メビウス変換とジューコフスキー変換

複素変換を視覚化する

松本睦郎（札幌北高等学校）

ジューコフスキー（1847～1921）は、ロシアの航空技術者である。1910 年「航空機の翼の翼型の外形線について」の論文の中で複素数関数の等角写像を利用した翼の揚力についての理論「クッタ・ジューコフスキー定理」を発表した。コンピューターもない時代に、どのような発想でこの理論を発見したのか、不思議に思える。

複素数平面で定義される代表的なメビウス変換とジューコフスキー変換を Mathematica で見てみよう。

Episode 1　単位円による反転

$$f(z)=\frac{1}{\bar{z}}$$

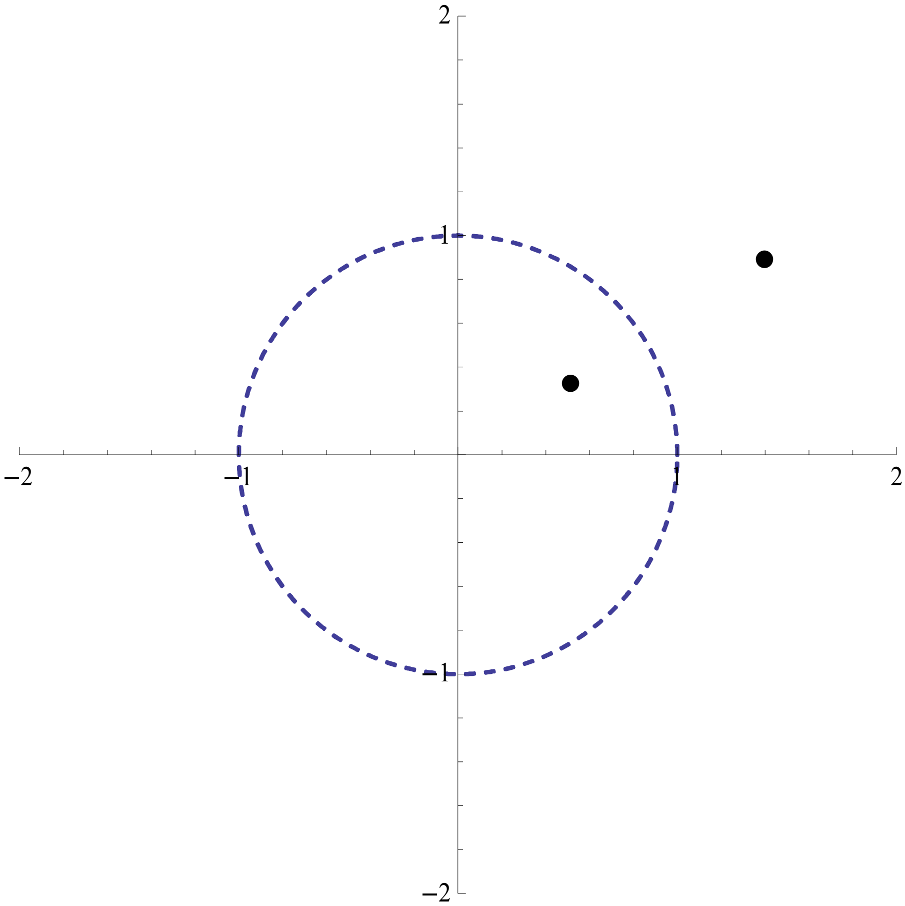
この変換は、O を中心、半径 1 の円を定める。任意の点 P に対し、半直線 OP をひく。その半直線上に

