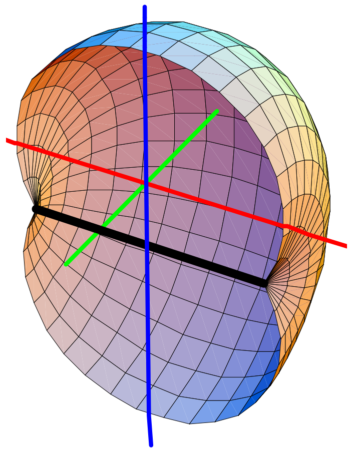
Exercise 9　x軸y軸以外の回転軸の回転体　聖マリアンナ医科大学2003

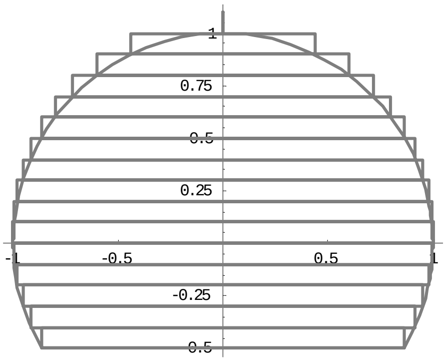
円 $x^2+y^2=1$ の $y \geqq -\dfrac{1}{2}$ なる部分を、直線 $y=-\dfrac{1}{2}$ を回転軸として1回転させたとき、囲まれる立体の体積Vを求めよ。

〔解答例〕



円 $x^2+y^2=1$ より $x=\sqrt{1-y^2}$　円を右図のように分割してグレーの長方形部分を $y=-\dfrac{1}{2}$ を軸として回転したパイプ状の立体の体積 δV とする。パップス・ギュルダンの定理より

> **パップス・ギュルダンの定理（Pappus - Guldin）**
>
> 平面上に面積 S の図形Dと直線 l がある。Dの重心Gと l との距離をLとする。l がDの内部を通らないとき、Dを l のまわりに1回転してできる立体の体積Vは
>
> $$V=2\pi L\times S$$



$$\delta V=2\pi\left(y+\frac{1}{2}dy\right)S \qquad S：長方形の面積\quad S=2\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$\delta V=2\pi\left(y+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}dy\right)2\sqrt{1-y^2}\,dy$$

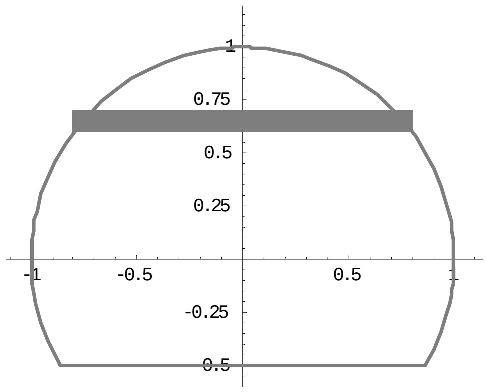
$$=4\pi\left(y+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-y^2}\,dy+2\pi\sqrt{1-y^2}\,(dy)^2$$

$$\frac{\delta V}{\delta y}=4\pi\left(y+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-y^2}+2\pi\sqrt{1-y^2}\,dy$$

あとは計算です。

$\delta y\to 0$

$$V=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(4\pi\, y\sqrt{1-y^2}+2\pi\sqrt{1-y^2}\right)dy \cdots ①$$



$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,dy$ を置換積分で求める。

y	$-\dfrac{1}{2}\to 1$
t	$\dfrac{3}{4}\to 0$

$t=1-y^2$ とおく　$\dfrac{dt}{dy}=-2y$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,dy=\int_{\frac{3}{4}}^{0} y\sqrt{t}\,\frac{dy}{dt}\,dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{3}{4}}\sqrt{t}\,dt=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy$ の部分を置換積分で求める。

y	$-\dfrac{1}{2}\to 1$
θ	$-\dfrac{\pi}{6}\to\dfrac{\pi}{2}$

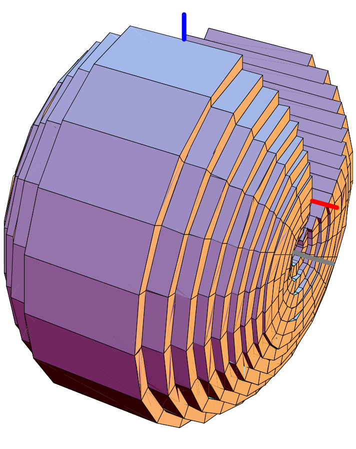
$y=\sin\theta$ とおく　$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta$

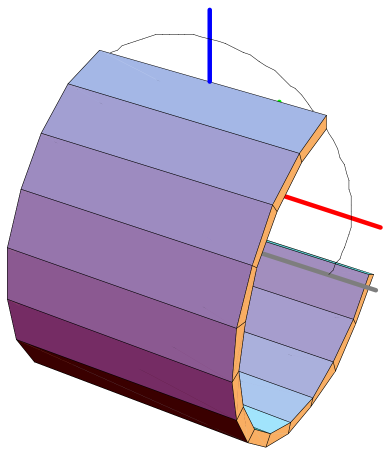
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta+1}{2}\,d\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$　①へ代入すると

$$V=4\pi\times\frac{\sqrt{3}}{8}+2\pi\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi+\frac{2}{3}\pi^2$$





Exercise10　任意の直線を回転軸とする回転体の体積　2003 年岡山県立大学

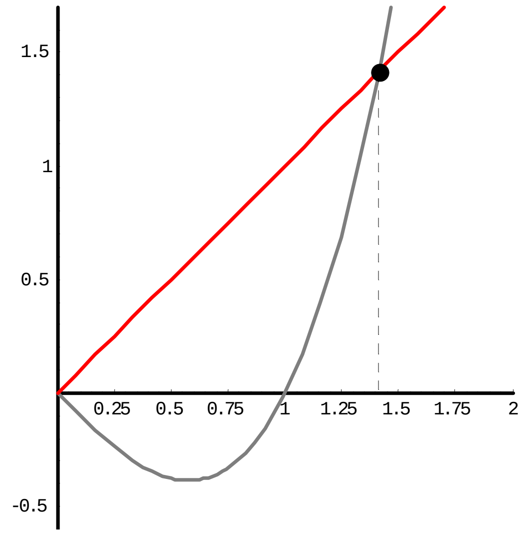
a を正の定数とする。O を原点とする座標平面上に、曲線 $C: y = x^3 - ax$ と直線 $l: y = \dfrac{x}{a}$ を考える。

C と l の交点のうち x 座標が正であるものをAとするとき、以下の問いに答えよ。

（１）　原点Oから点Aまでの距離を求めよ。

（２）　C上の点 $P(t, t^3 - at)$　$(t \geqq 0)$ を通り、l に垂直な直線が l と交わる点をQとする。線分 PQ の長さを t を用いて表せ。また線分 OQ の長さを s とするとき、 s を t を用いて表せ。

（３）　$x \geqq 0$ の領域において、曲線Cと直線 l で囲まれた図形を、直線 l を軸として回転してできる回転体の体積を求めよ。



〔解答例〕連立方程式

（１）$\begin{cases} y = x^3 - ax \\ y = \dfrac{x}{a} \end{cases}$　を解く。　$x^3 - ax = \dfrac{x}{a}$　　$ax^3 - (a^2+1)x = 0$

