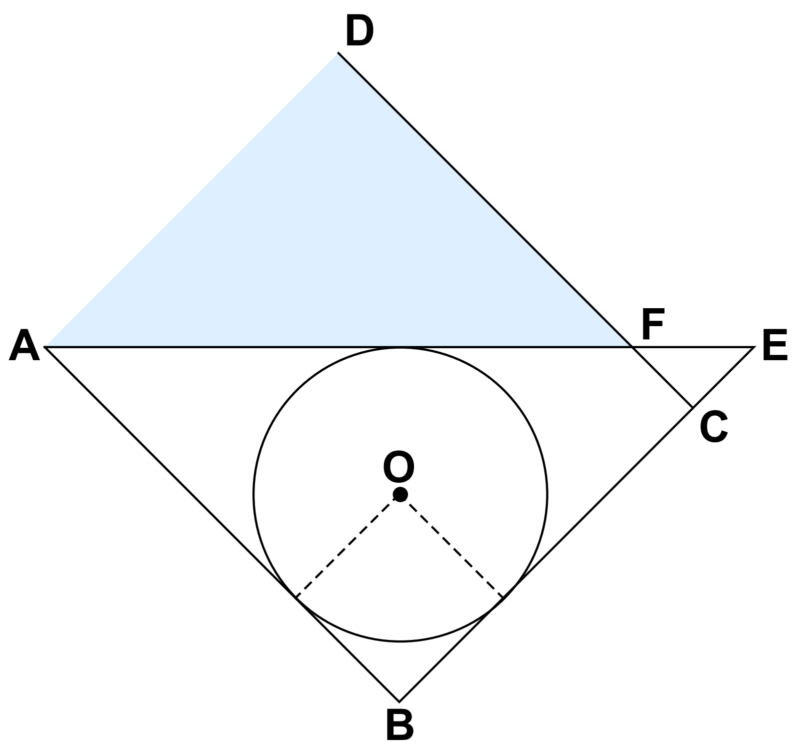
1.



左図の容器を$\theta = \dfrac{\pi}{4}$けたとき、

$\triangle ABE$は鉄球の半径$r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$を内接円に持つ直角二等辺三角形である。 $AB = h$とする。

$\triangle ABE$の面積＝ $\dfrac{h^2}{2}$・・・①



$\triangle ABE$の面積＝ $\dfrac{r}{2}(\sqrt{2}h + h + h)$・・・②

①＝②より

$\dfrac{h^2}{2} = \dfrac{rh(2+\sqrt{2})}{2}$ へ

$r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を代入

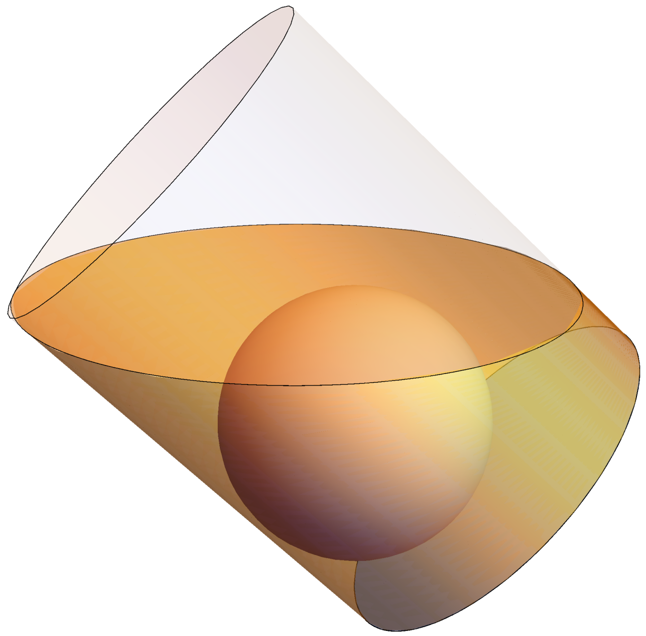
$h^2 = h(\sqrt{2}+1)$

$h(h - \sqrt{2} - 1) = 0$

$h > \sqrt{2}$より

$\therefore h = \sqrt{2} + 1$・・・（答）

2.