$$\mathrm{OP}\times\mathrm{OP}'=1$$

となる点P'をとる。点 P と P’を対応させる変換が反転である。

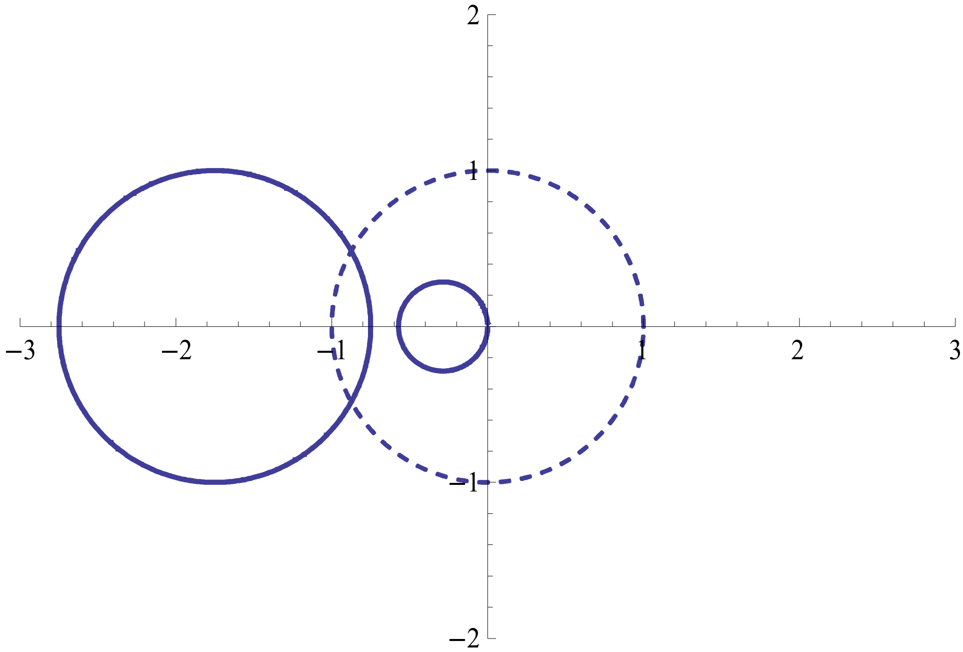
$P(x,y),P'(x,y)$とおくと

$$x'=\frac{x}{x^2+y^2}\ \ ,y=\frac{y}{x^2+y^2}$$



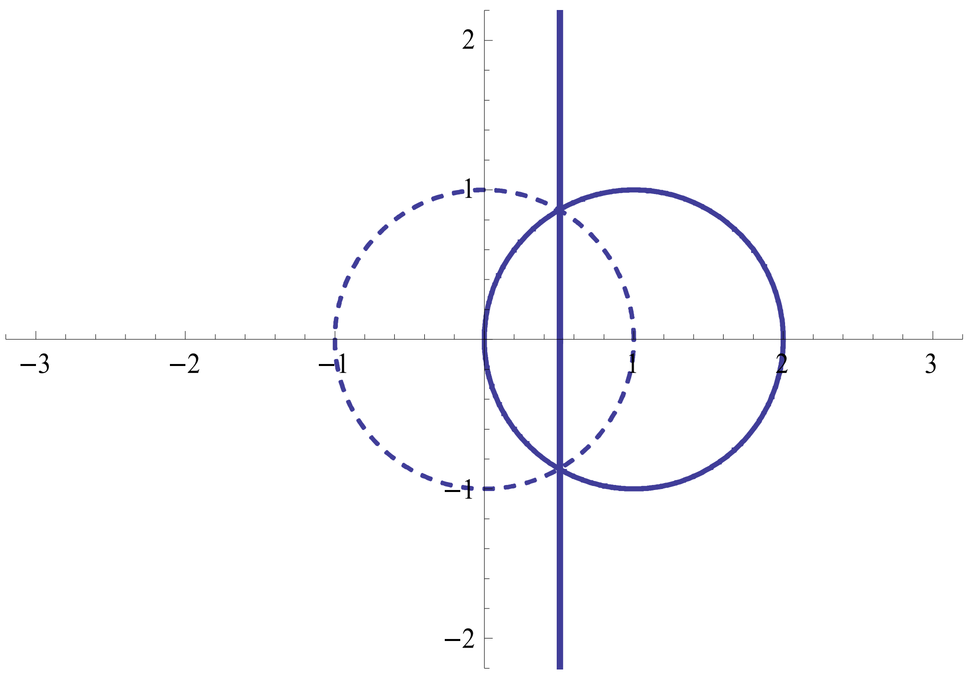
Type A；円→円

反転の中心（原点）を通らない円の像は、反転の中心（原点）を通らない円になる。



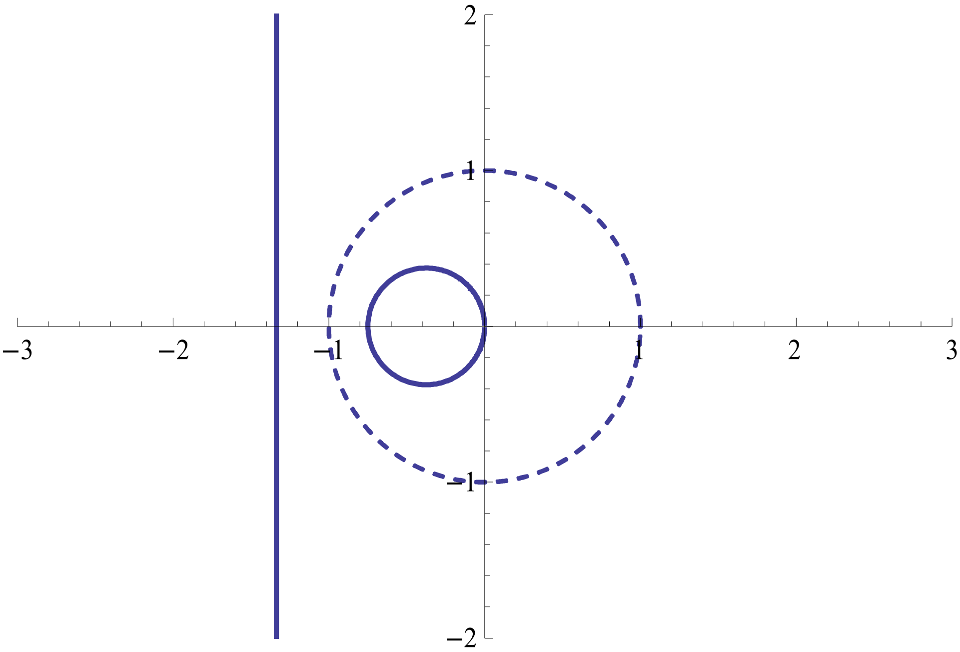
Type B；円→直線

反転の中心（原点）を通る円の像は、反転の中心（原点）を通らない直線になる。



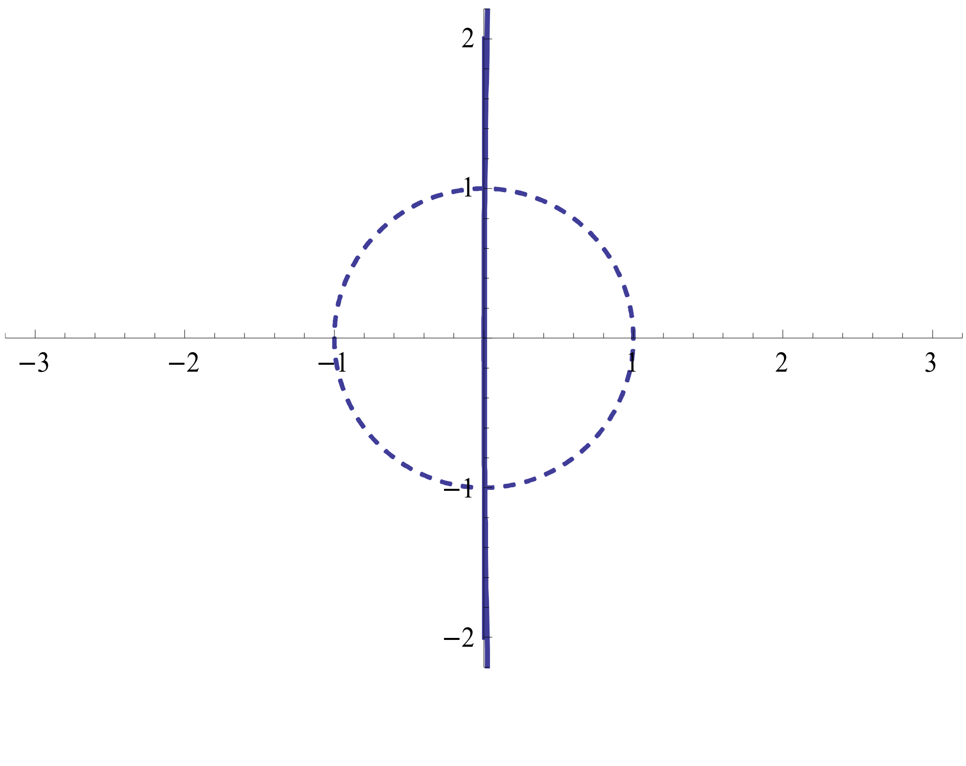
Type C；直線→円

反転の中心（原点）を通らない直線の像は、反転の中心（原点）を通る円になる。



Type D；直線→直線

反転の中心（原点）を通る直線の像は、反転の中心（原点）を通る直線になる。



Episode２　メビウス変換

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

a, b, c, dは$ad - bc \neq 0$を満たす複素定数

TypeⅠ；$c = 0, d \neq 0$のとき

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

相似拡大と回転・平行移動を表す。

TypeⅡ；$c \neq 0$のとき

$$\mathrm{f}(z) = \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad-bc}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}$$

