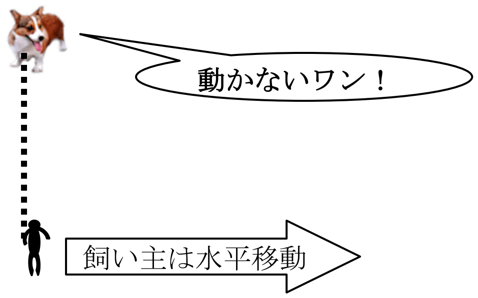
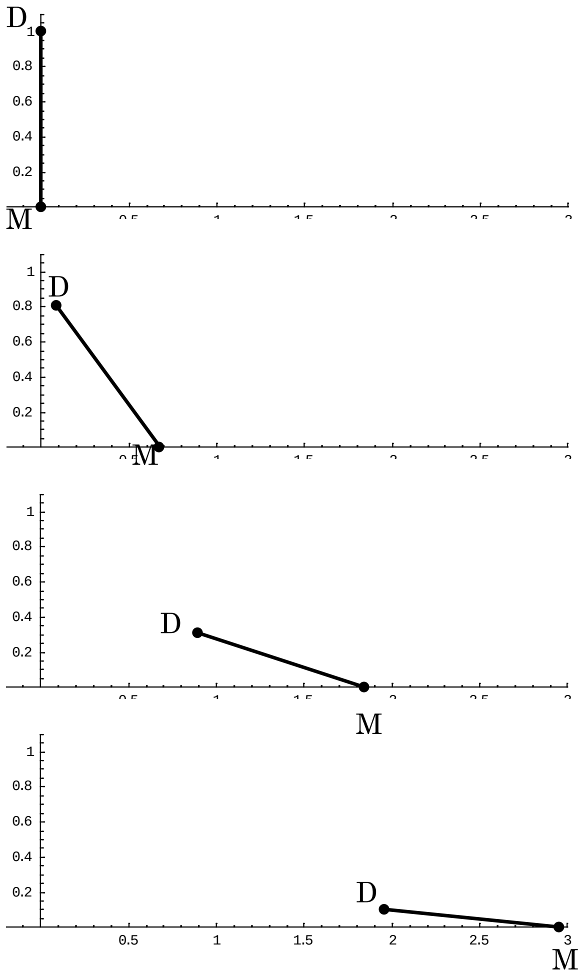
第１話　トラクトリックス　Tractrix 追跡曲線

Exercise 1　HoundKurve 問題　猟犬曲線問題

　パリの医師であり解剖学者、フランス王立科学アカデミー会員のクロード・ペローはズボンのポケットから鎖のついた銀の懐中時計を取り出し、テーブルの向こうまで引き出し「どんな曲線に対して、各点 P での接線と x 軸との間が一定の長さ a になるだろうか？」この問題を提出した。(1672～1676)
当時、フェルマーもこの式を求めることが出来なかった。
　1693 年ライプニッツが **HoundKurve(Hound Curve)猟犬曲線**と名前をつけて、微分方程式を用いて解法し発表した。
　『xy 平面上の原点 O(０,０)に飼主 M が、点 D$(0,a)$ $a>0$ に犬が伸縮しない長さ一定の a の紐でつながれている。今、飼主 M が x 軸正の水平方向に沿って犬を引っ張ったとき、犬の歩く軌跡はどのような曲線になるか？』

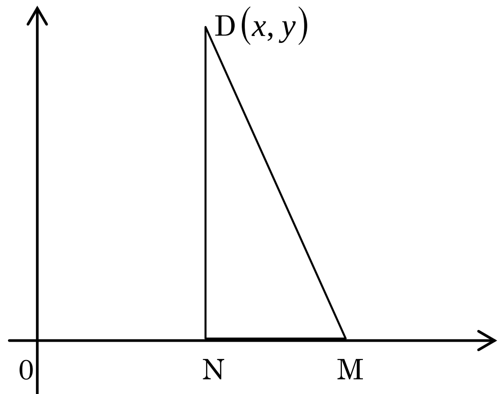




1693 年ライプニッツが解を発見した。

Step 1　微分方程式を作成する。

Dog の座標 D(x,y)として微分方程式を作成する。
DM＝a は紐の長さ、D から x 軸へ垂線を引き点 N とする。Master を点 M とする。



ピタゴラスの定理より、$NM^2+DN^2=DM^2$

$$NM=\sqrt{DM^2-DN^2}$$

$$NM=\sqrt{a^2-y^2}$$

点 D における求める曲線の傾きを求めると

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{DN}{NM} \text{ より}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}\cdots①$$

Step 2　変数分離型微分方程式を解法する。

これは、典型的な変数分離型の微分方程式である。

$$-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\frac{dy}{dx}=1$$

$$dx=-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy$$

以下、この微分方程式を解いていこう。

$$\int dx=-\int\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy\cdots②$$

Step 3　$u=\sqrt{a^2-y^2}$ と置き置換積分を行う。

両辺を２乗すると $u^2=a^2-y^2$

$y^2=a^2-u^2$　より　$y=\sqrt{a^2-u^2}$　$y>0$

これを u で微分すると　$\dfrac{dy}{du}=-\dfrac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}$

②より

$$x=-\int\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}dy$$
$$=-\int\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}\frac{-u}{\sqrt{a^2-u^2}}du$$
$$=\int\frac{u^2}{a^2-u^2}du$$
$$=\int\frac{u^2-a^2+a^2}{a^2-u^2}du$$
$$=\int\frac{a^2}{a^2-u^2}du-\int du$$
$$=-\int du-\int\frac{a^2}{u^2-a^2}du$$

Step4　後半部の部分分数分解を実施する。

$$\frac{a^2}{(u+a)(u-a)}=\frac{A}{u+a}+\frac{B}{u-a}$$
$$=\frac{(A+B)u+a(B-A)}{(u+a)(u-a)}$$

分子の係数を比較して

$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=a \end{cases}$ を解いて　　$A=-\dfrac{a}{2},B=\dfrac{a}{2}$

$$x=-\int du-\int\frac{a^2}{(u+a)(u-a)}du$$
$$=-\int du+\frac{a}{2}\int\frac{1}{u+a}du-\frac{a}{2}\int\frac{1}{u-a}du$$

Step５　絶対値に注意して積分を実施する。

$$=u+\frac{a}{2}\log|u+a|-\frac{a}{2}\log|u-a|+C$$

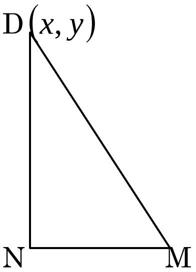
Cは不定積分定数

$$x=-u-\frac{a}{2}\log\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$$

$u=\sqrt{a^2-y^2}$ より

$$x=-\sqrt{a^2-y^2}-\frac{a}{2}\log\left|\frac{\sqrt{a^2-y^2}-a}{\sqrt{a^2-y^2}+a}\right|+C$$

Step６　符号をチェックする。



DM=a ,NM=$\sqrt{a^2-y^2}$

DM は直角三角形の斜辺より

NM＜DM

$\sqrt{a^2-y^2}<a$

$\sqrt{a^2-y^2}-a<0$

分子の符号はマイナス！

$$x=-\sqrt{a^2-y^2}-\frac{a}{2}\log\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{a+\sqrt{a^2-y^2}}+C$$

