第 84 回数学教育研究会平成 25 年 1 月 26 日（土）
ニッセイ MK ビル 6 階会議室

大学入試問題分析

幾何学的イメージを重視した積分技法

積分の視覚的指導方法

松本睦郎（札幌北高等学校）

　理系大学入試問題には、様々な積分計算問題が出題される。置換積分や線対称、点対称な関数の積分の仕組みを視覚化して指導する技法をまとめた。

Episode 1　置換積分を見る

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{4x}{1+x^2}dx$$

を計算せよ。

[解答]

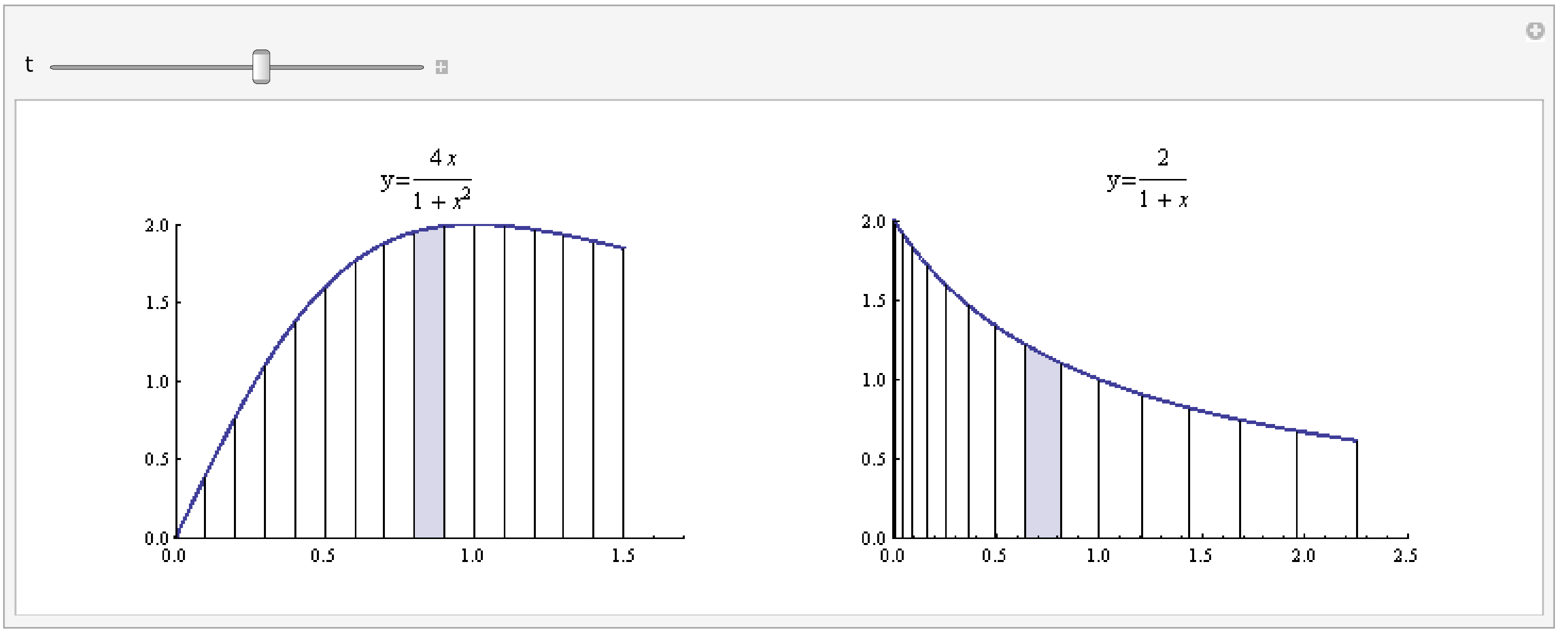
$$z = x^2$$

とおくと

$$dz = 2xdx$$

x	$0 \to \frac{3}{2}$
z	$0 \to \frac{9}{4}$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{4x}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{9}{4}} \frac{2}{1+z}dz = 2[log(1+z)]_0^{9/4} = 2log\frac{13}{4}$$