f(z)は、次の４つの変換を合成した変換である。

Case１；平行移動

$$z_1 = z + \frac{d}{c}$$

Case２；反転

$$z_2 = \frac{1}{z_1}$$

Case３；相似拡大と回転

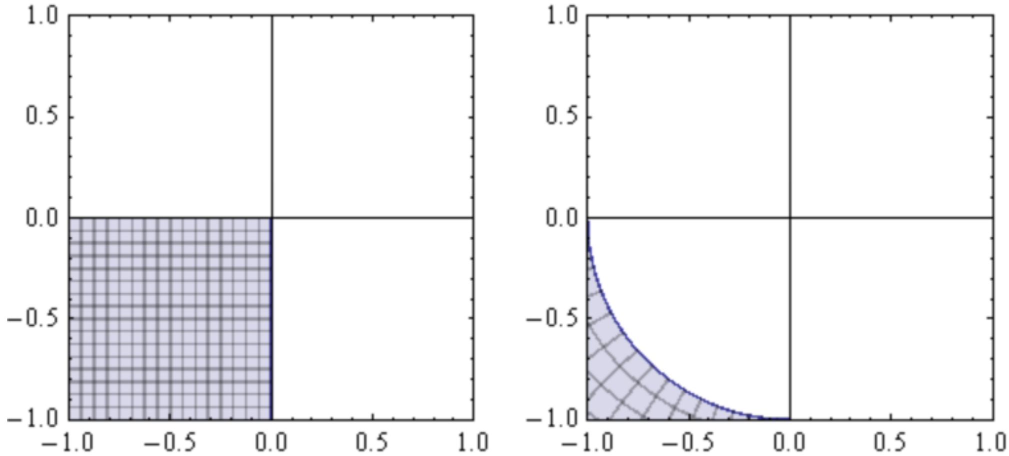
$$z_3 = -\frac{ad-bc}{c^2}z_2$$

Case４；平行移動

$$\mathrm{w} = \frac{a}{c} + z_3$$

結論；メビウス変換とは直線は、直線または円に変換される。円は、円または直線に変換される。

$$z = \frac{w-1}{w+1}$$



Episode２－１　2013 北海道大学・前期・理系

実数x, y, s, tに対し、z = x + y i, w = s + t iとおいたとき

$$z = \frac{w-1}{w+1}$$

をみたすとする。ただしiは虚数単位である。

（１）　wをzで表し、s, tをx, yで表せ。

（２）　$0 \leq s \leq 1$かつ$0 \leq t \leq 1$となるような(x, y)の範囲 D を座標平面上に図示せよ。

（３）　点$\mathrm{P}(x, y)$が D を動いたとき、$-5x + y$の最小値を求めよ。

【解答例】

（１）$\mathrm{z}(w+1) = w - 1$

$(z-1)w = -z - 1$　$\mathrm{z} = 1$のとき　左辺＝0,右辺＝－2 となり不適　$\therefore \mathrm{z} \neq 1$

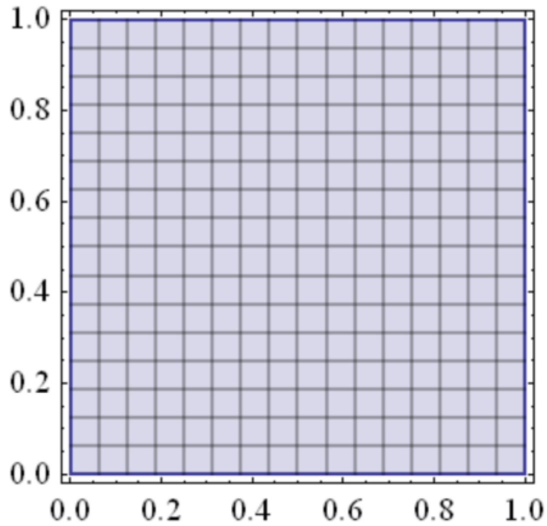
$$\therefore w = \frac{-z-1}{z-1}$$

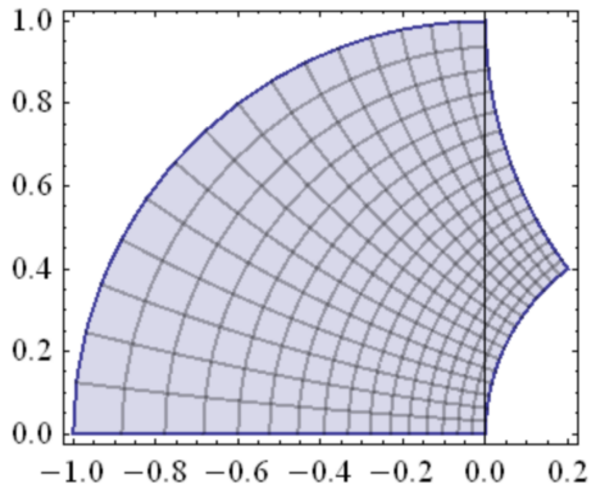
$$s + t\,i = \frac{(-x-1) - y\,i}{(x-1) + y\,i} = \frac{-x^2 - y^2 + 1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}\,i$$

x, y, s, tは実数なので、実部、虚部を比較すると、

$$s = \frac{-x^2 - y^2 + 1}{(x-1)^2 + y^2}\ ,t = \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}$$