Step７　有理化を実施しまとめる。

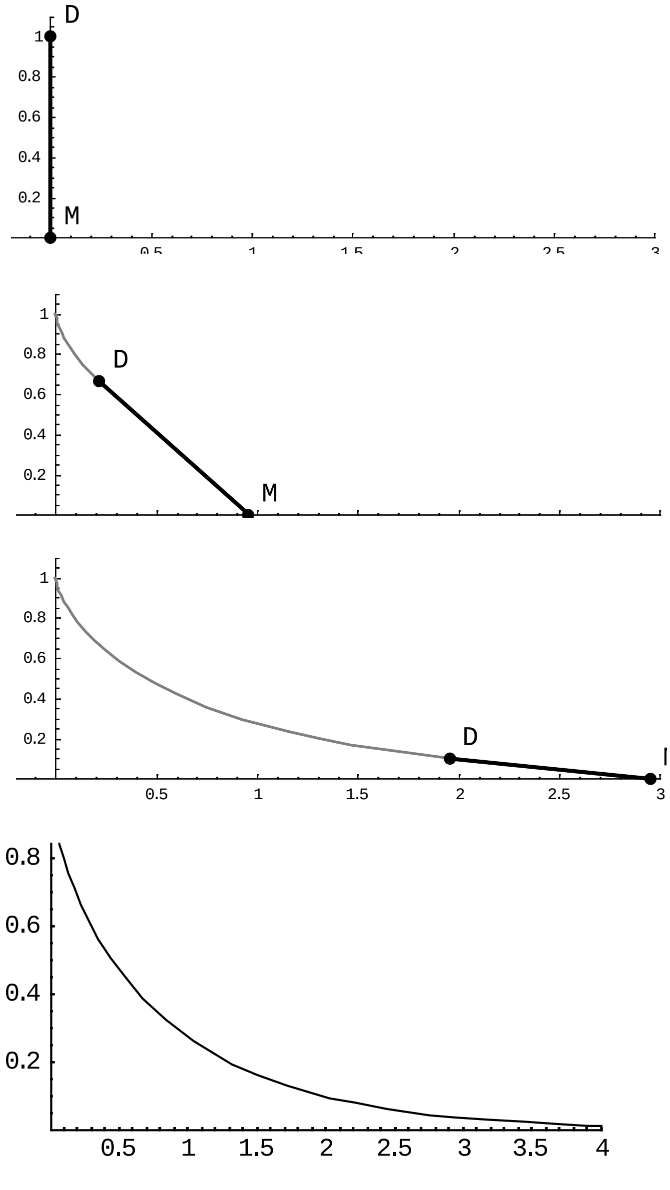
$$x=-\sqrt{a^2-y^2}-\frac{a}{2}\log\frac{\left(a-\sqrt{a^2-y^2}\right)^2}{a^2-\left(a^2-y^2\right)}+C$$
$$=-\sqrt{a^2-y^2}-\frac{a}{2}\log\frac{\left(a-\sqrt{a^2-y^2}\right)^2}{y^2}+C$$
$$=-\sqrt{a^2-y^2}-a\log\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}+C$$

Step８　不定積分定数 C を求める。

$x=0$ のとき $y=a$ より

$C=0$

$$x=-\sqrt{a^2-y^2}-a\log\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}\cdots③$$



$a=1$ のときの Tractrix のグラフ

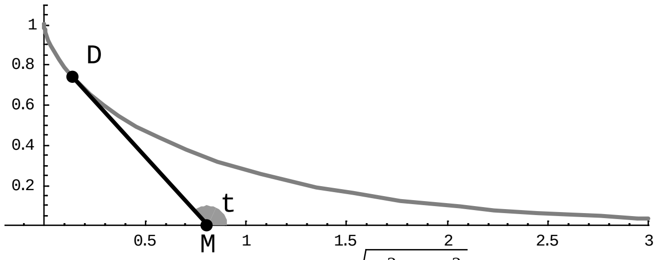
この点$(0,a)$にカスプを持つ曲線を Tractrix という。日本語では「追跡曲線」，「猟犬曲線」とか「牽引曲線」と呼ばれている。

Step9　トラクトリッスをパラメーター表示する。

$y=a\sin t$ とおくと

下図より、 $y=a$ のとき $t=\dfrac{\pi}{2}$ より、 $\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$

$\cos t<0$ であることに注意しておく。



$$x=-\sqrt{a^2-y^2}-a\log\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}$$ へ $y=a\sin t$

を代入すると

$$x=-\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}-a\log\frac{a-\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}{a\sin t}$$

$$=-\sqrt{a^2\cos^2 t}-a\log\frac{a-a\sqrt{\cos^2 t}}{a\sin t}$$

$$=-a\left|\cos t\right|-a\log\frac{1-\left|\cos t\right|}{\sin t}$$

$\cos t<0$ であることに注意して絶対値を展開する

$$=a\cos t-a\log\frac{1+\cos t}{\sin t}$$

倍角公式

$$\cos 2\frac{t}{2}=2\cos^2\frac{t}{2}-1,\ \sin 2\frac{t}{2}=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

を利用して

$$=a\cos t-a\log\frac{1+2\cos^2\frac{t}{2}-1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}$$

$$=a\cos t-a\log\frac{\cos^2\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}$$

$$=a\cos t-a\log\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=a\cos t-a\log\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}$$

$$=a\cos t+a\log\tan\frac{t}{2}$$

■トラクトリックスのパラメーター表示■

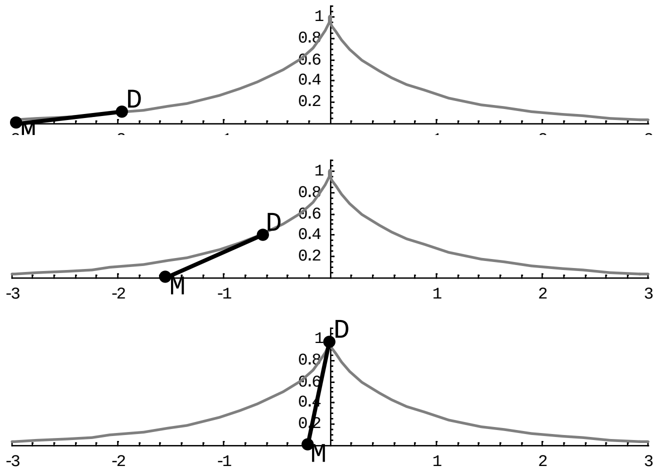
$$\begin{cases} y=a\sin t \\ x=a\cos t+a\log\tan\dfrac{t}{2} \end{cases}\quad\cdots④$$

パラメーターの範囲　$\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$

Step10　パラメーターの範囲を拡張する。

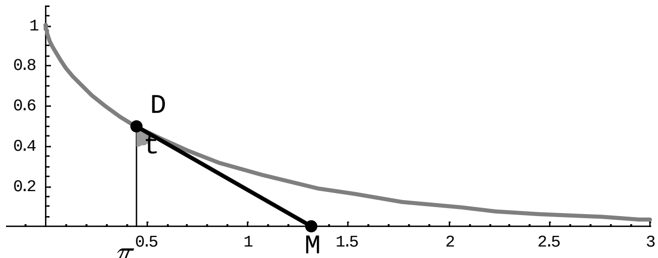
パラメーターの範囲を $\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ から $0\leqq t\leqq\pi$