左図と右図の面積は同じである。

■

Episode 2　線対称な関数の積分

曲線$y=f(x)$が直線$x=a$に関して線対称であるとき、
の時、

$$\int_0^{2a} xf(x)dx = a\int_0^{2a} f(x)dx$$

Proof

「曲線$y=f(x)$が直線$x=a$に関して線対称である。」とは、

$$\frac{x+t}{2}=a$$

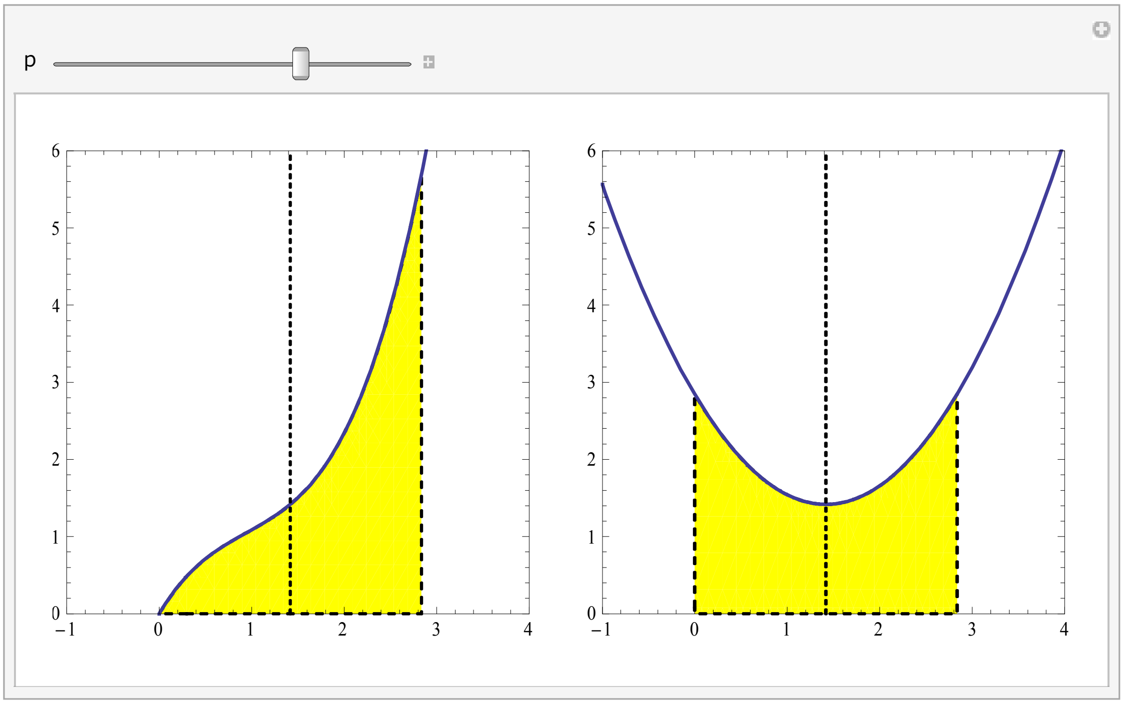
$$t=2a-x$$

このとき、$f(t)=f(x)$

$$f(2a-x)=f(x)$$

$$x=a$$

Out[343]=



$t=2a-x$として変数変換する。

$$dt=-dx$$

x	$0\to 2a$
t	$2a\to 0$

$$左辺 = \int_0^{2a} xf(x)dx$$

$$=\int_{2a}^{0}(2a-t)f(2a-t)(-1)dt = \int_0^{2a}(2a-t)f(t)dt = 2a\int_0^{2a} f(t)dt - \int_0^{2a} tf(t)\,dt$$

$$=2a\int_0^{2a} f(x)dx - \int_0^{2a} xf(x)dx$$

$$2\int_0^{2a} xf(x)dx = 2a\int_0^{2a} f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^{2a} xf(x)dx = a\int_0^{2a} f(x)dx$$