（２）





（ｉ）$0 \leq \mathrm{s} \leq 1$のとき

$$0 \leq \frac{-x^2 - y^2 + 1}{(x-1)^2 + y^2} \leq 1$$

$(x, y) \neq (1,0)$

分母を払ってまとめると

$$0 \leq -x^2 - y^2 + 1 \leq (x-1)^2 + y^2$$

左側の不等式より、　$x^2+y^2 \leq 1$･･･①　　　　右側の不等式より、　$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \geq \frac{1}{4}$ ･･･②

（ⅱ）$0 \leq t \leq 1$のとき

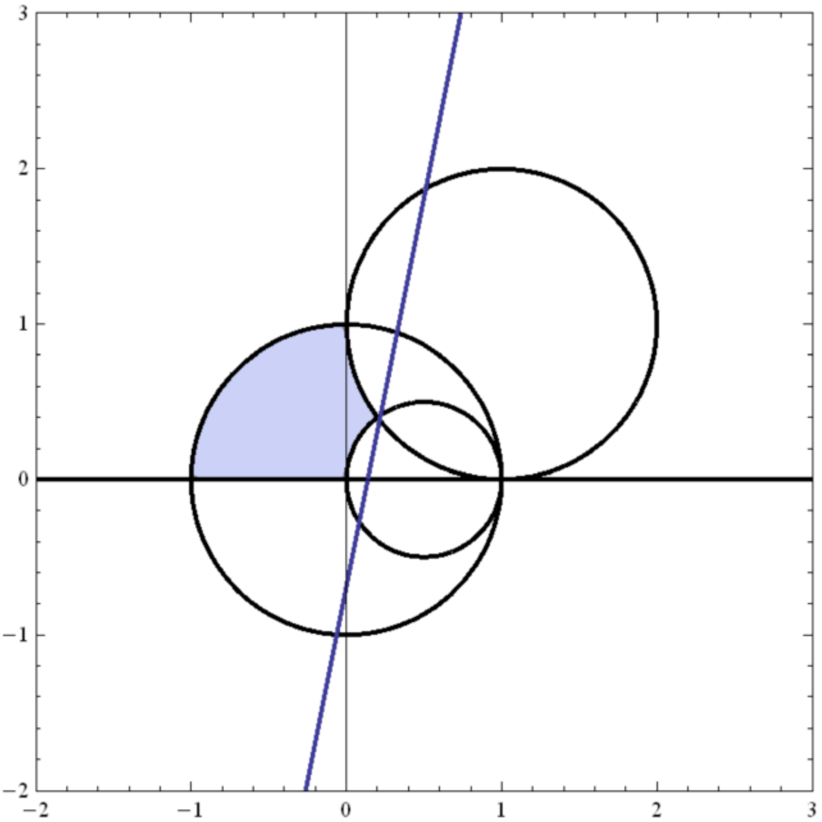
$$0 \leq \frac{2y}{(x-1)^2+y^2} \leq 1$$

$$(x,y) \neq (1,0)$$

分母を払ってまとめると

$$0 \leq 2y \leq (x-1)^2+y^2$$

左側の不等式より、　$0 \leq y$･･･③　　　　右側の不等式より、　$(x-1)^2+(y-1)^2 \geq 1$ ･･･④



（３）$-5x+y=k$ とおく

$$l; y=5x+k$$

直線lと領域Ｄが共有点をもつような、kの最小値を求める。直線lの傾きが５なので、点(0,0)または、点$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$を通るとき、最小値をとる。

（ｉ）点(0,0)を通るとき　$k=0$

（ⅱ）点$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$を通るとき　$k=-\frac{3}{5}$

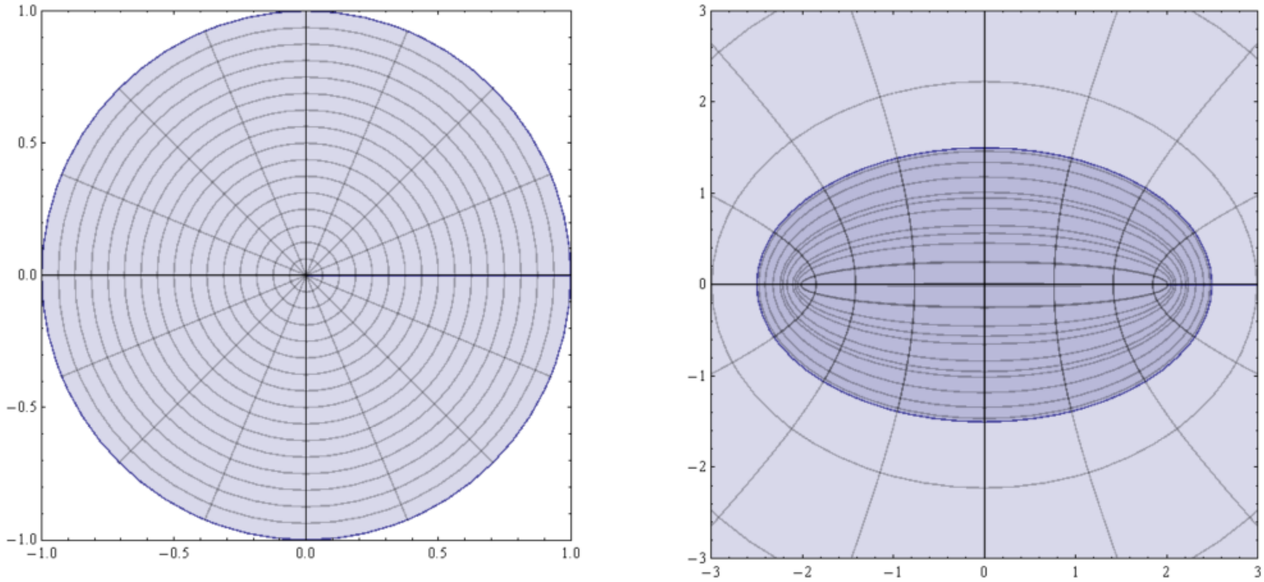
$-5x+y$の最小値は $(x,y)=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$のとき　$-\frac{3}{5}$