に拡張して表示すると、



Step11　別のパラメーター表示を実施する。

$y=a\cos t$ とおくと t の取り方は下図のような



$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin t\geqq 0$

$y=a\cos t$ を③へ代入すると

$$x=-\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}-a\log\frac{a-\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}}{a\cos t}$$

$$=-a\sqrt{\sin^2 t}-a\log\frac{a-a\sqrt{\sin^2 t}}{a\cos t}$$

$\sin t\geqq 0$ より符号に注意して

$$=-a\sin t-a\log\frac{1-\sin t}{\cos t}$$

$$=-a\sin t+a\log\frac{\cos t}{1-\sin t}$$

$$=-a\sin t+a\log\frac{\cos t\,(1+\sin t)}{(1-\sin t)(1+\sin t)}$$

$$=-a\sin t+a\log\frac{\cos t\,(1+\sin t)}{1-\sin^2 t}$$

$$=-a\sin t+a\log\frac{\cos t\,(1+\sin t)}{\cos^2 t}$$

$$=-a\sin t+a\log\frac{1+\sin t}{\cos t}$$

$$=-a\sin t+a\log\left(\frac{1}{\cos t}+\tan t\right)$$

Exercise 2　2004年旭川医科大学後期

xy 平面上の曲線 C を $x=\cos t$, $y=-\sin t+\log\left\{\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$　$\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ で定義する。

（1）$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$ を t で表せ。

（2）曲線 C 上の点 P における接線と y 軸との交点を Q とするとき、線分 PQ の長さは一定であることを示せ。

この問題はトラクトリックスがベースになっていることがわかる。ただし、④は $y=a\sin t$ として変数変換したが、この問題は $y=a\cos t$ として変数変換していることがわかる。

$$\begin{cases} y=a\cos t \\ x=-a\sin t+a\log\left(\dfrac{1}{\cos t}+\tan t\right) \end{cases}\cdots⑤$$

三角関数の倍角公式

$$\tan t=\tan 2\times\frac{t}{2}=\frac{2\tan\frac{t}{2}}{1-\tan^2\frac{t}{2}}$$

$$\cos t=\cos 2\times\frac{t}{2}=2\cos^2\frac{t}{2}-1$$

を⑤へ代入すると

$$x=-a\sin t+a\log\left(\frac{1}{\cos t}+\tan t\right)$$

$$=-a\sin t+a\log\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}-1}+\frac{2\tan\frac{t}{2}}{1-\tan^2\frac{t}{2}}\right)$$

$\cos^2\frac{t}{2}=\dfrac{1}{\tan^2\frac{t}{2}+1}$ より

$$=-a\sin t+a\log\left(\frac{1+\tan^2\frac{t}{2}}{1-\tan^2\frac{t}{2}}+\frac{2\tan\frac{t}{2}}{1-\tan^2\frac{t}{2}}\right)$$

$$=-a\sin t+a\log\left(\frac{\tan^2\frac{t}{2}+2\tan\frac{t}{2}+1}{1-\tan^2\frac{t}{2}}\right)$$

$$=-a\sin t+a\log\frac{\left(1+\tan\frac{t}{2}\right)^2}{\left(1-\tan\frac{t}{2}\right)\left(1+\tan\frac{t}{2}\right)}$$

$$=-a\sin t+a\log\frac{\left(1+\tan\frac{t}{2}\right)}{\left(1-\tan\frac{t}{2}\right)}$$

$\tan\frac{\pi}{4}=1$ であることに注意して

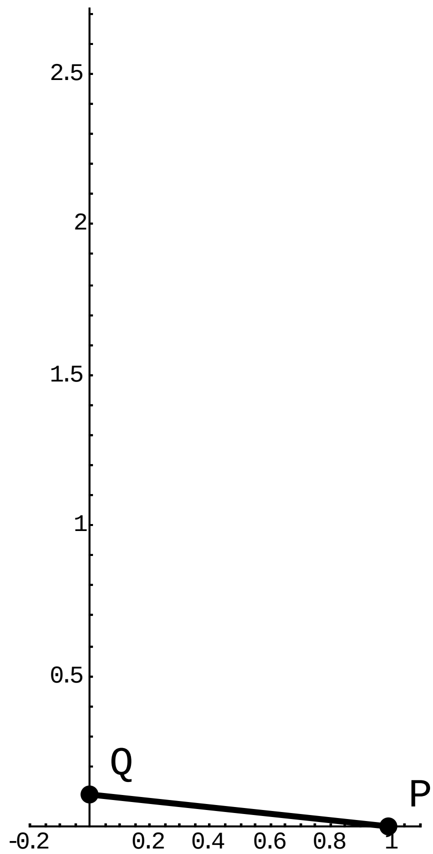
$$=-a\sin t+a\log\frac{\left(\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{t}{2}\right)}{\left(1-\tan\frac{t}{2}\times\tan\frac{\pi}{4}\right)}$$

tan の加法定理を使って

$$=-\sin t+\log\left\{\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

旭川医科大学に出題されたトラクトリックスの式であることがわかる。ただし x,y の変数が逆になっていることに注意しよう。

$a=1$ のとき Mathematica によるアニメーションを作成すると下図のようになる。



〔解答例〕

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t$$

$$\frac{dy}{dt}=-\cos t+\frac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)}}{\tan\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)}$$

$$=-\cos t+\frac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{t}{2}\right)^2}}{\dfrac{1+\tan\dfrac{t}{2}}{1-\tan\dfrac{t}{2}}}$$

$$=-\cos t+\frac{\dfrac{1}{\left(\cos\dfrac{t}{2}-\sin\dfrac{t}{2}\right)^2}}{\dfrac{\cos\dfrac{t}{2}+\sin\dfrac{t}{2}}{\cos\dfrac{t}{2}-\sin\dfrac{t}{2}}}$$

$$=-\cos t+\frac{1}{\left(\cos\dfrac{t}{2}-\sin\dfrac{t}{2}\right)^2}\times\frac{\cos\dfrac{t}{2}-\sin\dfrac{t}{2}}{\cos\dfrac{t}{2}+\sin\dfrac{t}{2}}$$

$$=-\cos t+\frac{1}{\cos^2\dfrac{t}{2}-\sin^2\dfrac{t}{2}}$$

$$=-\cos t+\frac{1}{\cos t}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-\cos t+\dfrac{1}{\cos t}}{-\sin t}=\frac{\cos t}{\sin t}-\frac{1}{\sin t\cos t}$$

$$=\frac{\cos^2 t-1}{\sin t\cos t}=-\frac{\sin^2 t}{\sin t\cos t}=-\tan t\cdots\text{（答）}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-\sin t}$$

$$=\frac{1}{\sin t\cos^2 t}\cdots\text{（答）}$$

点 $P\left(\cos t,-\sin t+\log\left\{\tan\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}\right),\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

における接線の方程式を求める。

$\dfrac{dy}{dx}=-\tan t$ より

接線；

$$y=-\tan t\,(x-\cos t)-\sin t+\log\left\{\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$x=0$ を代入して、ｙ軸との交点Ｑを求めると

$$y=\tan t\cos t-\sin t+\log\left\{\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\log\left\{\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