■

Episode 3　点対称な関数の積分

曲線$y=f(x)$が点$P\big(a,f(a)\big)$に関して点対称であるとき

$$\int_0^{2a} f(x)dx = 2a \times f(a)$$

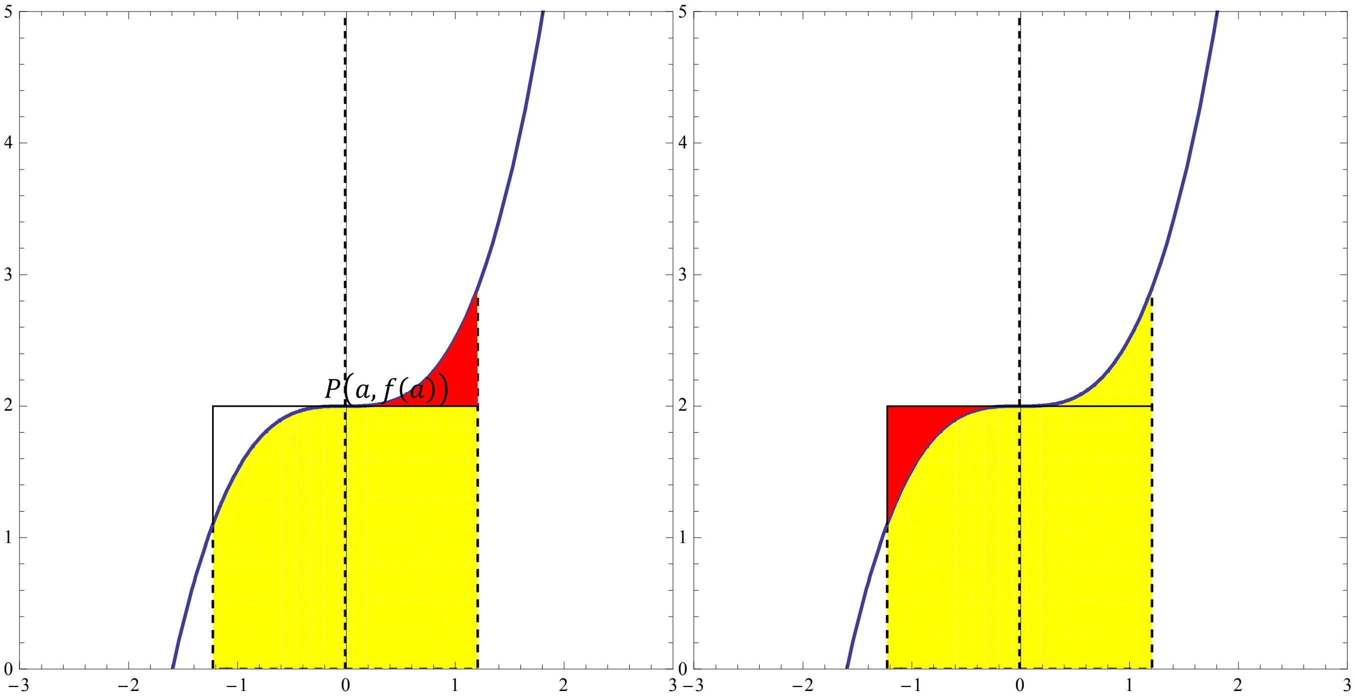
Proof

「曲線$y=f(x)$が点$P\big(a,f(a)\big)$に関して点対称である」とは、

$$\frac{x+t}{2}=a, \frac{f(x)+f(t)}{2}=f(a)$$

$$x=2a-t, f(t)=2f(a)-f(x)$$

$$\therefore f(2a-x)=2f(a)-f(x)$$



$x=2a-t$として変数変換する。

$$dt=-dx$$

x	$0 \to 2a$
t	$2a \to 0$

$$\text{左辺} = \int_0^{2a} f(x)dx$$

$$= \int_{2a}^{0} f(2a-t)(-1)dt = \int_0^{2a} f(2a-t)dt = \int_0^{2a} \big(2f(a)-f(t)\big)dt$$

$$= 2a \times 2f(\mathrm{a}) - \int_0^{2a} f(x)dx$$

$$\therefore 2\int_0^{2a} f(x)dx = 4af(a)$$

■

Episode 4　線対称関数×点対称関数の積分

$b, k > 0$となる定数$0 \leq x \leq b$を満たす、すべての実数xにおいて連続な関数$g(x), h(x)$が存在し、

$$g(x) = g(b-x)$$
$$h(x) + h(b-x) = k$$

を満たしている。

このとき、

$$\int_0^b g(x)\,h(x)dx = \frac{1}{2}k\int_0^b g(x)dx$$

Proof

$$g(x) = g(b-x) \leftrightarrow \text{「}y = g(x)\text{は}x = \frac{b}{2}\text{に関して線対称である。」}$$

$$\int_0^b g(x)dx = 2\int_0^{\frac{b}{2}} g(x)dx$$

$$h(x) + h(b-x) = k \leftrightarrow \text{「}y = h(x)\text{は}\left(\frac{b}{2}, \frac{k}{2}\right)\text{に関して点対称である。」}$$

$$I = \int_0^b g(x)h(x)dx$$

$$t = b - x$$

とおく、

x	$0 \to b$
t	$b \to 0$

$$I = \int_b^0 g(b-t)h(b-t)(-dt) = \int_0^b g(b-t)h(b-t)dt$$

$$g(b-x) = g(x), h(b-x) = k - h(x)$$

$$I = \int_0^b g(t)\{k - h(t)\}dt$$

$$I = k\int_0^b g(t)dt - \int_0^b g(t)h(t)dt = k\int_0^b g(t)dt - I$$

$$2I = k\int_0^b g(t)dt$$

$$I = \frac{k}{2}\int_0^b g(x)dx$$

Episode 5

（１）関数$f(x)$に対し、

$$\int_0^{\pi} xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)dx$$

を証明せよ。

（２）定積分

$$\int_0^{\pi} \frac{xsinx}{1+sin^2x}dx$$

を求めよ。

Proof

$y = \sin x \quad (0 \le x \le \pi)$は、$x = \frac{\pi}{2}$に関して線対称である。

$$\frac{x+t}{2} = \frac{\pi}{2}$$
$$x = \pi - t$$

とおく。

$$dx = -dt$$

x	$0 \to \pi$
t	$\pi \to 0$

$$I = \int_0^{\pi} xf(sinx)dx = \int_{\pi}^{0} (\pi - t)f\big(sin(\pi - t)\big)(-dt)$$

$$I = \int_0^{\pi} (\pi - t)f(sint)dt = \int_0^{\pi} \pi f(sint)dt - \int_0^{\pi} tf(sint)dt = \pi\int_0^{\pi} f(sint)dt - I$$