球体の体積をVとすると、

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

円柱の体積Uとすと、底面半径１、高さ hの円柱なので、$U=\pi h$

初期状態の水の体積を W_0 とおくと、

初期状態の水量＋球体体積＝円柱体積　より

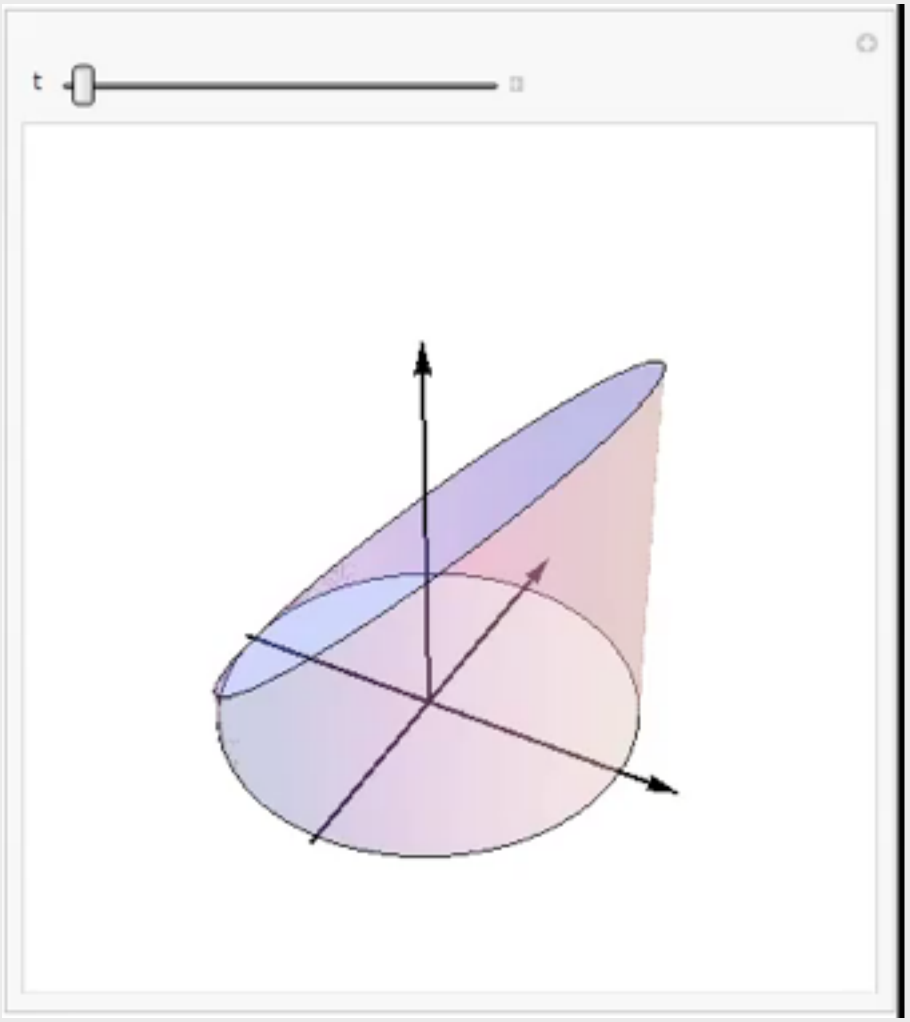
$W_0+\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}=\pi\times h$　前問より$h=\sqrt{2}+1$を代入すると、

初期状態の水量　$W_0=\dfrac{2\sqrt{2}+3}{3}\pi$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 傾けると、右図の円柱の斜め上部の部分が流出する。