$x\{ax^2 - (a^2+1)\} = 0$　　$x = 0$，　$x^2 = \dfrac{a^2+1}{a}$　　$x = \sqrt{\dfrac{a^2+1}{a}}$ より

$A\left(\sqrt{\dfrac{a^2+1}{a}}, \dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{a^2+1}{a}}\right)$

$$OA = \sqrt{\frac{a^2+1}{a} + \frac{1}{a^2}\frac{a^2+1}{a}} = \frac{(a^2+1)\sqrt{a}}{a^2} \cdots（答）$$

（２）

点 $P(t, t^3 - at)$ と直線 $l: x - ay = 0$

$$PQ = \frac{|t - a(t^3 - at)|}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$= \frac{|(1+a^2)t - at^3|}{\sqrt{1+a^2}} \cdots（答）$$

点と直線との距離公式

点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$

との距離

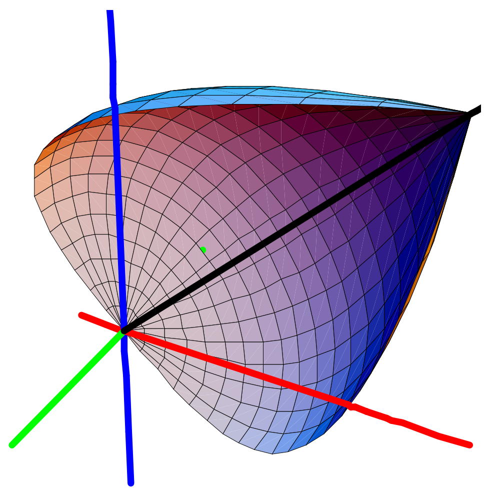
$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

点 $P(t, t^3 - at)$ を通って $l: y = \dfrac{x}{a}$ に垂直な直線を求める。

傾き $-a$ より、 $y = -a(x - t) + t^3 - at$

この直線 PQ： $ax + y - t^3 = 0$ と原点 O との距離 s は

$$s = \frac{|-t^3|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{t^3}{\sqrt{a^2+1}} \cdots（答）$$



（３）

回転体の求積の基本　回転軸に垂直に分割する。

$$dV = \pi\ PQ^2 ds = \pi\ PQ^2 \frac{ds}{dt} dt = \frac{\pi\{(1+a^2)t - at^3\}^2}{1+a^2} \frac{3t^2}{\sqrt{1+a^2}} dt$$

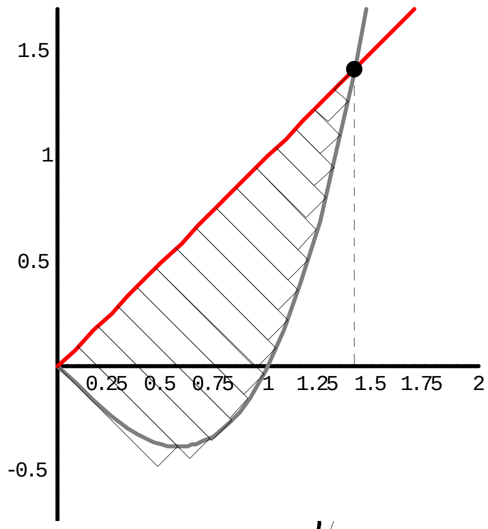
曲線 C と直線 l との交点 A の x 座標を α とすると、 $\alpha^2 = \dfrac{a^2+1}{a}$

$1 + a^2 = a\alpha^2$ に置き換えることができる。

$$dV = 3\pi \frac{a^2(\alpha^2 t - t^3)^2 t^2}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}} dt = 3a^2\pi \frac{\alpha^4 t^4 - 2\alpha^2 t^6 + t^8}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}} dt$$

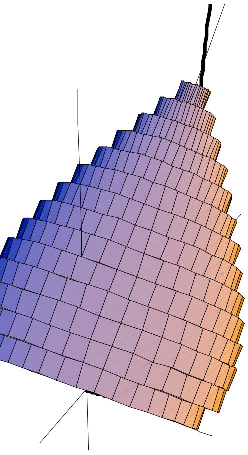
$$V=\int_0^{\alpha}\pi\, PQ^2\frac{ds}{dt}dt=\frac{3a^2\pi}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}\left[\frac{\alpha^4t^5}{5}-\frac{2\alpha^2t^7}{7}+\frac{t^9}{9}\right]_0^{\alpha}$$

$$=\frac{3a^2\pi}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+\frac{1}{9}\right)\alpha^9=\frac{8(1+a^2)^3}{105a^2\sqrt{a}}\cdots\text{（答）}$$



トンガリハット・コーンスライス法

$$V=\pi\cos\theta\int_a^b\{g(x)-f(x)\}^2dx$$



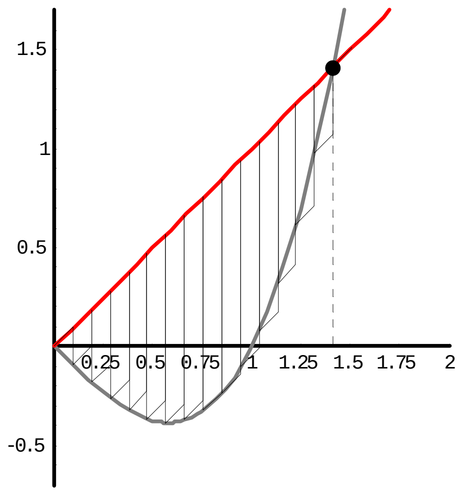
$\tan\theta=\dfrac{1}{a}$, $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ より $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

$$V=\pi\cos\theta\int_0^{\alpha}\left(\frac{x}{a}-x^3+ax\right)^2dx$$

$$=\frac{a\pi}{\sqrt{1+a^2}}\int_0^{\alpha}\left\{\left(\frac{1}{a}+a\right)x^2-2\left(\frac{1}{a}+a\right)x^4+x^6\right\}dx$$

$$=\frac{a\pi}{\sqrt{1+a^2}}\left[\left(\frac{1+a^2}{a}\right)^2\times\frac{x^3}{3}-2\left(\frac{1+a^2}{a}\right)\times\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}\right]_0^{\alpha}$$

$$=\frac{8a\pi}{105\sqrt{1+a^2}}\alpha^7=\frac{8(1+a^2)^3}{105a^2\sqrt{a}}\cdots\text{（答）}$$