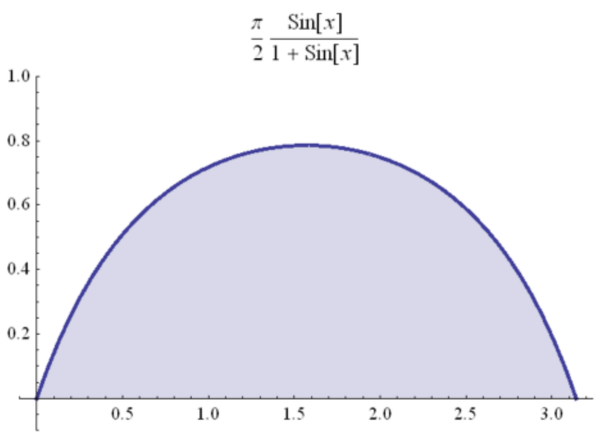
$$2I = \pi\int_0^{\pi} f(sinx)d\,x$$

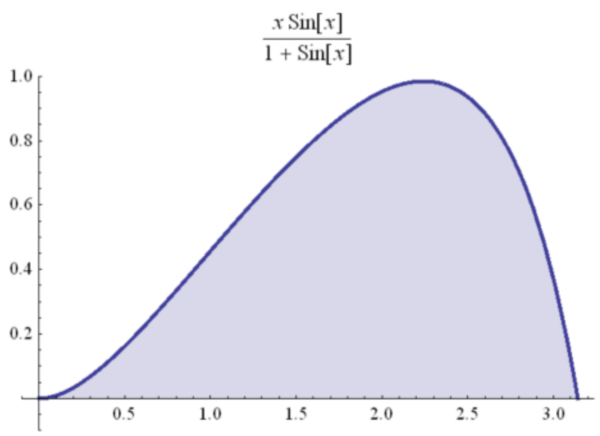
$$\therefore I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)dx$$

（２）

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

とおく。





$$\int_0^{\pi} \frac{xsinx}{1+sin^2x}dx = \int_0^{\pi} xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{sinx}{1+sin^2x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{sinx}{2-cos^2x}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{sinx}{(\sqrt{2}-cosx)(\sqrt{2}+cosx)}dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\left(\frac{sinx}{\sqrt{2}-cosx} + \frac{sinx}{\sqrt{2}+cosx}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[log(\sqrt{2}-cosx) - log(\sqrt{2}+cosx)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}log(\sqrt{2}+1)$$

■

Episode6　対称性を活用した技巧的積分

$$\int_0^a \frac{x^2}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

を計算せよ。

[解答]

≪Point≫ストレートに計算すると、壁にぶつかる積分

$x = asin\theta$ とおく、

$dx = acos\theta d\theta$

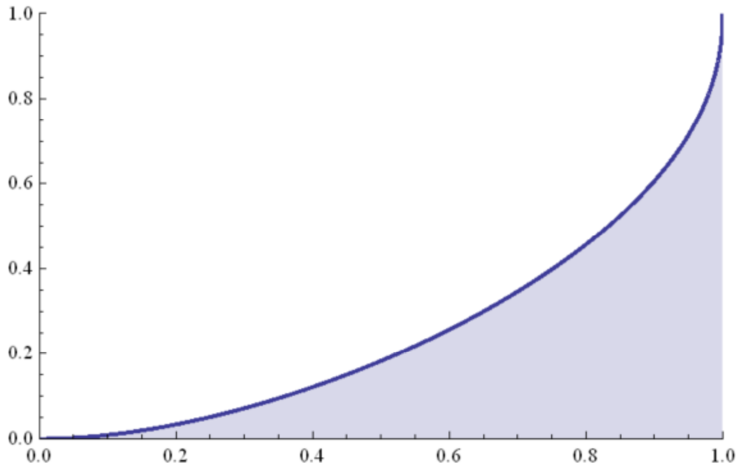
x	$0 \to a$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^a \frac{x^2}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

とおく。

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3 sin^2\theta cos\theta}{asin\theta + \sqrt{a^2(1-sin^2\theta)}}d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 sin^2\theta cos\theta}{sin\theta + cos\theta}d\theta \cdots ①$$

