面白い曲線を作る

転がる２次曲線が作る曲線

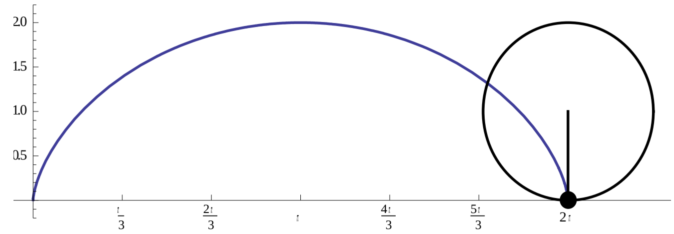
Cycloid から Unduloid

松本睦郎（札幌北高等学校）

物体を転がすと、様々な美しい曲線が完成する。今回は、いくつかの 2 次曲線を転がしてできる曲線を、Mathematica で作成してみた。

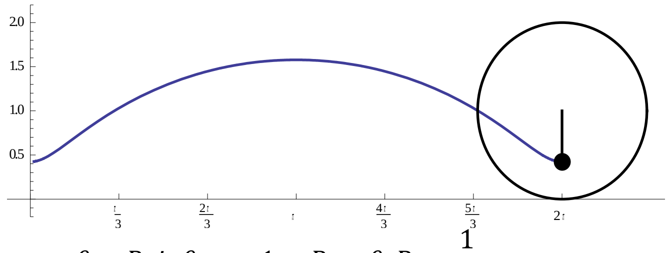
Episode1　Cycloid

代表的な、2 次曲線　円$x^2+y^2=1$を転がしてできる円周上の点の軌跡サイクロイド（Cycloid）は有名な曲線である。



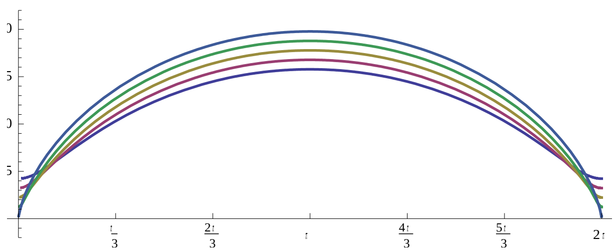
$x=\theta-sin\theta, y=1-cos\theta$

サイクロイドのスポークの長さを 1 から$\frac{1}{\sqrt{3}}$に短くした曲線をトロコイド（Trochoid）と呼ぶ。



$x=\theta-Rsin\theta, y=1-Rcos\theta, R=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

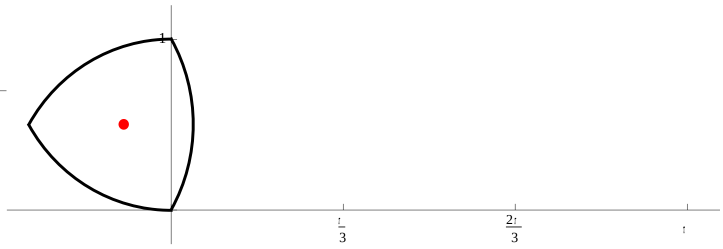
R の値を、いろいろに変化させると変化がわかる。



Episode2　Reuleaux

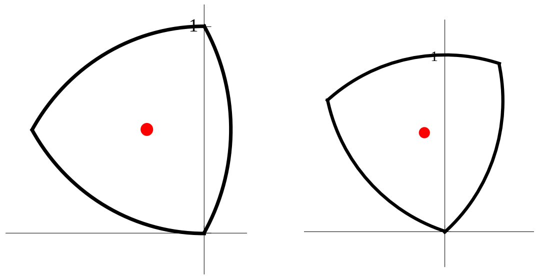
さて、円と同じ定幅図形である、ルーローの三角形を転がしたときにできる、中心の軌跡はどのような曲線になるのだろうか？