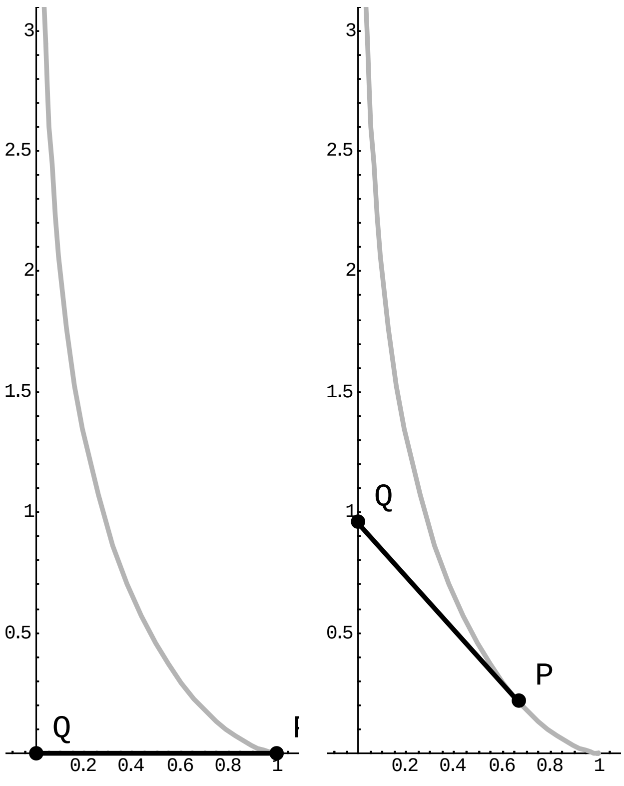
点 $Q\left(0,\log\left\{\tan\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}\right)$

距離公式より

$$PQ^2=\cos^2 t+\sin^2 t$$

$$=1$$

線分 PQ＝1 となり一定の長さになる。



第２話　縮閉線　　極率円との関係について

Exercise3　2004 年名古屋市立大・医学部

曲線Ｃ： $y=x^2$ 上の２点 $P\left(t,t^2\right), Q\left(t+h,(t+h)^2\right)$においてそれぞれの法線を引く。法線の交点をＲとし、$h\to 0$としたときのＲの極限を R_0 とする。

（１） R_0 の座標を t を用いて表せ。

（２）点 P が曲線Ｃ上を動くとき、点 R_0 の軌跡を $y=f(x)$ の形で表せ。

（３）（２）で求めた $y=f(x)$ のグラフの増減、凹凸を調べて概形を書け。

（１） $\dfrac{dy}{dx}=2x$ より、点 $P\left(t,t^2\right)$における法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2t}(x-t)+t^2 \qquad\qquad y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}\cdots①$$

同様に、点 $Q\left(t+h,(t+h)^2\right)$における法線の方程式は

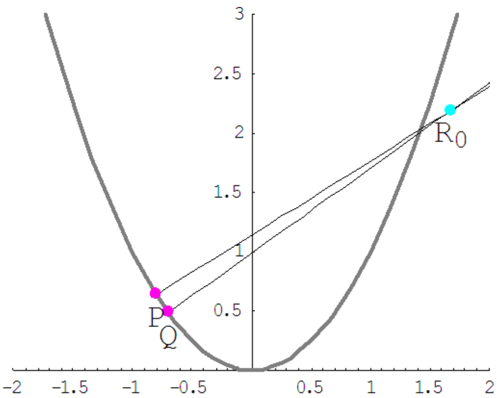
$$y=-\frac{1}{2(t+h)}x+(t+h)^2+\frac{1}{2}\cdots②$$

①,②を連立方程式として解く

$$x=-2t(t+h)(2t+h),\ y=(t+h)(2t+h)+t^2+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to 0}x=\lim_{h\to 0}\{-2t(t+h)(2t+h)\}=-4t^3$$

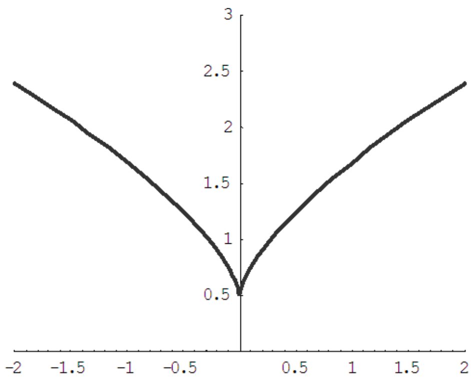
$$\lim_{h\to 0}\left\{(t+h)(2t+h)+t^2+\frac{1}{2}\right\}=3t^2+\frac{1}{2} \qquad R_0\left(-4t^3, 3t^2+\frac{1}{2}\right)$$



（２） $\begin{cases} x=-4t^3 \\ y=3t^2+\dfrac{1}{2} \end{cases}$ から t を消去する。

$x=-4t^3$ より、$t=\left(-\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ を $y=3t^2+\dfrac{1}{2}$ へ代入する。

点 R_0 の軌跡の方程式は、　$y=3\left(-\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}\cdots③$



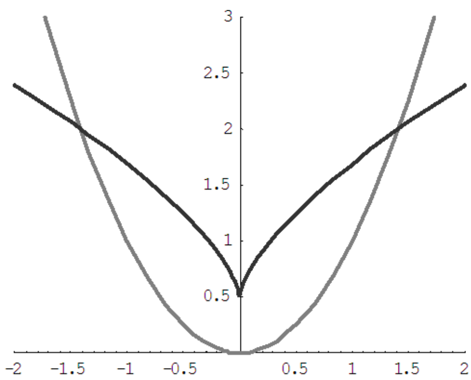
（３）

$y=3\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}$ より

$$y'=2\left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}$$

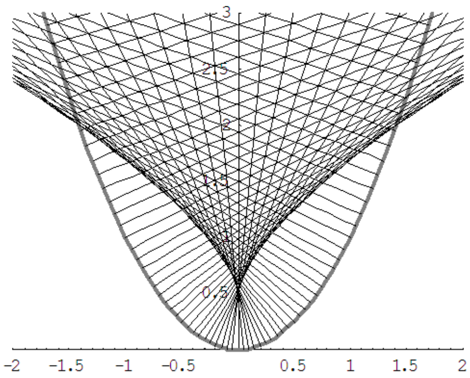
$$y''=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	－		＋
y''	－		＋
y	↘	$\frac{1}{2}$	↗



【微分法による包絡線を求める方法】

点$P(t,t^2)$における法線の方程式；$y=-\dfrac{1}{2t}x+t^2+\dfrac{1}{2}\cdots④$



tをパラメーターとして①をtで微分する。

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2t^2}x+2t=\dfrac{4t^3+x}{2t^2}$　$\dfrac{dy}{dt}=0$のとき$x=-4t^3\cdots⑤$

$t=\left(-\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\cdots⑥$　⑤を④へ代入すると　$y=3t^2+\dfrac{1}{2}\cdots⑦$

⑥を⑦へ代入すると　$y=3\left(-\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}\cdots⑧$

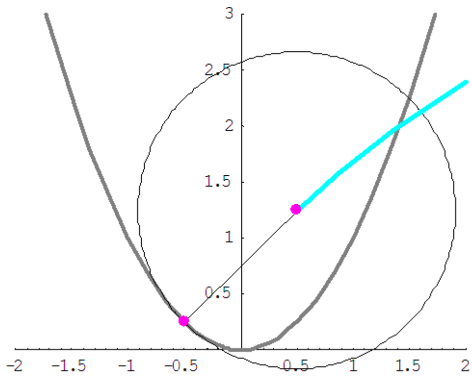
【比較；③と⑧は一致する。】

KeyWord　曲率円　曲率中心　曲率

1671 年出版されたニュートン著『流率論』によると、曲線$y=f(x)$と曲線上の点$P(a,f(a))$が与えられたとき、aの近くで曲線$y=f(x)$を円に近似する。この円を**曲率円**、中心を**曲率中心、**曲率円の半径の逆数を、$P(a,f(a))$での**曲率**と定義する。