トンガリハット・コーンスライス法とは？

右図の様に、回転軸に平行な平行四辺形に分割する。

平行四辺形を l のまわりに回転してできる回転体は**トンガリハット**の形をしている。

このトンガリハットの微少体積を δV とする。

δV ＝『長方形 EFDC の回転体の体積』

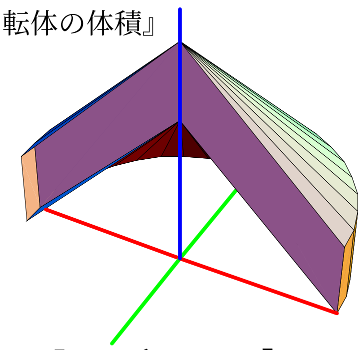
$$\delta V=\pi\times EC^2\times CD$$

$$=\pi\times(AC\cos\theta)^2\times\frac{\delta x}{\cos\theta}$$

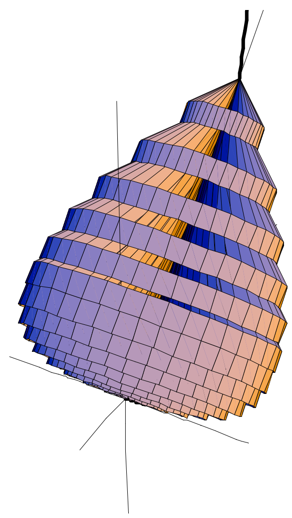
$$=\pi\cos\theta\ AC^2\ \delta x$$

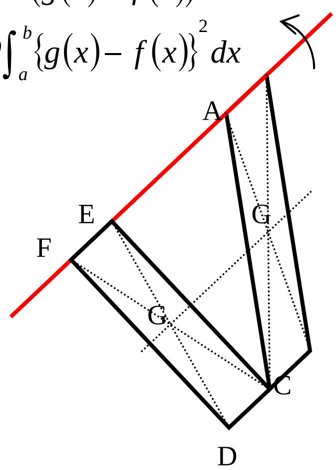
$$=\pi\ \cos\theta\,(g(x)-f(x))^2\ \delta x$$

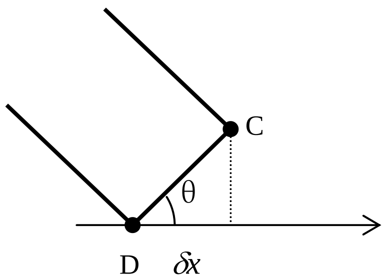
$$V=\pi\cos\theta\int_a^b\{g(x)-f(x)\}^2dx$$



【トンガリハット】





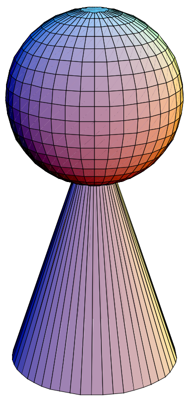


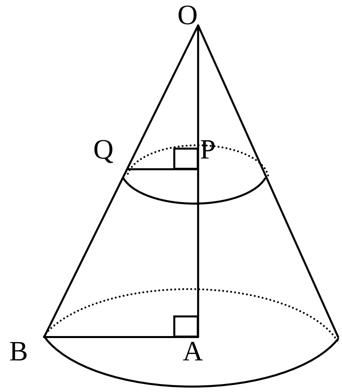
第４話　くりぬき立体図形の体積

Exercise11　2003 年武蔵工業大学

底面積3π，高さ３の直円錐がある。その頂点Oを中心とする半径１の球が直円錐から切り取る部分の体積を求めよ。

〔解答例〕





底面の半径 r とすると、$r^2\pi = 3\pi$ より AB＝$r=\sqrt{3}$

OA＝３とピタゴラスの定理$OA^2+AB^2=OB^2$ より

OB＝$2\sqrt{3}$

△OBA∽△OQP より

OQ：OB＝１：$2\sqrt{3}$

PQ：AB＝１：$2\sqrt{3}$

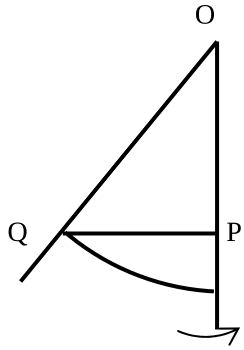
PQ：$\sqrt{3}$＝１：$2\sqrt{3}$

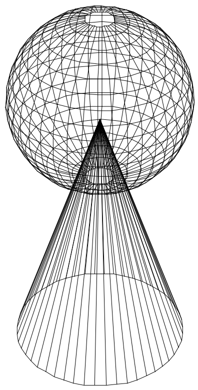
PQ＝$\dfrac{1}{2}$

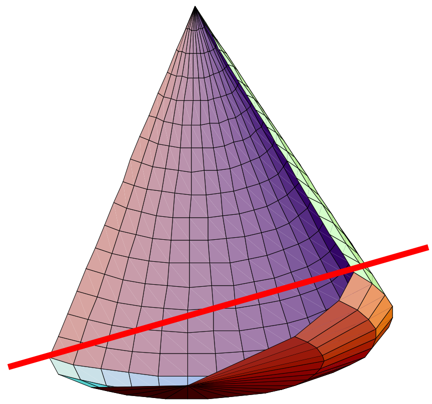
OP：OA＝１：$2\sqrt{3}$

OA＝３より

OP＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$







円錐部分の体積V_1

$$V_1=\frac{1}{2}PQ^2\,\pi\,OP=\frac{\sqrt{3}}{24}\pi$$

球面による切り取り部分の体積V_2

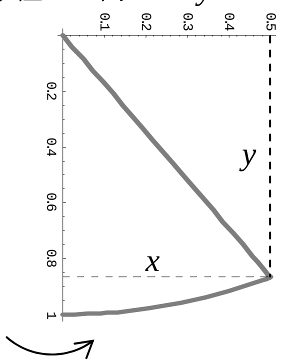
OQ= 2 PQ＝1，中心 O 半径１の円$x^2+y^2=1$より

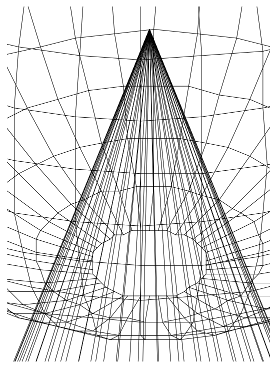
$$V_2=\pi\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2dy$$

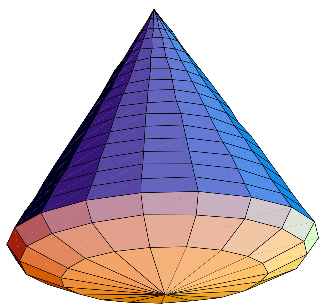
$$=\pi\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-y^2\right)dy$$

$$=\pi\left[y-\frac{1}{2}y^3\right]_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\pi$$







求める立体の体積$V_1+V_2=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

バウムクーヘンの面積定理

$0\leqq y\leqq f(x)$，$a\leqq x\leqq b$をｙ軸のまわりに１回転してできる立体の体積Ｖは

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

極表示の面積定理

曲線Ｃ上の点Ｐが極方程式$r=f(\theta),\alpha\leqq\theta\leqq\beta$で囲まれる面積Ｓは

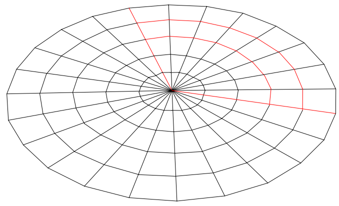
$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\{f(\theta)\}^2d\theta$$