Step1　最初の$\frac{\pi}{3}$ラジアンの回転について

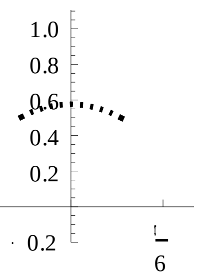


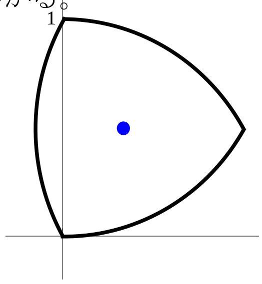
初期状態から、$\frac{\pi}{3}$転がった状態を比較すると（↓）

のような、原点 O を中心とし、半径$\frac{1}{\sqrt{3}}$、回転角$\frac{\pi}{3}$の

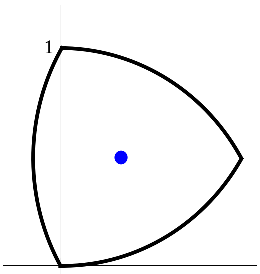


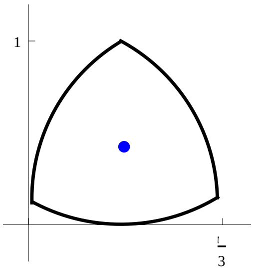
円弧（↓）を描くことがわかる。



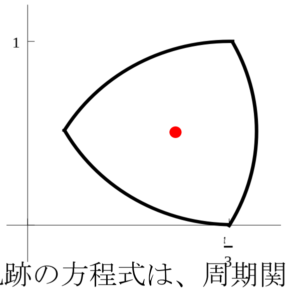


Step２　次ぎの$\frac{\pi}{3}$ラジアンの回転について

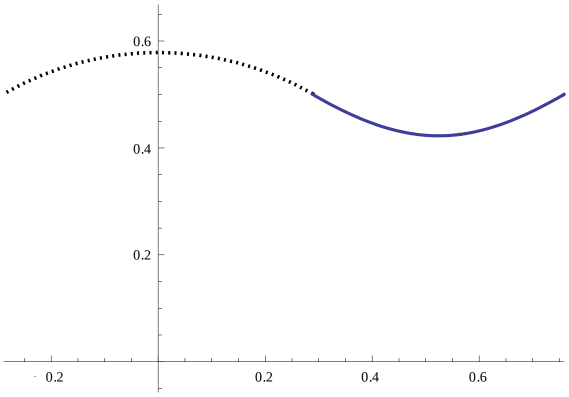




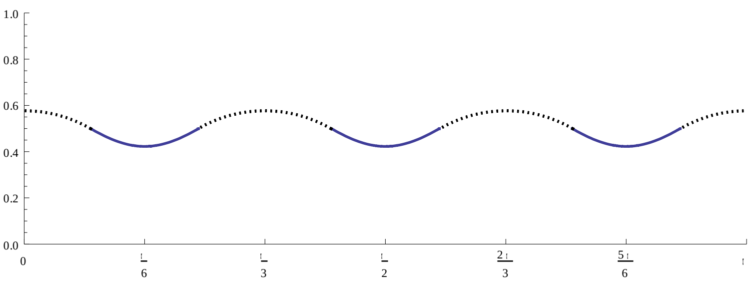
Reuleaux の三角形の弧を転がるように動く。中心は Trochoid 曲線の一部であることがわかる。この回転$\frac{\pi}{3}$の回転によって、Step1 の初期状態に戻る



ので、その後は、中心の軌跡の方程式は、周期関数となる。(↓点線部分が円、実線部分が Trochoid)

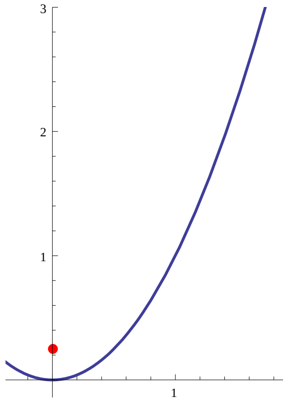


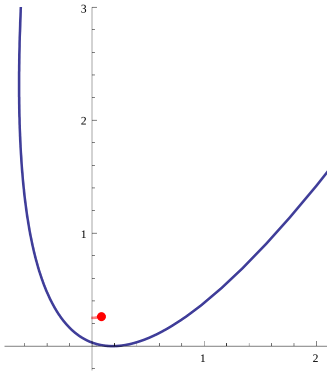
「円弧」と「Trochoid」を接続した、微分可能ななめらかな曲線が、Reuleaux の三角形の中心が描く曲線になる。（↓）