Episode 3　ジューコフスキー変換

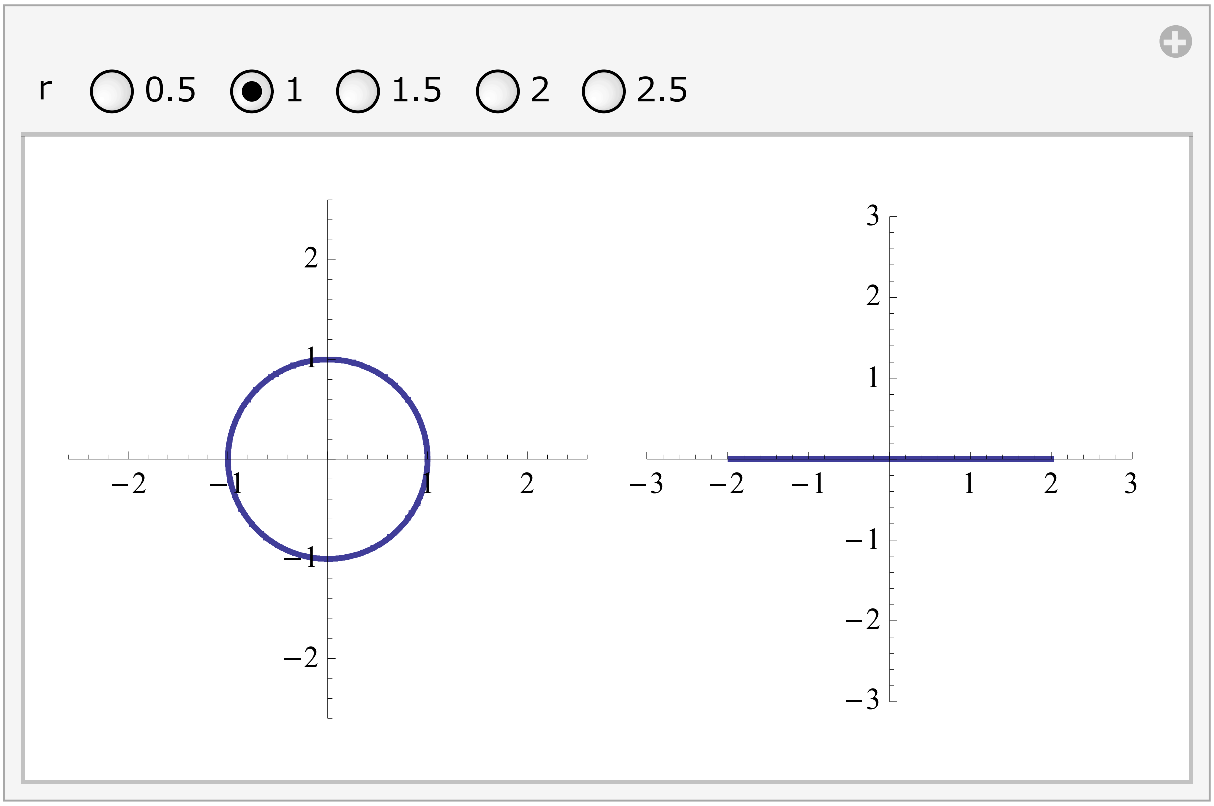
$$w = f(z) = z + \frac{1}{z}$$

この変換をジューコフスキー変換という。

$$\mathrm{w} = x + i\,y + \frac{1}{x + i\,y} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$