流出した部分の体積を求める。

ムービー 2.8 Lorem Ipsum dolor amet, consectetur



流出した水の立体部分をyz 平面に平行な平面 $x=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$で切断すると切断面は上図のような長方形になる。

$x=t$　を底面の円 $x^2+y^2=1$へ代入すると、

$$y=\pm\sqrt{1-t^2}$$

切断面である長方形の底辺は、 $2\sqrt{1-t^2}$であり、高さは、平面 $z=x+1$上にあるので、 $t+1$である。

切断面積 $S(t)$ とすると、

$$S(t)=2(t+1)\sqrt{1-t^2}\quad(-1\leqq t\leqq 1)$$

流出した水の体積は、$\displaystyle\int_{-1}^{1}2(t+1)\sqrt{1-t^2}dt$

$$=2\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}dt+2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt\cdot\cdot\cdot①$$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$ は単位円の面積の半分を表すので、

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt=\frac{\pi}{2}$$

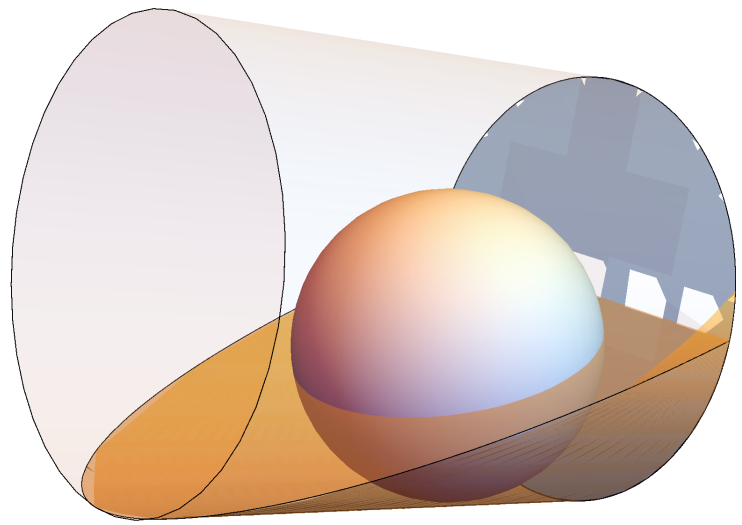
$\displaystyle\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}dt$ について、$p(t)=t\sqrt{1-t^2}$ とおくと、$p(-t)=-p(t)$になり、$p(t)$は奇関数になるので、

$$\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}dt=0$$

これらを①へ代入すると、流出した水量 $=0+2\times\dfrac{\pi}{2}=\pi$

残っている水の体積＝ $W_0-\pi=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}\cdot\cdot\cdot$ （答）

3.



半角公式 $tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-cos\theta}{1+cos\theta}$ へ $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ を代入する。

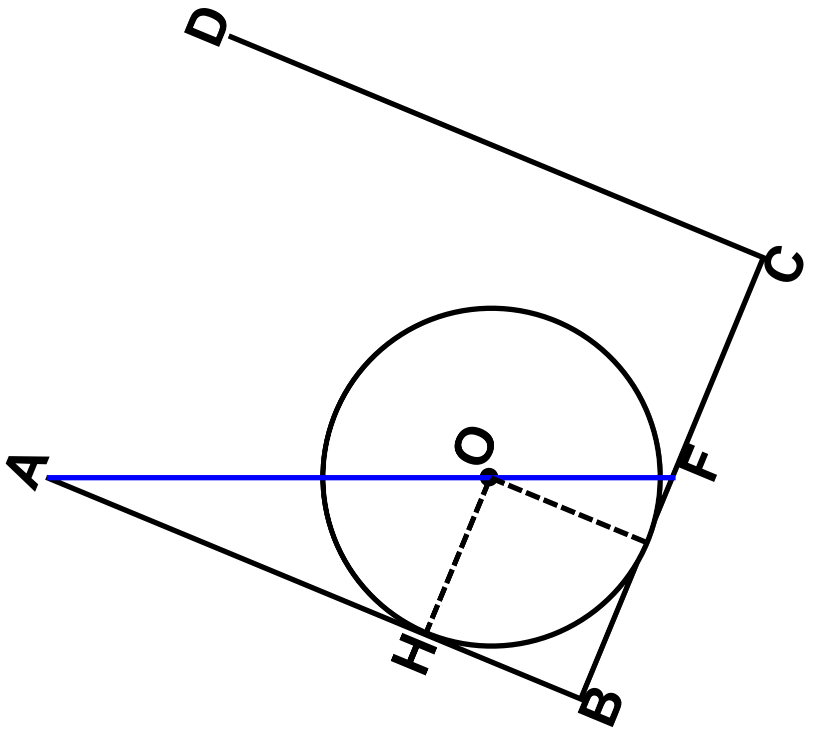
$tan^2\dfrac{\pi}{8}=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$ となるので、