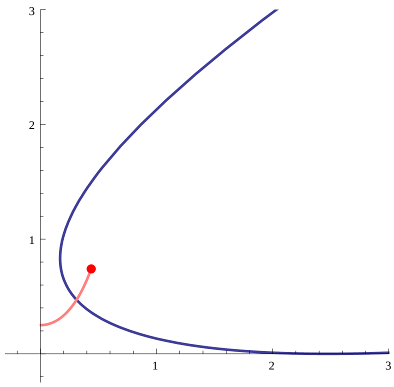


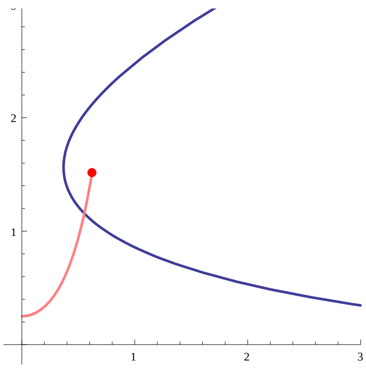
Episode3　放物線

放物線$y=x^2$のグラフ（↓）を x 軸上を転がすと、焦点$F\left(0,\frac{1}{4}\right)$が描く軌跡を求めてみよう。









2 次関数$y = x^2$上の点$P(p, p^2)$における接線の傾きを求める。$\frac{dy}{dx} = 2x$より、接線の傾き=$2p$

X軸の正の部分と、この接線とのなす角αとすると、$tan\alpha = 2p$ から、

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4p^2}}$$

$$sin\alpha = \frac{2p}{\sqrt{1+4p^2}}$$

と表示できる。

原点 O を中心として$-\alpha$回転する、変換行列T_pは、

$$T_p = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+4p^2}} \begin{pmatrix} 1 & 2p \\ -2p & 1 \end{pmatrix}$$

…①

原点 O から$P(p, p^2)$までの曲線の長さS_pは、

$$S_p = \int_0^p \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^p \sqrt{1+4x^2}\, dx$$

$$2x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

とおくと、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}(e^t + e^{-t})$$

$e^t > 0$ より

$$e^t = 2x + \sqrt{4x^2+1}$$

$$t = log\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$$

x	$0 \rightarrow p$
t	$0 \rightarrow \log\left(2p + \sqrt{4p^2+1}\right)$

$$S_p = \int_0^{log\left(2p+\sqrt{4p^2+1}\right)} \sqrt{1 + \frac{(e^t - e^{-t})^2}{2}} \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{log\left(2p+\sqrt{4p^2+1}\right)} (e^t + e^{-t})^2 dt$$

$$= \frac{p}{2}\sqrt{4p^2+1} + \frac{1}{4}log\left(2p + \sqrt{4p^2+1}\right)$$

…②

2 次関数$y = x^2$が転がる時の、焦点$F\left(0, \frac{1}{4}\right)$の軌跡の方程式を求める。

Step1　$P(p, p^2)$が原点Oに重なる様に平行移動する。

焦点$F\left(0, \frac{1}{4}\right)$は、$F_1\left(-p, \frac{1}{4} - p^2\right)$に移動する。

Step2 $F_1\left(-p, \frac{1}{4} - p^2\right)$を原点中心に$-\alpha$回転する。

$$\frac{1}{\sqrt{1+4p^2}} \begin{pmatrix} 1 & 2p \\ -2p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p \\ \frac{1}{4} - p^2 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{1+4p^2} \begin{pmatrix} -\frac{p}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

この点をF_2とする。

Step3　F_2をX軸方向へS_p平行移動する。

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} log\left(2p + \sqrt{4p^2+1}\right) & \text{...②} \\ y = \frac{1}{4}\sqrt{1+4p^2} & \text{...③} \end{cases}$$

となり、pをパラメーターとする、焦点 F の軌跡の方程式が得られる。

Step4　パラメーターpを消去する。

②より

$$e^{4x} = 2p + \sqrt{4p^2+1}$$

$$e^{-4x} = \frac{1}{2p + \sqrt{4p^2+1}} = -2p + \sqrt{1+4p^2}$$

これらより、

$$e^{4x} - e^{-4x} = 4p$$

$$p = \frac{1}{4}(e^{4x} - e^{-4x})$$

この式を③へ代入すると

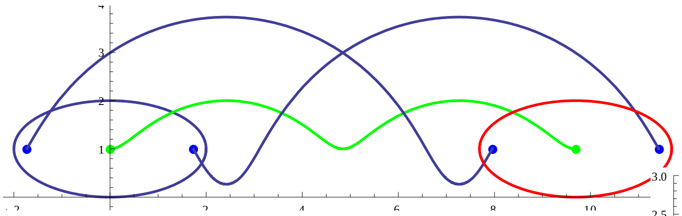
$$y = \frac{1}{8}(e^{4x} + e^{-4x})$$

つまり、求める焦点 F の軌跡は、Catenary 曲線になる。

Episode4　楕円

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{1^2}=1$$

を、x 軸上を転がすとき、焦点 中心の軌跡を求める。(↓)



焦点$\mathrm{F_1}(\sqrt{3},1),\mathrm{F_2}(-\sqrt{3},1)$、中心$\mathrm{O_1}(0,1)$である。

この楕円のパラメーター表示は、

$$\begin{cases} x = 2cos\alpha \\ y = sin\alpha + 1 \end{cases}$$

楕円上の点$P(2cos\alpha, sin\alpha+1)$における接線の傾きを求める。

$$\frac{dx}{d\alpha}=-2sin\alpha\,,\frac{dy}{d\alpha}=cos\alpha$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{cos\alpha}{2sin\alpha}$$