$y=f(x)$の点$x=a$における法線：

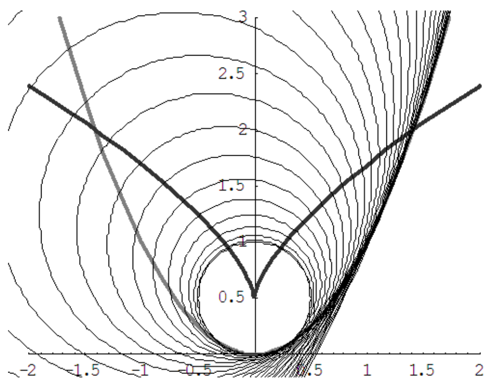
$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)\cdots⑨$$



疑問点；aをパラメーターとして法線①の通過領域の包絡線は何を意味するのだろうか？

右図よりaを無限に小さく動かすと、法線は動かす法線と曲率中心で交わる。
法線の包絡線は曲率中心の軌跡を表している。
①をaについて微分すると

$$\frac{dy}{da}=f'(a)+\frac{f''(a)}{(f'(a))^2}(x-a)+\frac{1}{f'(a)}$$



$\dfrac{dy}{da}=0$を満たすxを求めると

$$x_0=a-\frac{\{1+(f'(a))^2\}f'(a)}{f''(a)}\cdots⑩$$

⑩を⑨へ代入すると、　$y_0=f(a)+\dfrac{1+(f(a))^2}{f''(a)}\cdots⑪$

⑩⑪は曲率中心を表す。

曲率半径$r=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-f(a))^2}=\dfrac{\left(1+(f'(a))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(a)|}\cdots⑫$

KeyWord　縮閉線

曲線$y=f(x)$とaをパラメーターとする曲線上の点$P(a,f(a))$における曲率中心の軌跡を縮閉線と定義する。

Theorem　縮閉線と包絡線

縮閉線が曲線$y=f(x)$の法線族の包絡線である。

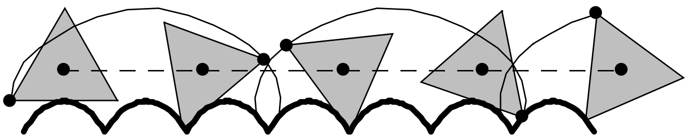
第 3 話　ルーレット　　Roulette 回転する正多角形について

“Roulette”とは “Mathematica in Action” に記述されている多角形の回転である。

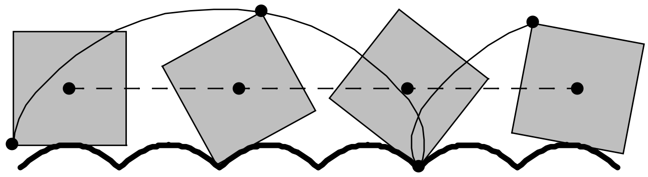
カテナリー曲線 $y=-\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 上を正多面体が滑ることなく回転している様子が描かれている。

http://mathworld.wolfram.com/notebooks/Curves/Roulette.nb.　　by Eric W. Weisstein　May 2, 2004

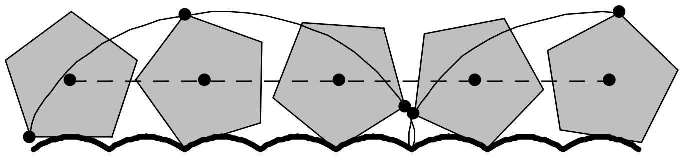
には、正三角形,正四角形,正五角形,正六角形が曲線上を回転している様子がある。



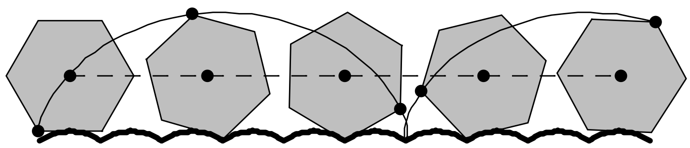
【正三角形】



【正四角形】



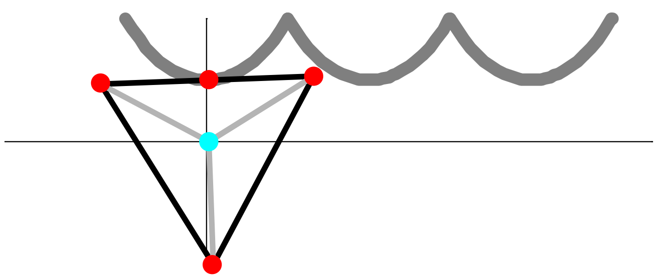
【正五角形】

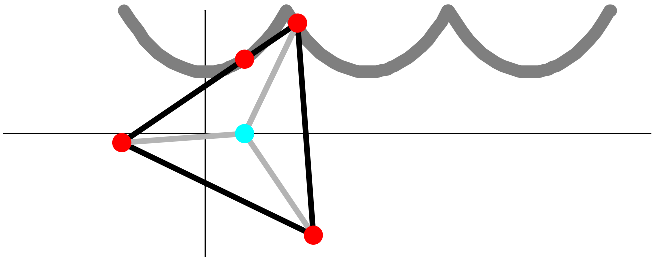


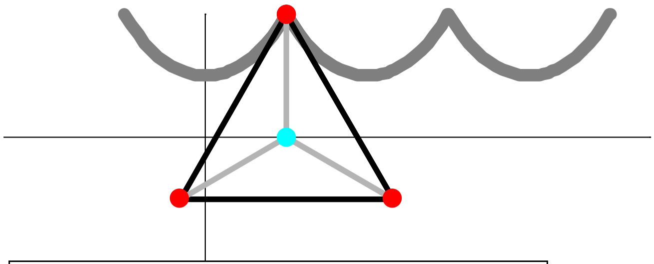
【正六角形】

上図から、多角形の中心の y 成分が一定の値をとりながら回転している様子が理解できる。

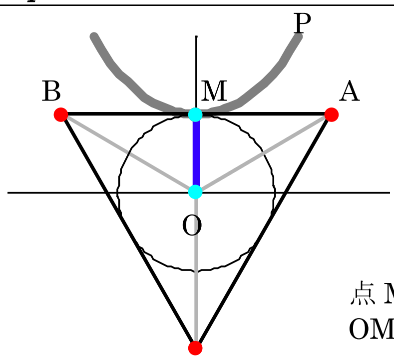
“MathWorld” とは x 軸と線対称なカテナリー $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ の下を正三角形が滑ることなく回転する場合について分析してみよう。







Step 1　正三角形の 1 辺の長さを求める。



点 M は辺 AB の中点

OM= a

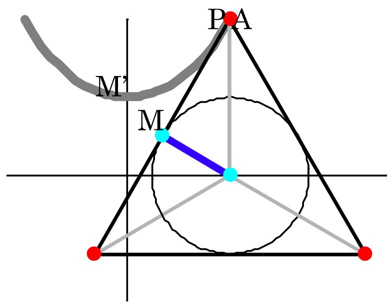
この正三角形は原点 O を中心とする半径 a の円に外接する正三角形であることから

OM：OA：MA＝1 ： 2 ： $\sqrt{3}$

1 辺の長さ AB＝l とすると、MA＝$\sqrt{3}a$ より

$l=2\sqrt{3}\,a$

Step 2　孤 M'P=MA なる点 P の座標を求める。



$MP=MA=\frac{l}{2}$ となる P の x 座標 p を求める。

カテナリー曲線；$f(x)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ とおく

$\int_0^p \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\sqrt{3}\,a$ なる p を求める。