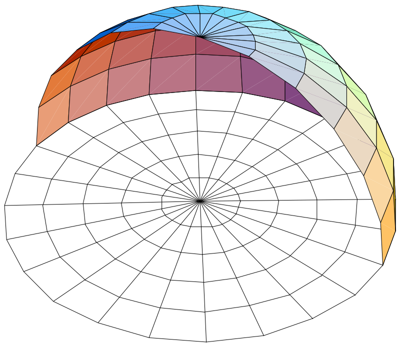
Exercise12　半球面の体積

原点中心、半径１の xy 平面にのる半球面において、極座標の領域 $a \leqq r \leqq b$,　$\alpha \leqq \theta \leqq \beta$　と真上の曲面によって囲まれた部分の体積 V を求めよ。

半球面は $x^2+y^2+z^2=1$,　$z \geqq 0$ と表される。
xy 平面上の極座標の点 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$

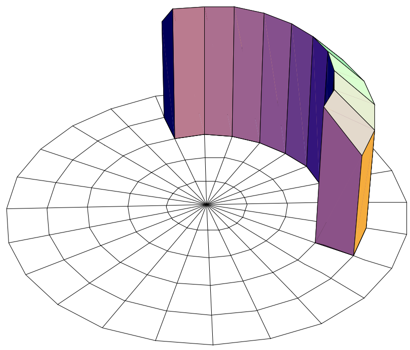
$z=\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-r^2}$
曲座標の点 (r,θ) に対応する曲面上の高さ $f(r,\theta)$
極座標の領域 Δ ：$a \leqq r \leqq b$,　$\alpha \leqq \theta \leqq \beta$
と真上の曲面によって囲まれた部分の体積 V
を求めよう。





Step 1 ；下図の微少体積 δV を求めよう。

この微少立体を１回転した立体の体積は**バウムクーヘンの面積定理**
を利用して θ を固定して　$2\pi\int_a^b r\, f(r,\theta)dr \cdots$①
微少立体の回転角は、１回転 2π ではなく $d\theta$ でしか回転しないので、
$\delta V=\left(\int_a^b r\, f(r,\theta)dr\right)d\theta$　と表す。

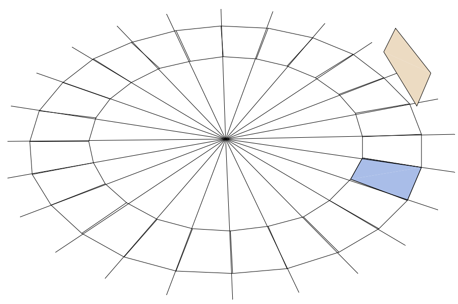


Step 2 ；右図領域 Δ ：$a \leqq r \leqq b$,　$\alpha \leqq \theta \leqq \beta$　と真上の曲面によって囲まれた部分の体積 V を求めよう。

$v(\theta)=\int_a^b r\, f(r,\theta)dr$ とおくと

$$V=\int_\alpha^\beta v(\theta)d\theta$$
$$=\iint_\Delta r\, f(r,\theta)d\theta\, dr$$

これは **2 重積分の概念です**



極表示の体積公式

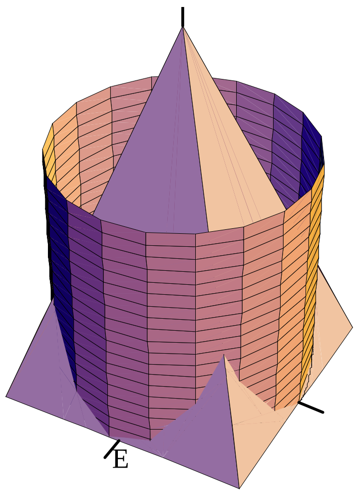
$$\mathrm{V}=\iint_\Delta r\, f(r,\theta)\, d\theta\, dr$$

Exercise13　1998 年　東京大学前期・理科

xyz 空間に５点 $A(1,1,0), B(-1,1,0), C(-1,-1,0), D(1,-1,0), P(0,0,3)$ をとる。四角錐 PABCD の $x^2+y^2 \geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。

〔解答例〕

> **Point；対称性に注目して四角錘の８等分の１つと円柱との共通部分の体積を求める。**



四角錘の側面上の線分 PE の方程式；$x+\dfrac{z}{3}=1$ …①

これは側面の方程式でもある。

極座標で表示すると、$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を①へ代入して

$r\cos\theta+\dfrac{z}{3}=1$ より $z=3(1-r\cos\theta)$

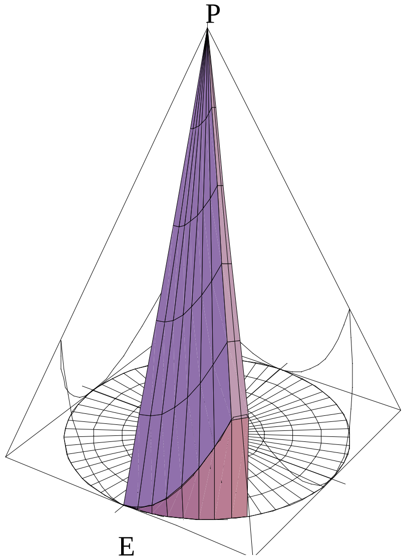
従って、曲面の方程式を $f(r,\theta)=3(1-r\cos\theta)$ として、

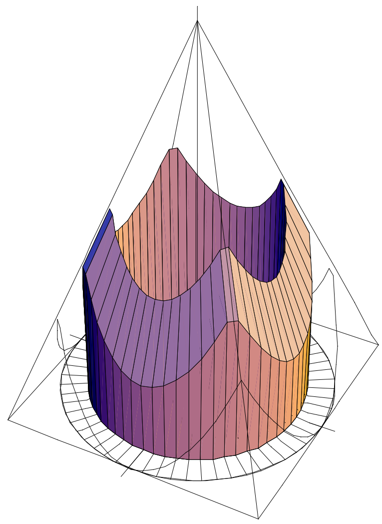
領域 $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ での体積を求める。

$$2\pi\int_a^b r\,f(r,\theta)dr$$

$$v(\theta)=\int_0^1 r\,f(r,\theta)dr$$
$$=\int_0^1 3r(1-r\cos\theta)dr$$
$$=\left[\frac{3}{2}r^2-r^3\cos\theta\right]_0^1$$
$$=\frac{3}{2}-\cos\theta$$

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{4}} v(\theta)d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}-\cos\theta\right)d\theta$$
$$=\left[\frac{3}{2}\theta-\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{3\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$





$$v(\theta)=\int_a^b r\,f(r,\theta)dr$$
$$V=\int_\alpha^\beta v(\theta)d\theta$$

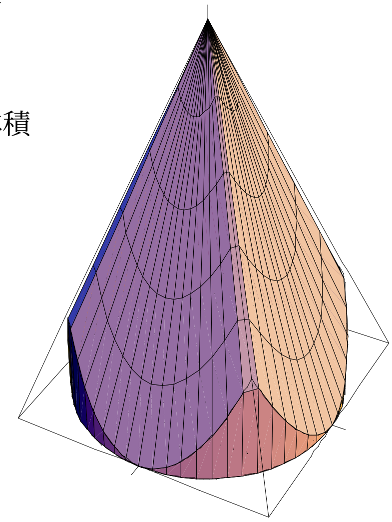
V を８倍して四角錘と円柱の共通部分の体積 T をもとめると、

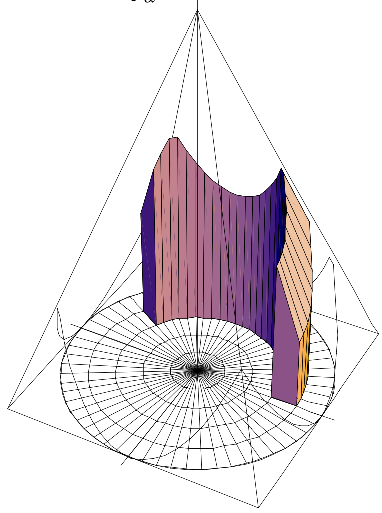
$T=8V=3\pi-4\sqrt{2}$

これ四角錘の体積から引くと求める体積が出る。

求める体積 $=\dfrac{1}{3}\times 2^2\times 3-\left(3\pi-4\sqrt{2}\right)$

$=4+4\sqrt{2}-3\pi$ …（答）





Exercise14　2003年　東京大学前期・理科

xyz 空間において、平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし、点 $(0,0,1)$ を頂点とする円錐を A とする。