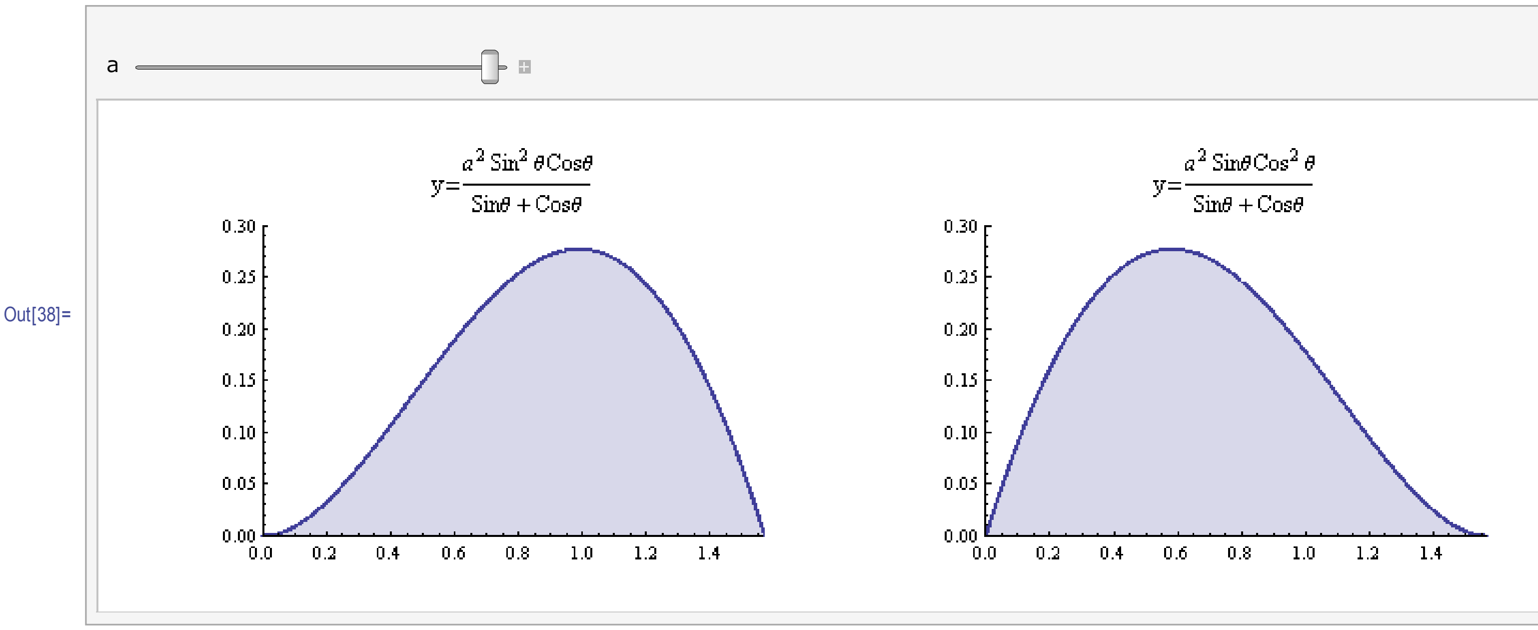


$x = acos$ とおく、

$dx = -asin\theta d\theta$

x	$0 \to a$
θ	$\frac{\pi}{2} \to 0$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-a^3 sin\theta cos^2\theta}{acos\theta + \sqrt{a^2(1-cos^2\theta)}}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 sin\theta cos^2\theta}{sin\theta + cos\theta}d\theta \cdots ②$$



①　+②

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{asin\theta cos\theta(sin\theta + cos\theta)}{sin\theta + cos\theta}d\theta = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta cos\theta d\theta = \frac{a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2\theta d\theta = \frac{a}{4}[-cos2\theta]_0^{\pi/2} = \frac{a}{2}$$

$$\therefore I = \frac{a}{4}$$

■

Episode7　2009 年札幌医科大学

定数$a > 0, 0 < b < \frac{1}{2}$に対し、$0 \leq x \leq \pi$で定義された関数

$$f(x) = a + tanbx$$

は条件

$$f(x)f(\pi - x) = c$$

を満たす。ただし、cは定数とする。

（１）aとbの関係式、およびaとcの関係式を求めよ。

以下$a = 2 + \sqrt{3}$とする。

（２）bとcの値を求めよ。

（３）定積分

$$\int_0^{\pi} logf(x)dx$$

の値を求めよ。

[解答]

（１） a と b の関係式を求める。

$f(x) = a + \tan bx$ より $f'(x) = b\dfrac{1}{\cos^2 bx} = b(1 + \tan^2 bx)$

$f(x)f(\pi - x) = c$ の両辺を x で微分すると　$f'(x) \times f(\pi - x) - f(x) \times f'(\pi - x) = 0$

$x = 0$ を代入すると　$f'(0) \times f(\pi) - f(0) \times f'(\pi) = 0$

$b(a + \tan b\pi) - ab(1 + \tan^2 b\pi) = 0$　$0 < b < \dfrac{1}{2}$ より両辺を b で割ると、