微分すると　$f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$

$$1+f'(x)^2=1+\frac{e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}}{4}$$

$$=\frac{e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}}{4}$$

$$=\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^2$$

$$\int_0^p \frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}dx=\sqrt{3}a$$

$$\frac{a}{2}\left[e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right]_0^p=\sqrt{3}a$$

$$e^{\frac{p}{a}}-e^{-\frac{p}{a}}=2\sqrt{3}$$

$$e^{\frac{p}{a}}-\frac{1}{e^{\frac{p}{a}}}=2\sqrt{3}$$

$X=e^{\frac{p}{a}}$ とおくと $X-\dfrac{1}{X}=2\sqrt{3}$

$$X^2-2\sqrt{3}X-1=0$$

$$X=\sqrt{3}\pm 2$$

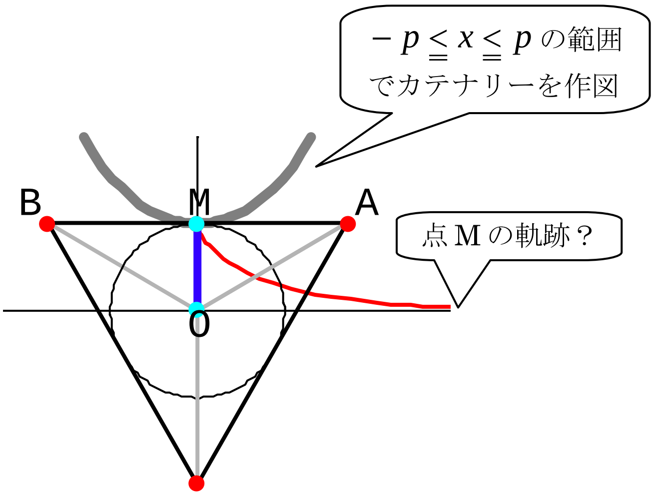
$X>0$ より　$X=\sqrt{3}+2$

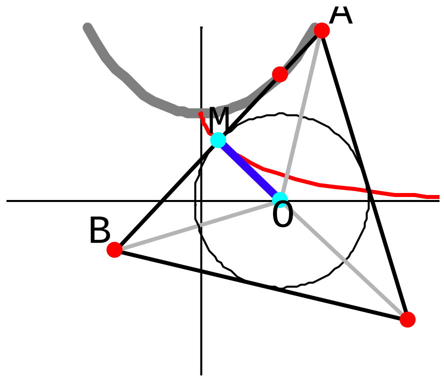
$$e^{\frac{p}{a}}=\sqrt{3}+2$$

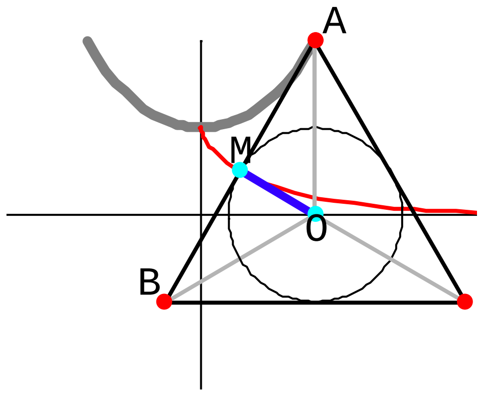
$$\frac{p}{a}=\log\left(\sqrt{3}+2\right)$$

$$p=a\log\left(\sqrt{3}+2\right)$$

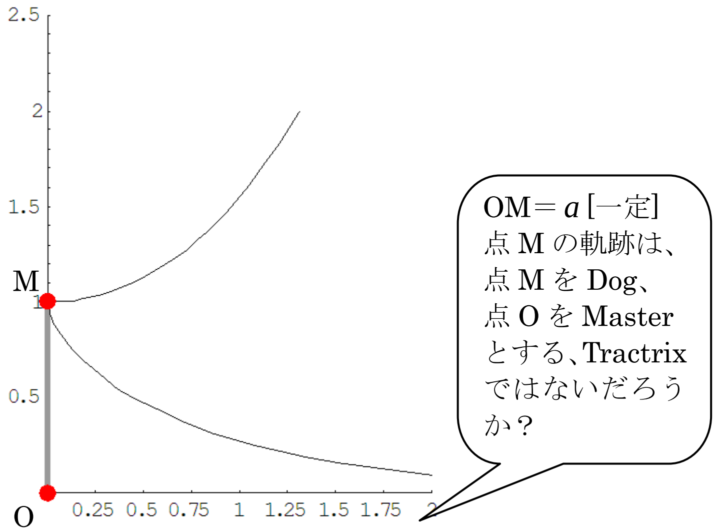
$-p\leqq x\leqq p$ の範囲のカテナリー上を正三角形は回転する。このとき、辺 AB の中点 M の軌跡はどうなるのだろうか？

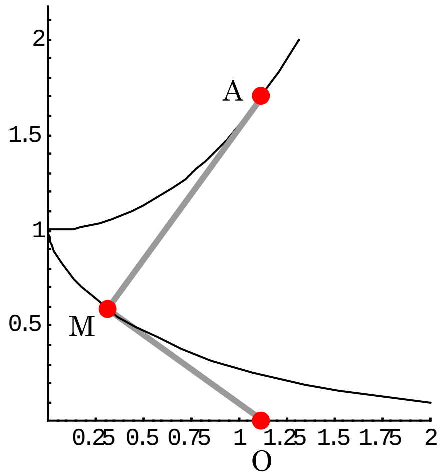






Step 3　必要な部分を CloseUp してみる！





予測　**Catenary と Tractrix**

Tractrix の縮閉線が Catenary になる。
Catenary の伸開線が Tractix になる。

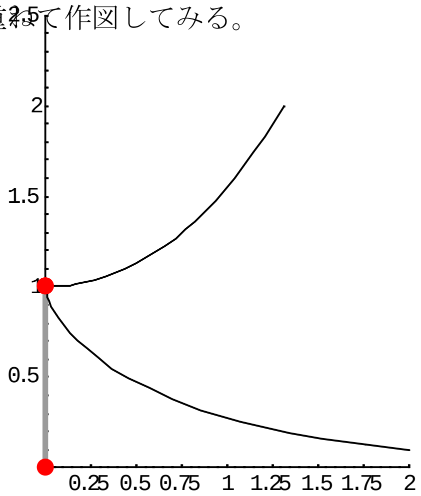
Exercise 4　カテナリーとトラクトリックスとの重大な関係

カテナリー $y=a\cosh\dfrac{x}{a}=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ はトラクトリックス $\begin{cases} y=a\sin t \\ x=a\cos t+a\log\tan\dfrac{t}{2}\end{cases}$ $\left(\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi\right)$ の縮閉線になる。

カテナリー曲線 C ; $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$

トラクトリックス T ; $\begin{cases} y=a\sin t \\ x=a\cos t+a\log\tan\dfrac{t}{2}\end{cases}$

を重ねて作図してみる。



カテナリーがトラクトリックスの縮閉線になっていることが予想される。

Step 1　トラクトリックス上の法線を求める。

トラクトリックス T ; $\begin{cases} y=a\sin t \\ x=a\cos t+a\log\tan\dfrac{t}{2}\end{cases}$ 上