$$tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1\cdot\cdot\cdot②$$

容器の中に残っている水量を求める。$\theta=\dfrac{3\pi}{8}$回転するので、

$$\angle OAH=\frac{\pi}{8}$$

$$AB=h=\sqrt{2}+1$$



$\triangle ABF$において $tan\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{BF}{AB}$ より

$BF = ABtan\dfrac{\pi}{8} = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$　点FはBCの中点となる。

$\triangle AHO$において、$AB = \sqrt{2}+1, r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{HO}{AH} = \frac{r}{AB-r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

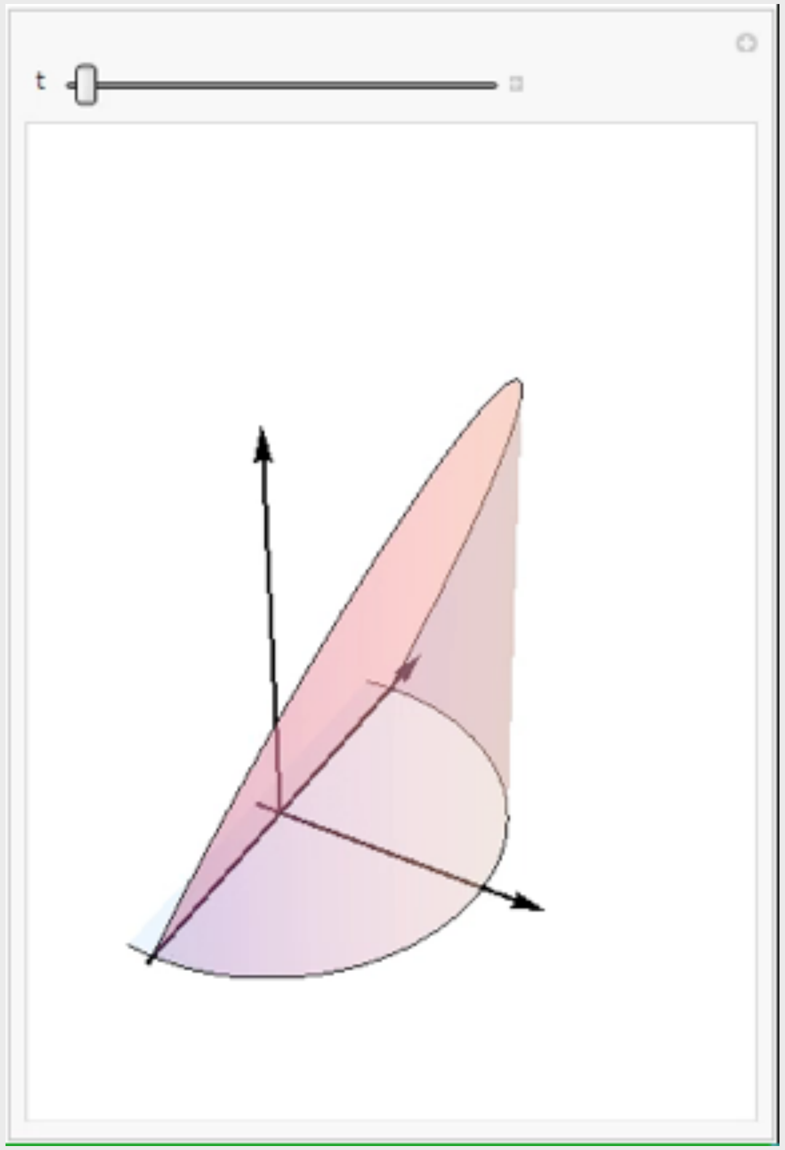
②より $tan\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{HO}{AH} = \dfrac{BF}{AB}$　　3点A, O, Fは同一直線上に存在する。