次に、平面 $z=0$ 上の点 $(1,0,0)$ を中心とする半径 1 の円を H、平面 $z=1$ 上の点 $(1,0,1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対し、平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

（1）$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。$t=1-\cos\theta$ のとき、$S(t)$ を θ で表せ。

（2）C の体積 $\displaystyle\int_0^1 S(t)dt$ を求めよ。

〔解答例〕　**Point；導入に従って解法する**

（1）

題意の立体の等高線を作成すると右図の様に円と円の重なった図になる。

xy 平面に平行な平面 $z=t$ による切り口は、右中央図の円と円の重なった部分となり、

$$\begin{cases} x^2+y^2=\{2(1-t)\}^2 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$$

$t=1-\cos\theta$ より

$$\begin{cases} x^2+y^2=4\cos^2\theta \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$$

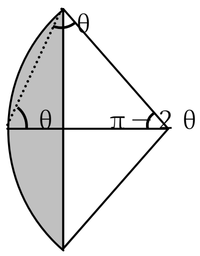
交点の x 座標を α とすると $\alpha=2\cos^2\theta$

交点の y 座標 β とすると $\beta=2\cos\theta\sin\theta$

$$\frac{\beta}{\alpha}=\tan\theta$$

扇形の中心角＝２π－４θ

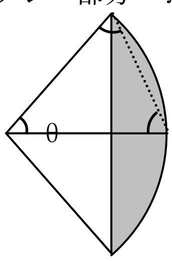
扇形の面積＝π－２θ



三角形の面積＝$\dfrac{1}{2}\sin(2\pi-4\theta)$

$=-\sin 2\theta\cos 2\theta$

グレー部分＝π－２θ＋$\sin 2\theta\cos 2\theta$…①



半径 $2\cos\theta$，中心角２θの扇形について

扇形の面積＝４θ $\cos^2\theta$

三角形の面積＝４ $\sin\theta\cos^3\theta$

グレー部分＝$4\theta\cos^2\theta-4\sin\theta\cos^3\theta$…②

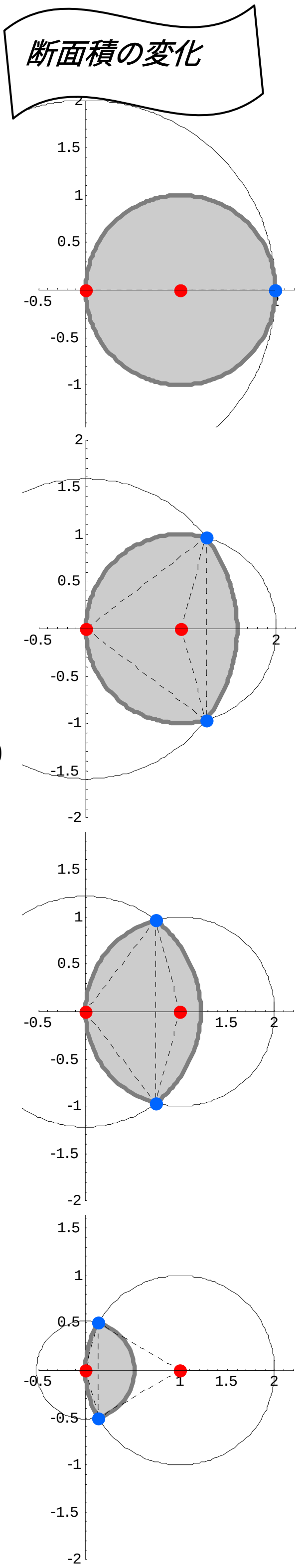
①＋②により断面積 $S(t)$ を求めることができる。

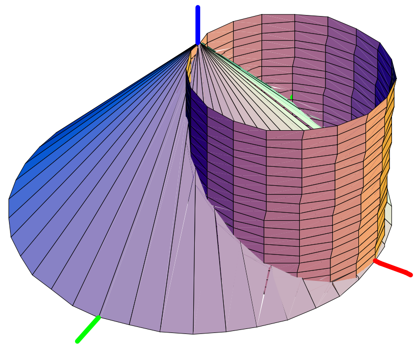
$$S(t)=2\theta\cos 2\theta+\pi-\sin 2\theta$$

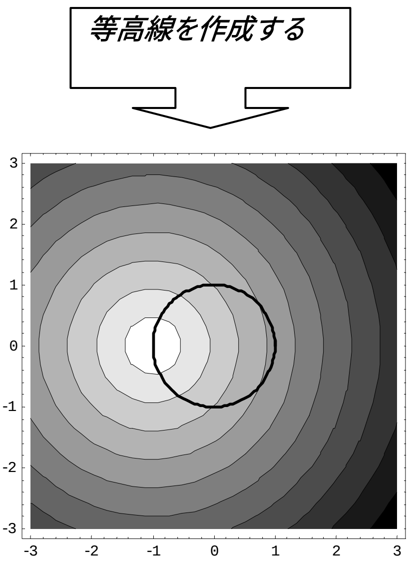
（2）

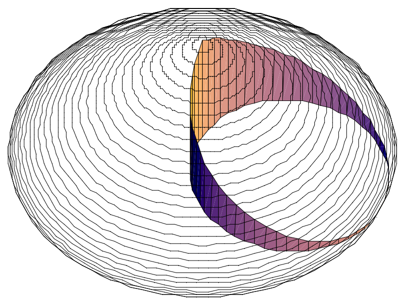
$$\int_0^1 S(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\frac{dt}{d\theta}d\theta \qquad t=1-\cos\theta \text{ とおく}$$

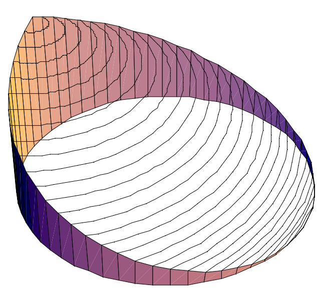
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\cos 2\theta\sin\theta+\pi\sin\theta-\sin 2\theta\sin\theta)d\theta \cdots③$$