$a + \tan b\pi - a(1 + \tan^2 b\pi) = 0$

展開してまとめると、求める a と b の関係式は、

$1 - a\tan b\pi = 0 \cdots$（答）

次に、a と c の関係式を求める。

（ｉ） $f(x)f(\pi - x) = c$ へ $x = 0$ を代入する。

$c = f(0)f(\pi)$

$c = a(a + \tan b\pi)$

$c = a^2 + a\tan b\pi$

求める a と b の関係式$1 - a\tan b\pi = 0$ より $c = a^2 + 1 \cdots$（答）

（２）

$a = 2 + \sqrt{3}$ を $c = a^2 + 1$ へ代入すると、$c = 8 + 4\sqrt{3} \cdots$（答）

$1 - a\tan b\pi = 0$ へ代入すると、$\tan b\pi = 2 - \sqrt{3}$

≪Point≫ $\tan b\pi = 2 - \sqrt{3}$ から直接bの値を求めることはできない。

$\tan 2b\pi = \dfrac{2\tan b\pi}{1 - \tan^2 b\pi} = \dfrac{2(2 - \sqrt{3})}{1 - (2 - \sqrt{3})^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。

$0 < b < \dfrac{1}{2}$ より $0 < 2b\pi < \pi$ の範囲で $\tan 2b\pi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