の点 D における法線の方程式を求める。

$$\frac{dy}{dt}=a\cos t,\ \frac{dx}{dt}=-a\sin t+a\frac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{t}{2}}}{\tan\dfrac{t}{2}}$$

$$=-a\sin t+\frac{a}{\sin t}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{a\cos t}{-a\sin t+\dfrac{a}{\sin t}}=\frac{a\sin t\cos t}{a\left(1-\sin^2 t\right)}=\frac{\sin t}{\cos t}$$

$$=\tan t$$

接線 DM の傾き＝$\tan t$

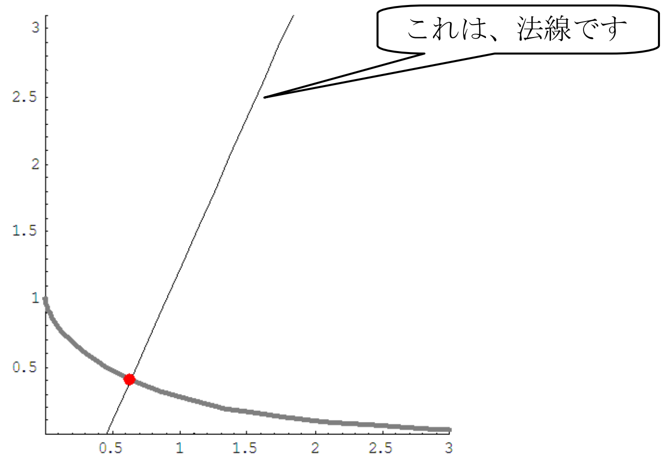
法線 DP の傾き＝$-\dfrac{1}{\tan t}$

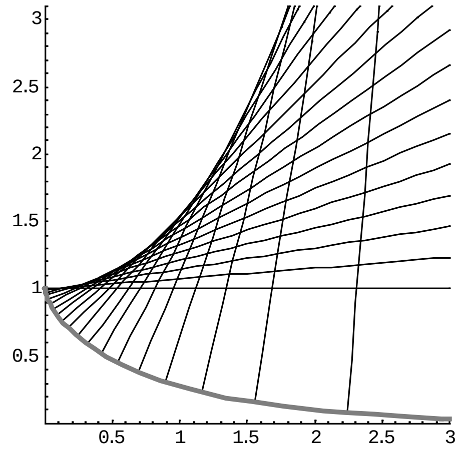
法線の方程式；

$$y=-\frac{1}{\tan t}\left(x-a\cos t-a\log\tan\frac{t}{2}\right)+a\sin t$$

展開してまとめると

$$y=-\frac{\cos t}{\sin t}x+\frac{a\cos t}{\sin t}\log\tan\frac{t}{2}+\frac{a}{\sin t}\ \cdots\ （法線）$$





Step 2　トラクトリックスの曲率中心を求める。

$$\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)'=-\frac{1}{\sin^2 t},\ \left(\log\tan\frac{t}{2}\right)'=\frac{1}{\sin t}$$

$\left(\dfrac{1}{\sin t}\right)'=-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}$ を活用して

この法線を t に関して微分してみよう。

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)x+a\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\log\tan\frac{t}{2}$$

$$+a\frac{\cos t}{\sin t}\times\frac{1}{\sin t}+a\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)$$

$$=\frac{x}{\sin^2 t}-\frac{a}{\sin^2 t}\log\tan\frac{t}{2}+\frac{a\cos t}{\sin^2 t}-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}$$

$$=\frac{x-a\log\tan\frac{t}{2}}{\sin^2 t}$$

$\dfrac{\partial y}{\partial t}=0$ のときが極率中心を表すので、

$$x=a\log\tan\frac{t}{2}$$

（法線）へ代入して

$$y=-a\frac{\cos t}{\sin t}\log\tan\frac{t}{2}+a\frac{\cos t}{\sin t}\log\tan\frac{t}{2}+\frac{a}{\sin t}$$

$$=\frac{a}{\sin t}$$

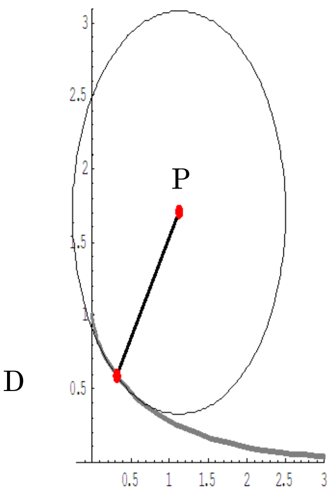
曲率中心 $P\left(a\log\tan\dfrac{t}{2},\dfrac{a}{\sin t}\right)$

曲率半径 r

$$r^2=\left(a\cos t+a\log\tan\frac{t}{2}-a\log\tan\frac{t}{2}\right)^2+\left(a\sin t-\frac{a}{\sin t}\right)^2$$

$$r^2=-a^2+\frac{a^2}{\sin^2 t}=\frac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t}=\frac{a^2}{\tan^2 t}$$

$$r=\frac{a}{\tan t}$$



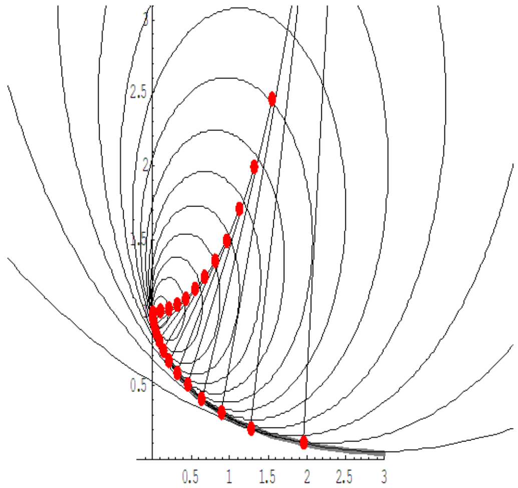
Step 3　曲率中心の軌跡を求める。

曲率中心の軌跡の方程式、t をパラメーターとする法線の包絡線の方程式を求めてみよう。

$X=a\log\tan\dfrac{t}{2}, Y=\dfrac{a}{\sin t}$ より t を消去する。

$$\frac{X}{a}=\log\tan\frac{t}{2}$$

$$\frac{X}{a}\log e=\log\tan\frac{t}{2}$$



$$\log e^{\frac{X}{a}}=\log\tan\frac{t}{2} \qquad e^{\frac{X}{a}}=\tan\frac{t}{2}\cdots①$$

$\tan\dfrac{t}{2}=u$ とおくと、

$\sin t=\dfrac{2u}{1+u^2}$ を $Y=\dfrac{a}{\sin t}$ へ代入して

$$Y=\frac{a\left(1+u^2\right)}{2u}$$

①より $u=e^{\frac{X}{a}}$ を代入すると

$$Y=\frac{a\left(1+e^{\frac{2X}{a}}\right)}{2\times e^{\frac{X}{a}}}$$

分母分子に $e^{-\frac{X}{a}}$ をかけると

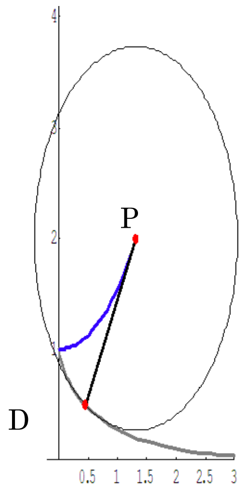
$$Y=\frac{a\left(1+e^{\frac{2X}{a}}\right)\times e^{-\frac{X}{a}}}{2\times e^{\frac{X}{a}}\times e^{-\frac{X}{a}}} \qquad Y=\frac{a\left(e^{\frac{X}{a}}+e^{-\frac{X}{a}}\right)}{2}$$