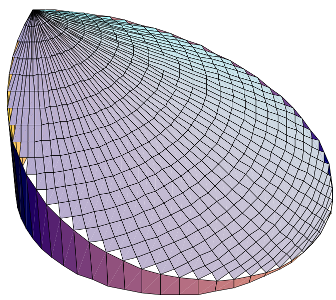








第１項＝$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta\cos 2\theta\sin\theta\, d\theta$　積を和に変換する公式より

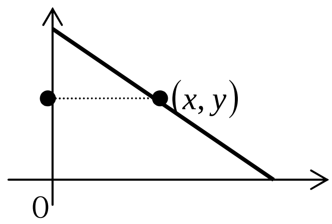


$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(\sin 3\theta-\sin\theta)d\theta$　部分積分法を利用して

$$=\left[\theta\left(-\frac{1}{3}\cos 3\theta+\cos\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{3}\cos 3\theta+\cos\theta\right)d\theta=-\frac{10}{9}$$

第２項＝π $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\, d\theta=$ π

第３項＝$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin 2\theta\sin\theta)d\theta=\left[-\frac{2}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{3}$



③＝第１項＋第２項＋第３項＝$\pi-\frac{16}{9}\cdots$（答）

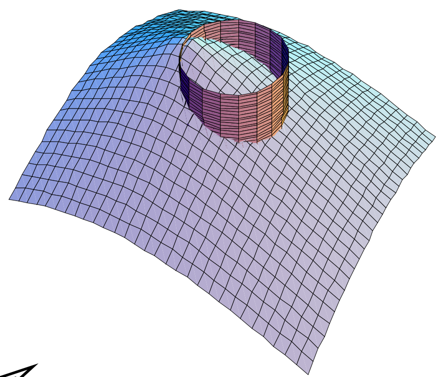
〔解答例その２〕

Step１；側曲面の方程式を求める。

曲面上の点(x,y)はｚ軸上の点を中心として、半径$2(1-t)$の円を描く。

$$\begin{cases} x=2(1-t)\cos\theta \\ y=2(1-t)\sin\theta \\ z=t \end{cases}$$

より、パラメーターt,θを消去すると、



$x^2+y^2=4(1-t)^2$，　$t=z$　　　曲面の方程式；$z=1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$

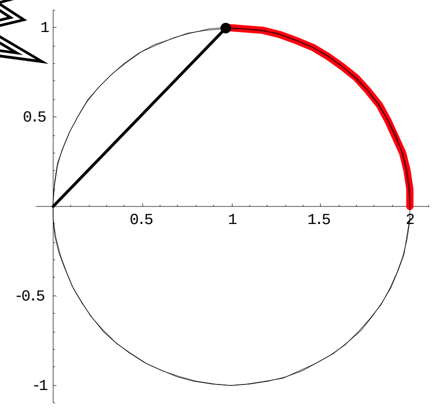
Step２；２重積分を利用する。

求める立体の体積＝$\displaystyle\iint_{(x-1)^2+y^2\leqq 1}\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)dxdy\cdots$④

ヤコビ行列に注意

直交座標から極座標への変換公式

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)|r|drd\theta$$



中心（１,０,０）半径１の円を極座標表示すると、右図より$r=2\cos\theta$

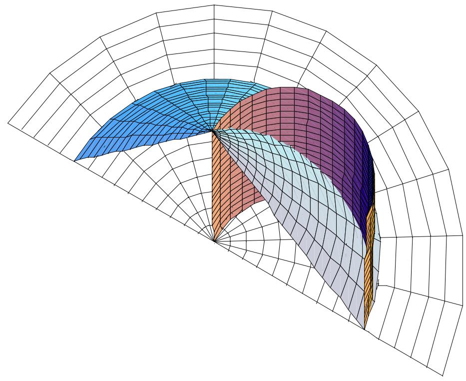
④へ$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$を代入して変数変換すると

$$④=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\left(1-\frac{r}{2}\right)r\,dr=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{6}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta$$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta\right)d\theta$　２倍角３倍角の定理より

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 2\theta+1-\frac{1}{3}\cos 3\theta-\cos\theta\right)d\theta$$

$$=2\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta-\frac{1}{9}\sin 3\theta-\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$



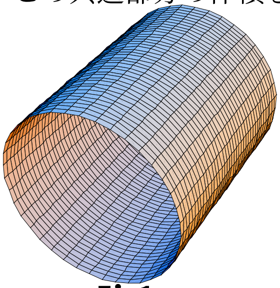
$=2\left(\frac{1}{2}\sin\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{9}\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{8}{9}\right)=\pi-\frac{16}{9}\cdots$（答）

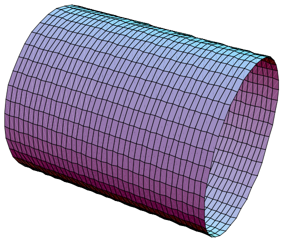
Exercise15　立体を座標で分析

直交する半径１の２本の円柱の共通部分の体積を求めよ。

〔解答例〕

直交する２本の円柱 Fig１と Fig２を合成すると、Fig３になる。
この共通部分の体積を求める問題である。





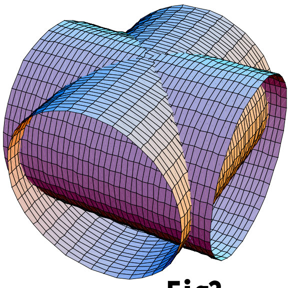
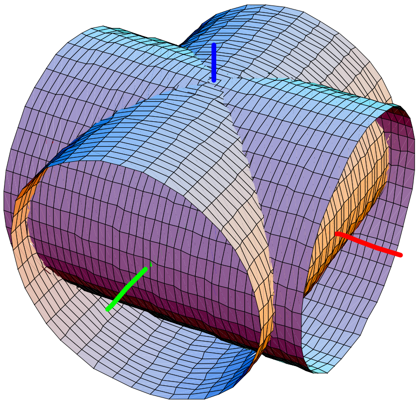
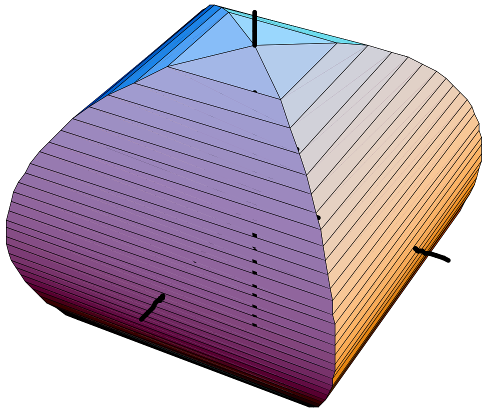
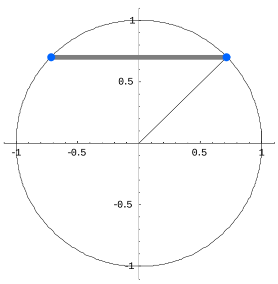


Fig1　**Fig2**　**Fig3**



更に、ｘ軸、ｙ軸、ｚ軸と座標を導入して作図する。
この共通部分の立体は、どうなるのだろうか？
この共通部分を xy - 平面に平行な平面でスライスする。





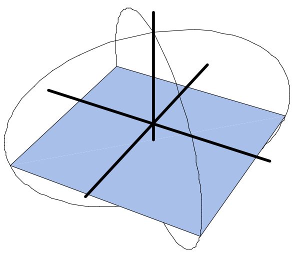
ｚ成分を t とすると、１辺が $2\sqrt{1-t^2}$
の正方形が断面となる立体である。