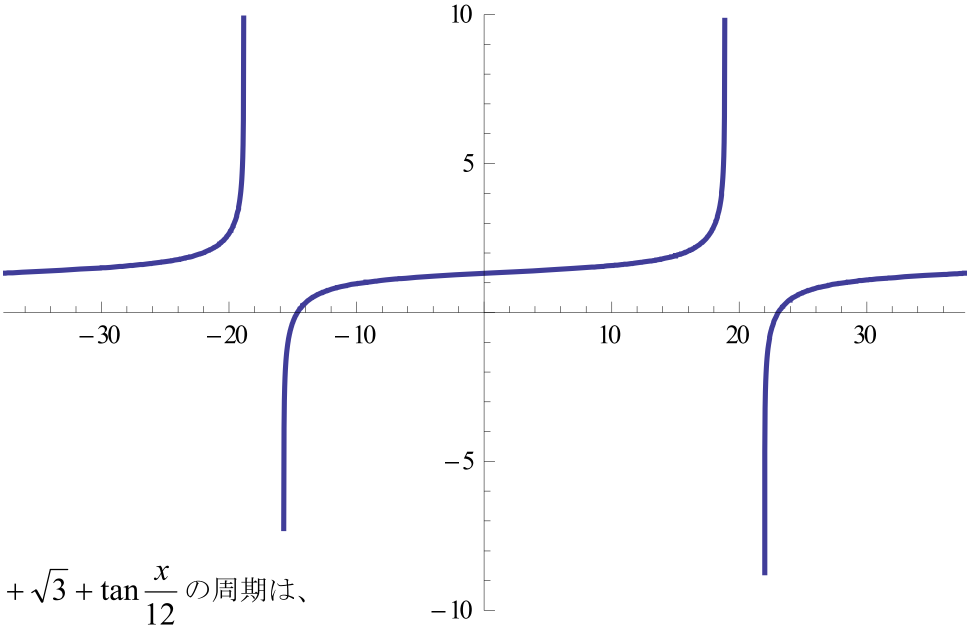
$2b\pi = \dfrac{\pi}{6}$

$b = \dfrac{1}{12} \cdots$（答）

（3）

$f(x)=2+\sqrt{3}+\tan\dfrac{x}{12}$

を $0<x<\pi$ の範囲でグラフを作成すると下図になる。

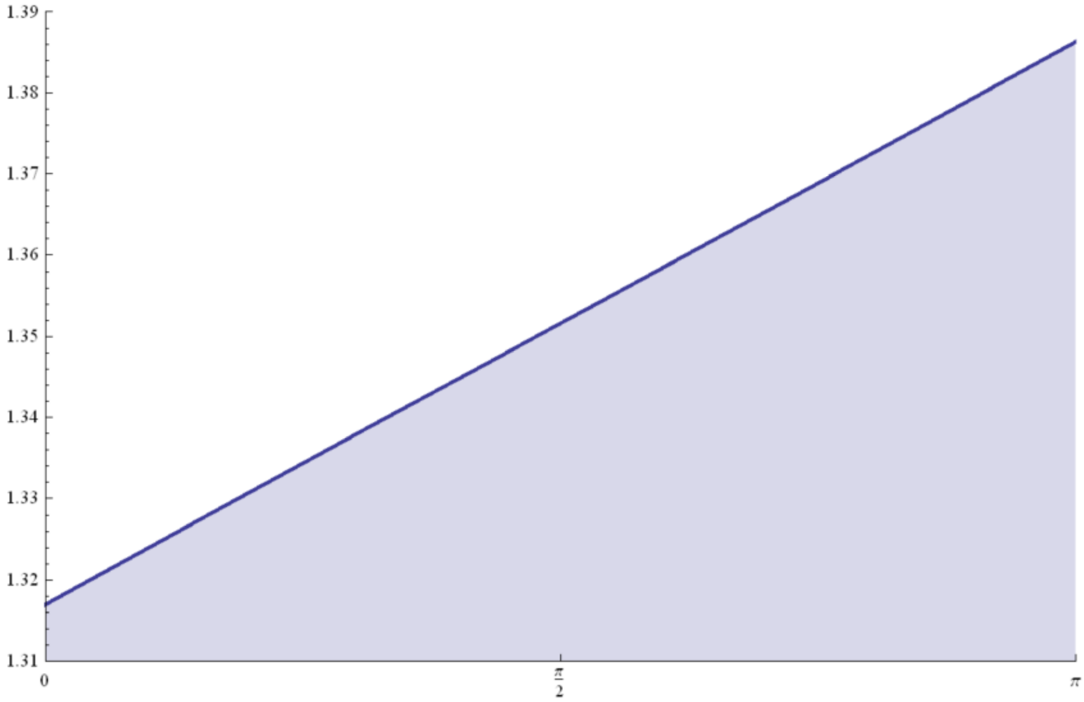


$f(x)=2+\sqrt{3}+\tan\dfrac{x}{12}$ の周期は、

12π となり、$0<x<\pi$ では、

$f(x)>0$ となる。

$\displaystyle\int_0^{\pi}\log\left(2+\sqrt{3}+\tan\frac{x}{12}\right)dx$ を求める。



≪**Point**≫ $\int_0^{\pi}\log\left(2+\sqrt{3}+\tan\dfrac{x}{12}\right)dx$ を直接計算で求めることは複雑化を招く。

$$I=\int_0^{\pi}\log f(x)dx$$

とおき、

$$f(x)f(\pi-x)=c$$

を活用する。

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\log\frac{c}{f(\pi-x)}dx=\int_0^{\pi}\{\log c-\log f(\pi-x)\}dx \quad c=8+4\sqrt{3}\text{ より}$$

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\log(8+4\sqrt{3})dx-\int_0^{\pi}f(\pi-x)dx \quad t=\pi-x\text{ とおくと、}dt=-dx$$

x	; $0\to\pi$
t	; $\pi\to 0$

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\log(8+4\sqrt{3})dx+\int_{\pi}^{0}f(t)dt=\int_0^{\pi}\log(8+4\sqrt{3})dx-\int_0^{\pi}f(t)dt$$

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\log(8+4\sqrt{3})dx-\mathrm{I}$$

$$2\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\log(8+4\sqrt{3})dx=\pi\log(8+4\sqrt{3})$$

$$I=\frac{\pi}{2}\log(8+4\sqrt{3})\cdots\text{（答）}$$

（３）の別解**[対称性を利用した技巧的解法]**

$$f(x) = \left(2+\sqrt{3}\right) + tan\frac{x}{12}, (0 \le x \le \pi)$$

の周期 12π である。前問より

$$f(x)f(\pi - x) = 8 + 4\sqrt{3}$$

となるので、両辺に自然対数をとると

$$logf(x)f(\pi - x) = log(8 + 4\sqrt{3})$$

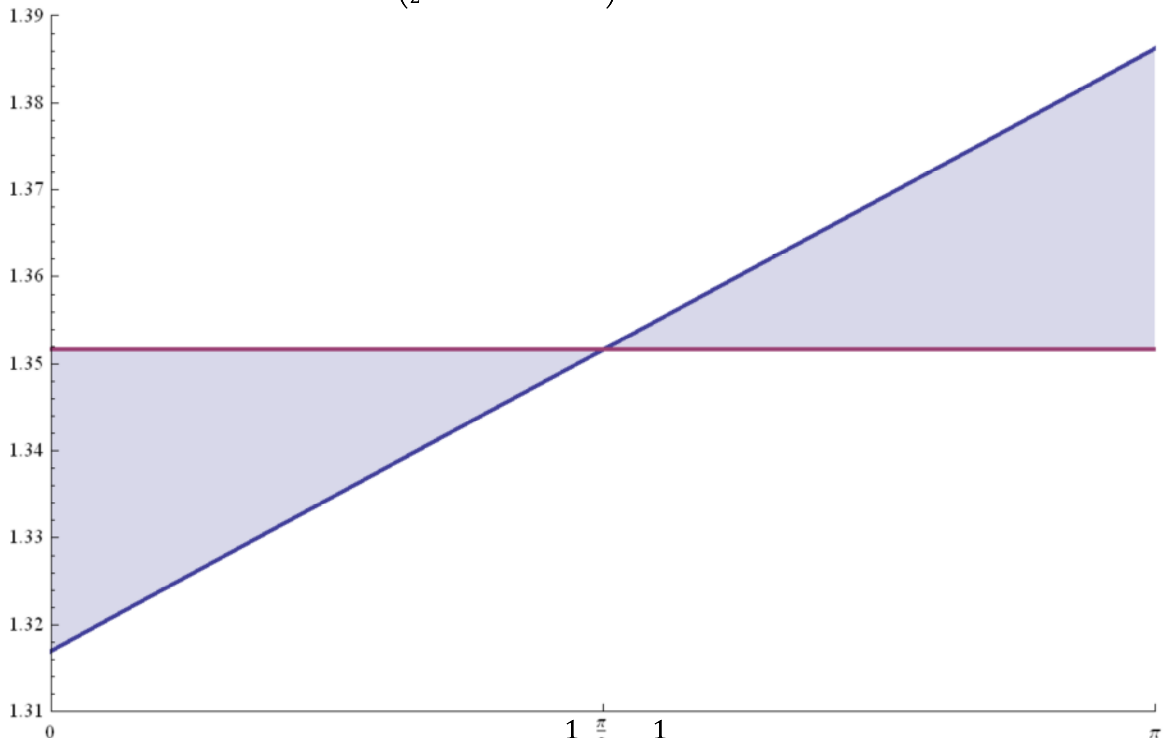
$$logf(x) + logf(\pi - x) = log(8 + 2\sqrt{12})$$