この接線と x 軸の正の部分とのなす角 θ とすると、

$$tan\theta=-\frac{1}{2}\times\frac{cos\alpha}{sin\alpha}$$

より、

$$cos\theta=-\frac{2sin\alpha}{\sqrt{3sin^2\alpha+1}}\,,sin\theta=\frac{1}{2}\times\frac{cos\alpha}{\sqrt{3sin^2\alpha+1}}$$

原点 O を中心として、− θ 回転する変換行列T_θは、

$$T_\theta=\frac{1}{\sqrt{3sin^2\alpha+1}}\begin{pmatrix}2sin\alpha & -cos\alpha\\ cos\alpha & 2\,sin\alpha\end{pmatrix}$$

原点 O から、楕円周上の点$P(2cos\alpha,sin\alpha+1)$までの楕円周上の長さ、$s(\alpha)$を求める。

$$s(\alpha)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\sqrt{1+3sin^2t}\,dt$$

この積分は、第 2 種楕円積分と呼ばれている。

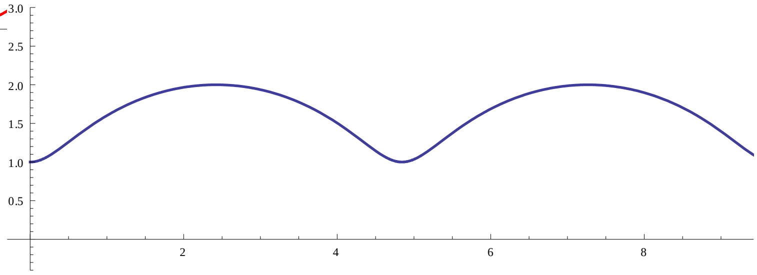
積分計算が複雑になるので、この積分結果を$s(\alpha)$として、扱う。

さて、中心$O_1(0,1)$の軌跡を求める。

楕円上の点$P(2cos\alpha,sin\alpha+1)$が原点になるように平行移動する。$O_1(0,1)$は、$O_2(-2cos\alpha,sin\alpha)$に移動する。更に、この$O_2$を原点 O を中心として、− θ 回転し、x 軸方向に$s(\alpha)$平行移動すると、軌跡の方程式が得られる。

中心$O_1(0,1)$の描く曲線のパラメーター表示は、

$$\frac{1}{\sqrt{3sin^2\alpha+1}}\begin{pmatrix}2sin\alpha & -cos\alpha\\ cos\alpha & 2\,sin\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2cos\alpha\\ sin\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}s(\alpha)\\ 0\end{pmatrix}$$

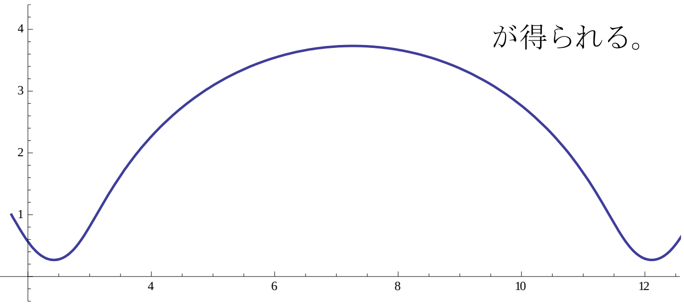


次に、焦点$\mathrm{F_1}(\sqrt{3},1)$の軌跡を求める。

同様にして、

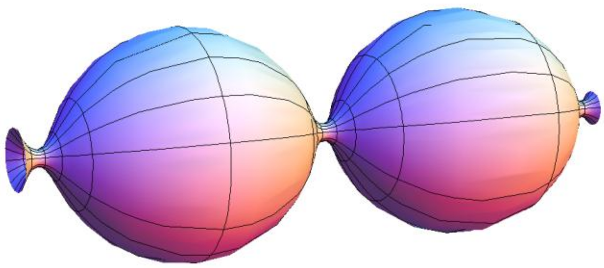
$$\frac{1}{\sqrt{3sin^2\alpha+1}}\begin{pmatrix}2sin\alpha & -cos\alpha\\ cos\alpha & 2\,sin\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-2cos\alpha\\ sin\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}s(\alpha)\\ 0\end{pmatrix}$$

が得られる。



X 軸について回転してできる立体は、美しい。

この立体を Unduloid と言う。



松本睦郎（札幌北高等学校）