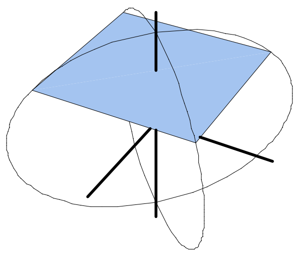
断面積 $S=4\left(1-t^2\right)$

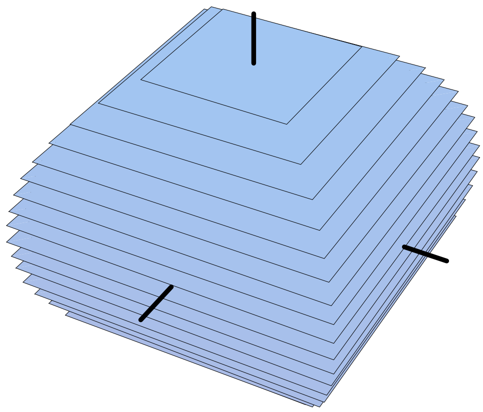
$$V=\int_{-1}^{1} S\,dt = 2\int_{0}^{1} S\,dt$$

$$=\left[4\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{16}{3}$$







〔解答例２〕

Point 重積分を利用する方法

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,dxdy$$

xy 平面上において $x \geqq 0,\ y=x$ と $y=-x$ で囲まれた部分の領域における曲面の方程式 $x^2+z^2=1$ より $z=\sqrt{1-x^2}$

立体の対称性に注意して重積分 $\int_0^1\int_{-x}^{x}\sqrt{1-x^2}\,dy\,dx$ を計算する。

$$\int_0^1\int_{-x}^{x}\sqrt{1-x^2}\,dy\,dx = 2\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{1-x^2}\,dy \cdots ①$$

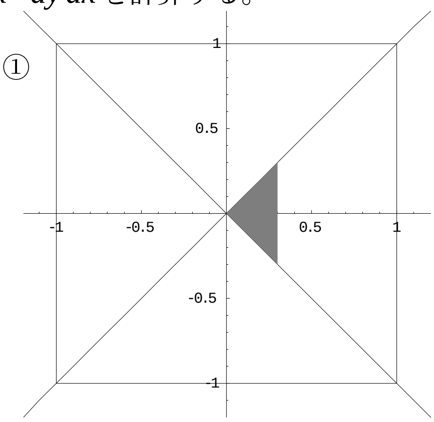
$$\int_0^x\sqrt{1-x^2}\,dy=\left[y\sqrt{1-x^2}\right]_0^x = x\sqrt{1-x^2}$$

①へ代入して

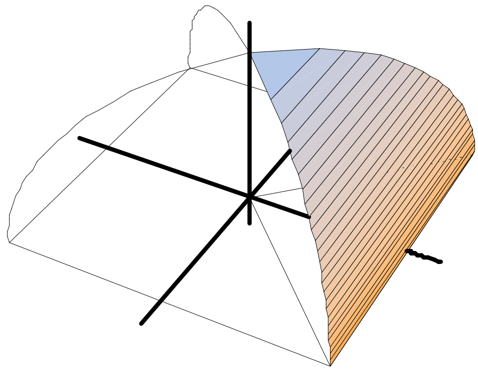
$2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$　として置換積分

$=\int_0^1\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}$ 求める立体の体積は、

この立体が８個集まったものだから $\frac{16}{3}$



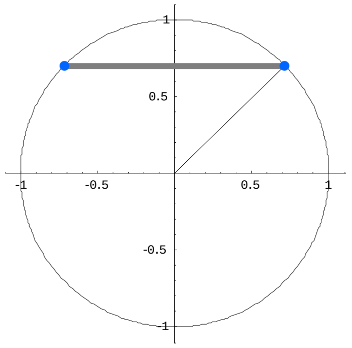
曲面 $z=\sqrt{1-x^2}$

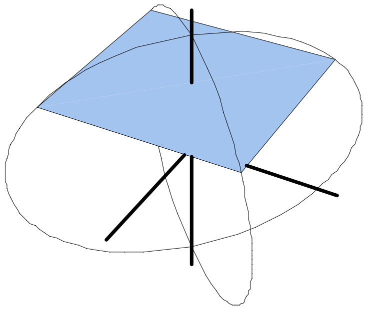


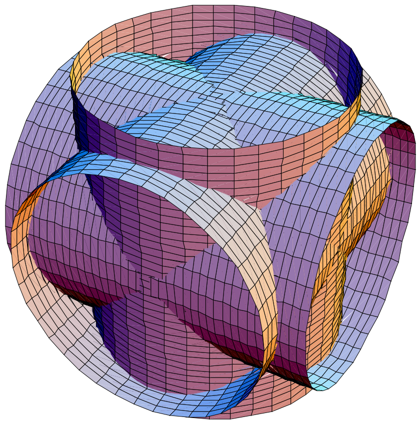
Exercise16　交わる３本の円柱の共通部

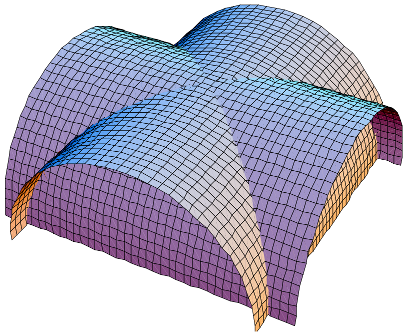
半径１の円柱が３本ある。どの２つをとっても中心軸が互いに直交するとき、３本の円柱の共通分の体積Ｖを求めよ。

[解答例１]
前問同様にｚ成分を t とすると、
１辺が $2\sqrt{1-t^2}$ の正方形が断面となる立体である。









〔ｉ〕正方形の断面が単位円の内部に存在する時

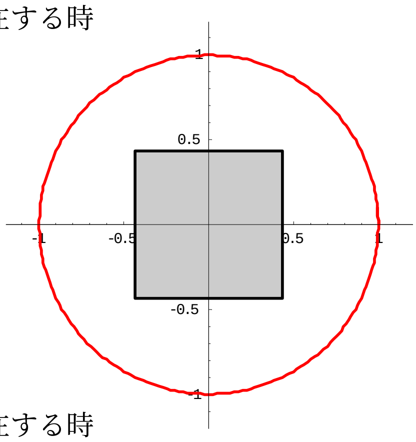
$\sqrt{1-t^2} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

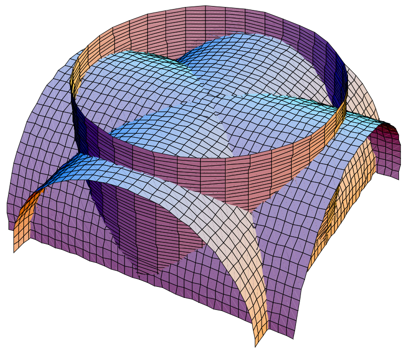
つまり $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t < 1$ のとき