となり、曲率中心の軌跡はカテナリーである。
各点の座標をまとめると

$$D\left(a\cos t+a\log\tan\frac{t}{2},a\sin t\right)$$

$$P\left(a\log\tan\frac{t}{2},\frac{a}{\sin t}\right)$$

$$M\left(a\log\tan\frac{t}{2},0\right)$$



Exercise 5　1995 年大阪大学

$f(x)=-\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ とおき、曲線 C； $y=f(x)$を考える。１辺の長さ a の正三角形 PQR は最初、辺 QR の中点 M が曲線 C 上の点$(0,\ f(0))$に一致し、QR が C に接し、さらに P が $y>f(x)$の範囲にあるようにおかれている。ついで、△PQR が曲線 C に接しながら滑ることなく右に傾いてゆく。最初の状態から、点 R が初めて曲線 C 上にくるまでの間、点 P の y 座標が一定であるように、a を定めよ。

〔解答例１〕 $M_0(0,\ f(0))$とする。

線分 $MR=\dfrac{a}{2}$ が曲線 C の上を接しながら滑ることなく傾き R が曲線 C と交わる点を $R'(t,\ f(t))$とおく。t の値を求めよう。

曲線 C 上の距離 $M_0R'=\dfrac{a}{2}$

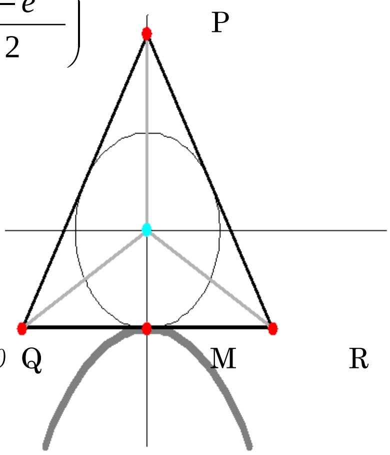
$\displaystyle\int_0^t\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\frac{a}{2}$　となる x の値 t を求める。

$$1+f'(x)^2=1+\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$$

$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$$

$$=\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2$$ より



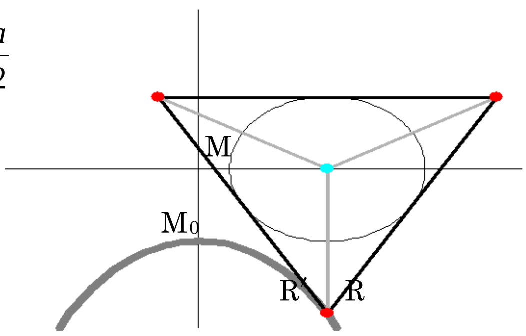
$$\int_0^t\sqrt{\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\frac{a}{2}$$

$$\int_0^t\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\,dx=\frac{a}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left[e^{x}-e^{-x}\right]_0^t=\frac{a}{2}$$

$$e^{t}-e^{-t}=a$$

$$e^{t}-\frac{1}{e^{t}}=a$$



$$\left(e^{t}\right)^2-a\,e^{t}-1=0$$

$e^{t}=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$　$e^{t}>0$ より $e^{t}=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$

$$t=\log\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$$

C 上の点 R' の y 成分を求める。

$f(t)=-\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}$ へ $e^{t}=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ を代入すると

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}+\frac{2}{a+\sqrt{a^2+4}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}$$

$$R'\left(\log\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}\right)$$ ・・・（＃）

$y=f(x)$上の点 $R'(t,\ f(t))$における接線の傾きを求める。

$f(x)=-\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$　　$f'(x)=-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

$x=t$ を代入すると

$f'(t)=-\dfrac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)$ へ $e^{t}=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ を代入

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}-\frac{2}{a+\sqrt{a^2+4}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}-\frac{2\left(a-\sqrt{a^2+4}\right)}{a^2-\left(a^2+4\right)}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right)$$

$=-\dfrac{a}{2}\cdots$（接線の傾き）

この接線と x 軸とのなす角を θ とすると

$$\tan\theta=-\frac{a}{2}$$

正三角形 PQR の頂点 P を中心にして点 R を θ 回転した点の座標 R'' を求める。

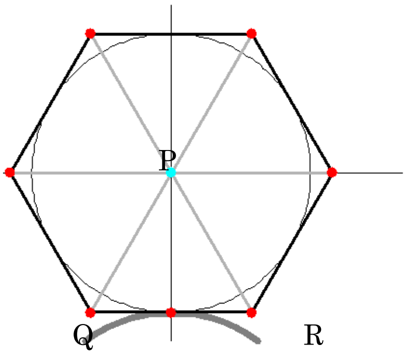
$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ へ $\tan\theta=-\dfrac{a}{2}$ を代入する

$$1+\frac{a^2}{4}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\cos^2\theta=\frac{4}{a^2+4}$$

$\cos\theta>0$ より

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{a^2+4}}$$



$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ より

$$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta$$

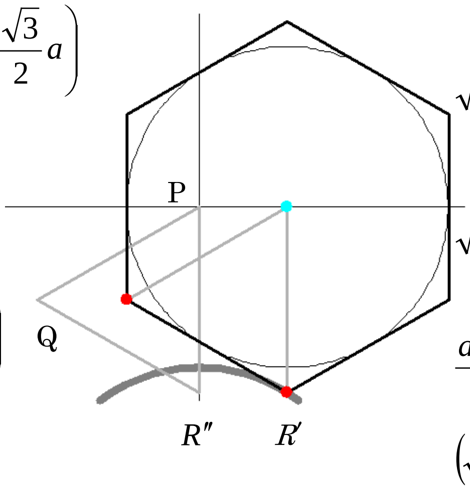
$$\sin\theta=-\frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$$

点 $R\left(\dfrac{a}{2},-1\right)$ が点 $P\left(0,-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ を中心に θ 回転すると $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{OP}$ ・・・（＊）

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$$

$$=\left(\frac{a}{2},-1\right)-\left(0,-1+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$

$$=\left(\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$



$$\overrightarrow{OP}=\left(0,-1+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$

を（＊）へ代入

R'' は $\overrightarrow{PR}$ を点 P を中心に θ 回転した点である。

（＊）より

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{a}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{a}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\sin\theta\\ \dfrac{a}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\cos\theta-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\end{pmatrix}$$

$\sin\theta=-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+4}}$, $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+4}}$ を代入して

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+4}}-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+4}}\\ -\dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2+4}}-\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+4}}-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\end{pmatrix}\ \cdots(\$)$$

点 P を中心として回転するので

R' と R'' の y 成分は一致する。

（＃）の y 成分＝（＄）の y 成分

$$-\frac{a^2}{2\sqrt{a^2+4}}-\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+4}}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}a=-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}$$

両辺に $\sqrt{a^2+4}$ をかけて分母を払う

$$-\frac{a^2}{2}-a\sqrt{3}-\sqrt{a^2+4}+\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{a^2+4}=-\frac{1}{2}a^2-2$$

$\sqrt{a^2+4}$ でくくり因数分解すると

$$\sqrt{a^2+4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-1\right)=a\sqrt{3}-2$$

$$\sqrt{a^2+4}\left(\frac{a\sqrt{3}-2}{2}\right)-\left(a\sqrt{3}-2\right)=0$$

$$\frac{a\sqrt{3}-2}{2}\left(\sqrt{a^2+4}-2\right)=0$$

$$\left(\sqrt{3}a-2\right)\left(\sqrt{a^2+4}-2\right)=0$$

$a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ または $\sqrt{a^2+4}=2$

$$a^2+4=4$$

$a=0$ （不適）

$a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ・・・(答)