求める水量は、半径1高さ$1+\sqrt{2}$の円柱を平面$z = (1+\sqrt{2})x$で切断した部分の体積から、半球の体積を引いたものである。

切断面である長方形の底辺は、$2\sqrt{1-t^2}$であり、高さは、平面$z = (1+\sqrt{2})x$上にあるので、$(1+\sqrt{2})t$である。

切断面積$S(t)$とすると、$S(t) = 2(\sqrt{2}+1)t\sqrt{1-t^2}$　$(0 \leqq t \leqq 1)$

ムービー 2.9 切断面の動き



流出した水の体積は、

$$\int_0^1 2(\sqrt{2}+1)t\sqrt{1-t^2}dt = 2(\sqrt{2}+1)\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}dt \cdot\cdot\cdot ②$$

$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}dt$ を置換積分法によって求める。

$u=1-t^2$ とおく。 $t;0 \longrightarrow 1$ から $u;0 \longrightarrow 1$ となり、 $du=-2tdt$

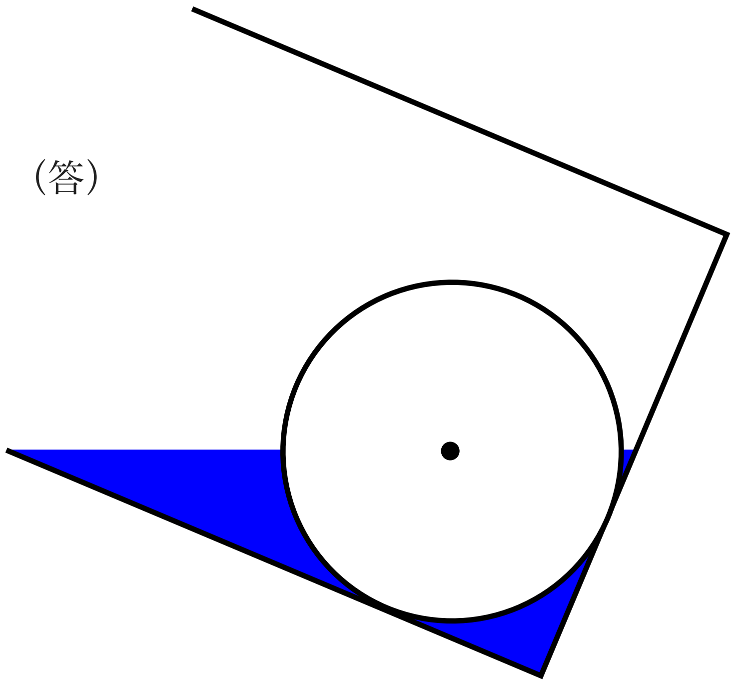
$$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}$$

②へ代入すると、 $\int_0^1 2(\sqrt{2}+1)t\sqrt{1-t^2}dt = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{3}$

残っている水量＝ $\frac{2\sqrt{2}+1)}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{4\pi r^3}{3}$

$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ を代入する。

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \cdot\cdot\cdot \text{（答）}$$



ムービー 2.10 水面の動き