左図の円が、ジューコフスキー変換によって、右図の楕円に変換されることが分かる。
しかし、よく観察すると、円が単純に楕円にならないときがある。特に、注目すべき性質は、
下図のように、半径 1 の円は、$-2 \leq \mathrm{x} \leq 2$の範囲で直線に変換される。



$$w = z + \frac{1}{z}$$

この逆変を求める。分母を払って、まとめると、

$$z^2 - wz + 1 = 0$$

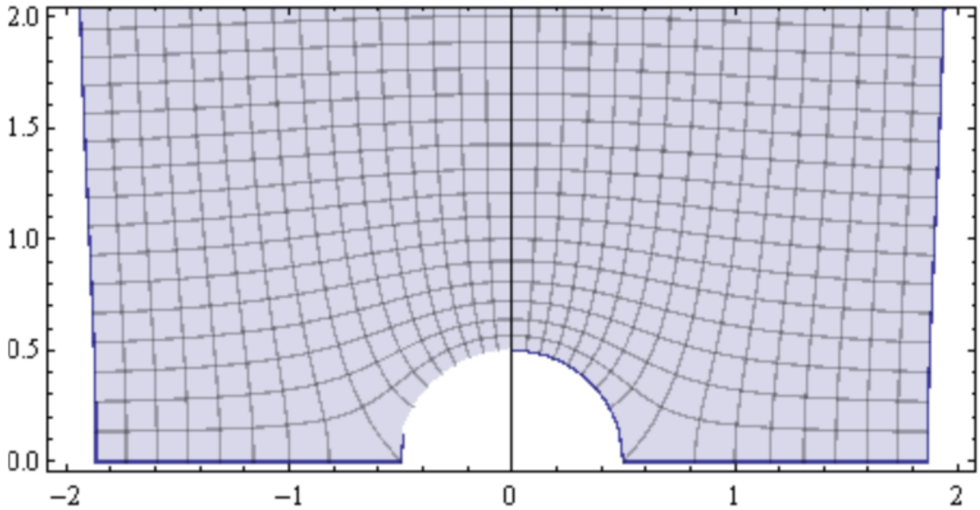
解の公式を使って

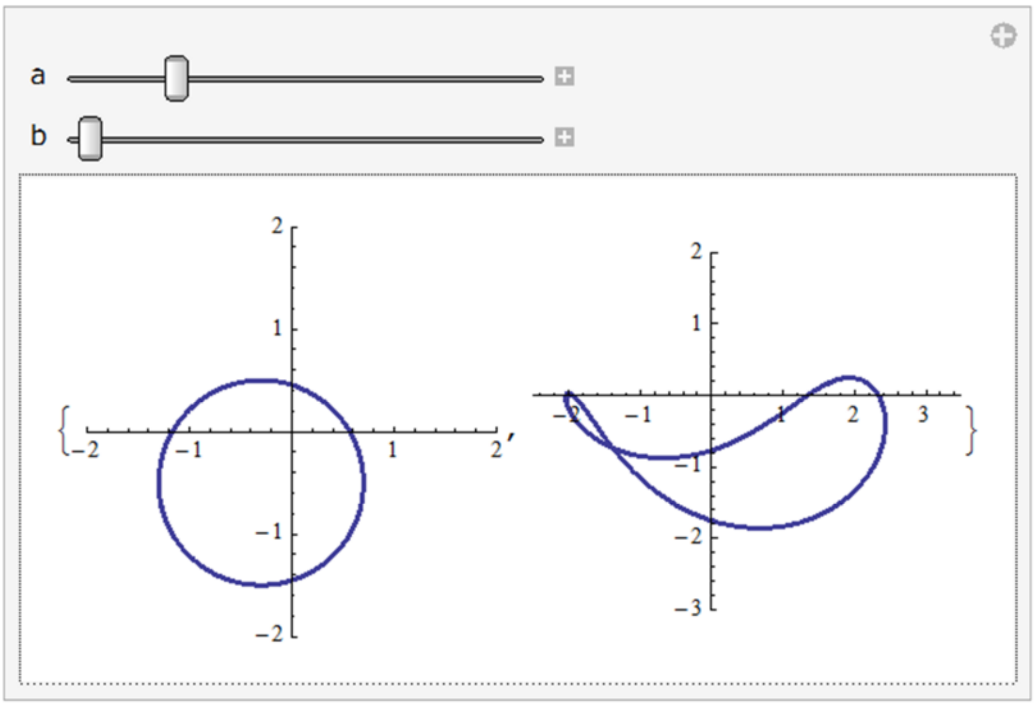
$$z = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4}}{2}$$