$$logf(x) + logf(\pi - x) = log(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$$

$$\frac{logf(x) + logf(\pi - x)}{2} = log\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

$$y = logf(x)$$

のグラフは、下図のように、点A$\left(\frac{\pi}{2}, log\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)\right)$に関して、点対称なグラフになる。



$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{12}\frac{1}{cos^2 \pi/12}}{\left(2 + \sqrt{3}\right)tan\frac{x}{12}} > 0$$

このグラフは下に凸である。

$$\int_0^{\pi} logf(x)dx = \left\{log\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)\right\}\pi$$

■

Episode8 $\int e^{-x} sinxdx \,, \int e^{-x}\, cosxdx$

$$\int e^{-x} sinxdx \,, \int e^{-x}\, cosxdx$$

を計算せよ。

[解答 1]部分積分を利用する方法

$$\mathrm{I} = \int e^{-x} sinxdx \,, J = \int e^{-x} cosxdx$$

とおく。

部分積分を利用すると、

$$\mathrm{I} = -e^{-x}cosx - \int e^{-x}cosxdx = -e^{-x}cosx - J$$

$$\therefore \mathrm{I} + \mathrm{J} = -e^{-x}cosx \cdots ①$$

$$\mathrm{J} = e^{-x}sinx + \int e^{-x}sinxdx = e^{-x}sinx + I$$

$$\therefore \mathrm{I} - \mathrm{J} = -e^{-x}sinx \cdots ②$$

①，②より

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{2}e^{-x}(sinx + cosx), J = \frac{1}{2}e^{-x}(sinx - cosx)$$

[解答２]原始関数を利用する方法

$$\{e^{-x}\,(sinx + cosx)\}' = -e^{-x}(sinx + cosx) + e^{-x}(cosx - sinx) = -2e^{-x}sinx$$

$$e^{-x}sinx = -\frac{1}{2}\,\{e^{-x}\,(sinx + cosx)\}'$$

$$\therefore \int e^{-x}\, sinx\, dx = -\frac{1}{2}\, e^{-x}(sinx + cosx)$$

$$\{e^{-x}\,(sinx - cosx)\}' = -e^{-x}(sinx - cosx) + e^{-x}(cosx + sinx) = 2e^{-x}sinx$$

$$e^{-x}cosx = \frac{1}{2}\,\{e^{-x}\,(sinx - cosx)\}'$$

$$\therefore \int e^{-x}\, cosx\, dx = \frac{1}{2}\, e^{-x}(sinx - cosx)$$

[解答３]複素積分を活用する方法

$$e^{ix} = cosx + i\, sinx$$

を活用する方法。

$$\mathrm{S} = \int e^{-x}sinxdx \,, C = \int e^{-x}cosxdx$$

$$C + iS = \int e^{-x}(cosx + i\, sinx)dx = \int e^{-x}\, e^{ix}dx = \int e^{(-1+i)x}dx = \frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}$$

$$= \frac{e^{-x}e^{ix}}{-1+i} = \frac{e^{-x}(\cos x + i \sin x)}{-1+i} = \frac{e^{-x}(cosx + isinx)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$$

$$= \frac{e^{-x}(-cosx - icosx - isinx + sinx)}{1-(-1)} = \frac{e^{-x}\{sinx - cosx - i(sinx + cosx)\}}{2}$$

実数部分と虚数部分を比較すると、

$$C = \frac{1}{2}e^{-x}(sinx - cosx), S = -\frac{1}{2}e^{-x}(sinx + cosx)$$

■