wとzを交換すると

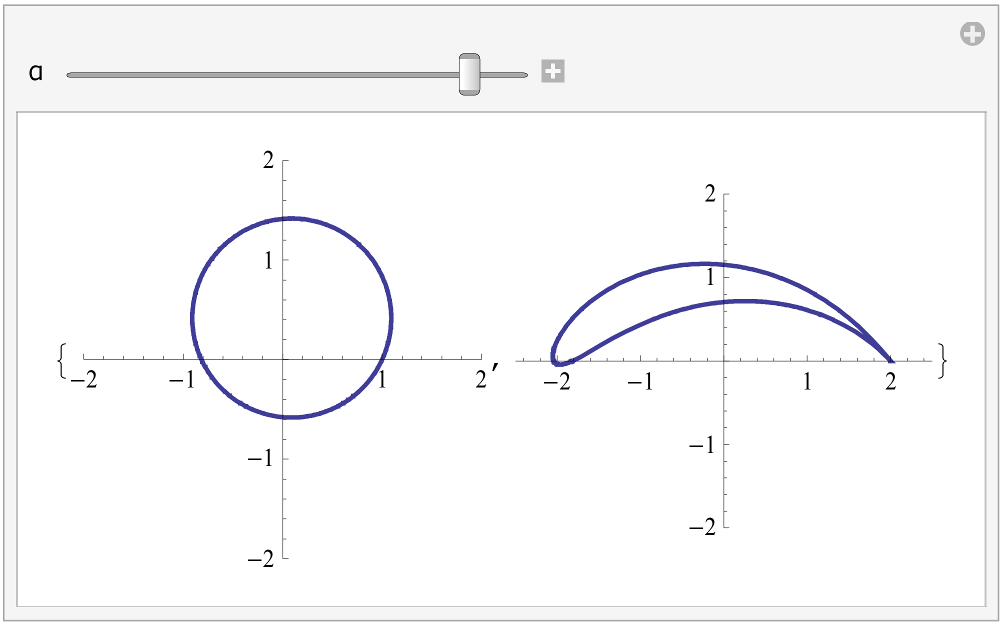
$$w = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}$$

は、$-1 \leq x \leq 1$の直線から半径$\frac{1}{2}$の円へ変換される。つまり、この関数を使って、円柱のまわり一様な空気の流れを見ることができる。

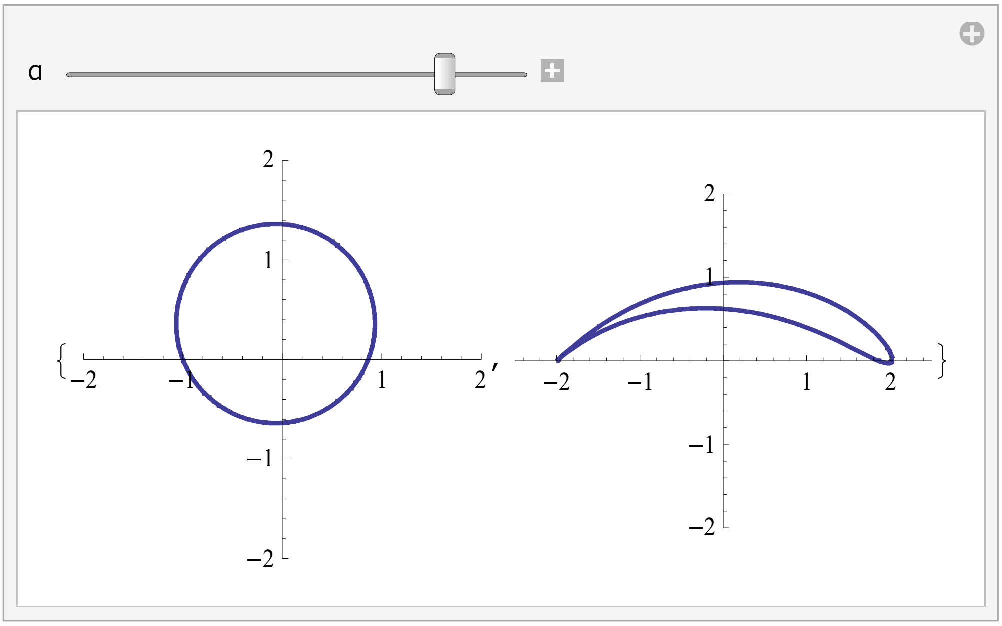




円の中心をいろいろ変化させると、ジューコフスキー変換後のグラフは楕円以外の様々な図形に変換される。



点$(-1,0)$を通る円（↑），点$(1,0)$を通る円（↓）をジューコフスキー変換すると飛行機の翼の形に変換される。



ロシアの航空学者、ニコライ・ジューコフスキーはこの変換を利用して、円柱のまわりの空気の流れを翼形の周りに変換する研究し、翼の揚力を発生させるメカニズムを理論化して「クッタ・ジューコフスキーの定理」を発表して等角写像による飛行機の翼の理論を発展させた。Su－27 や Mig－29 などの運動性能の高い戦闘機を開発し。ロシアの航空工学を発展させた。

松本睦郎（札幌北高等学校）