このとき１辺が $2\sqrt{1-t^2}$ の正方形である。

断面積 $S(t) = 4(1-t^2)$

体積 $V_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} 4(1-t^2)dt = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}\sqrt{2}$





〔ii〕正方形の断面が単位円の外部に存在する時

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{1-t^2} < 1$ のとき

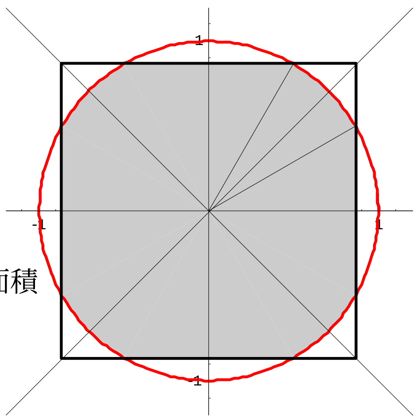
つまり $0 < t < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

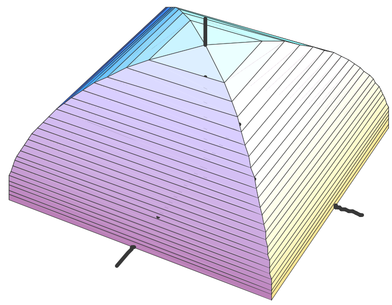
$\sin\theta = t, \cos\theta = \sqrt{1-t^2}$,

扇形の面積＝θ

三日月形の面積＝扇形の面積－三角形の面積

　$= \theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta = \theta - \sin\theta\cos\theta$





断面積Ｓ

　＝円の面積－４×三日月形の面積

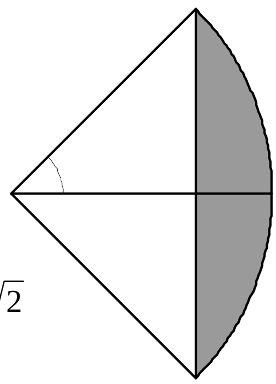
　$= \pi - 4\theta + 4\sin\theta\cos\theta$

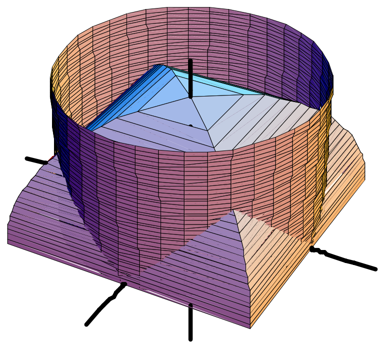
$t = \sin\theta$ とおいて置換積分すると

$V_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} S dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} S \frac{dt}{d\theta} d\theta$

　$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} S\cos\theta\, d\theta$

　$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{4\cos^2\theta\sin\theta + (\pi - 4\theta)\cos\theta\} d\theta = \frac{16}{3} - \frac{7}{3}\sqrt{2}$

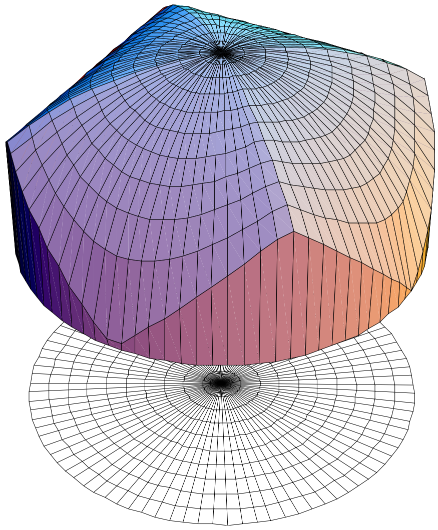




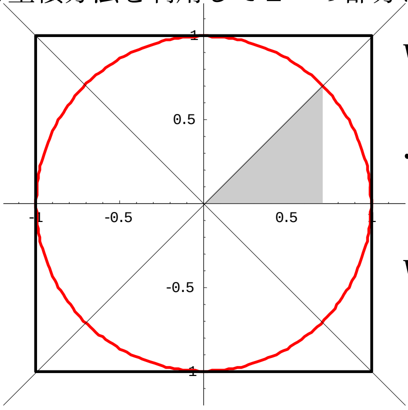
求める体積＝$16 - 8\sqrt{2}$ …（答）

〔解答例２〕**重積分を利用する方法**

くりぬいた立体を xy - 平面で切断した上の部分は、右図のような立体になる。



２重積分法を利用して２つの部分に分割して



$$V_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_0^x\sqrt{1-x^2}\,dy$$

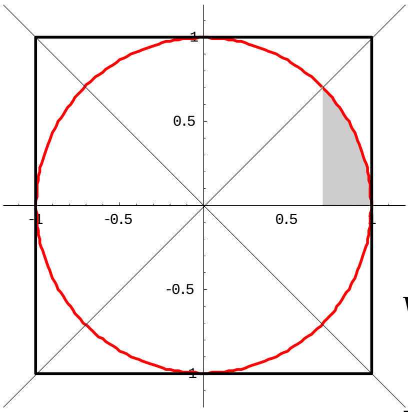
$$\int_0^x\sqrt{1-x^2}\,dy=\left[\sqrt{1-x^2}\ \ y\right]_0^x$$

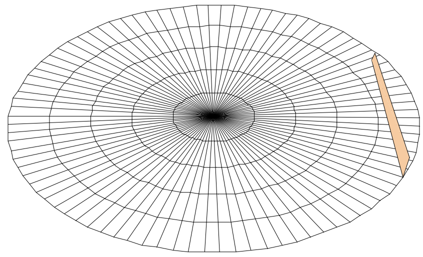
$$=x\sqrt{1-x^2}$$

$$V_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$t=1-x^2$ と置換積分すると

$$=\frac{1}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{12}\cdots①$$





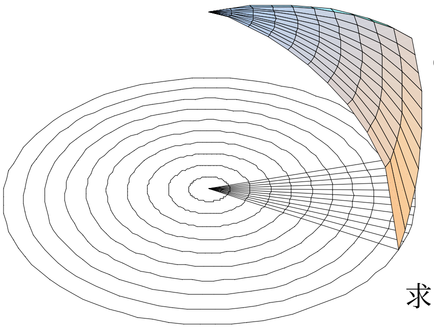
$$V_2=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dy$$

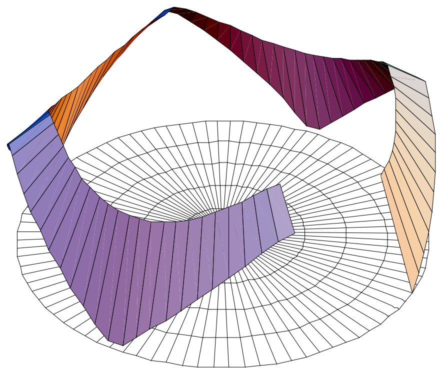
$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dy=\left[\sqrt{1-x^2}\ \ y\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=1-x^2$$

$$V_2=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\left(1-x^2\right)dx$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{12}\cdots②$$





①＋②を実施する

$$V_1+V_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

８倍して下半分の体積を求めるために更に２倍すると

求める立体の体積は $8\times2\times\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=16-8\sqrt{2}\cdots$（答）

〔解答例３〕**極座標を利用する方法**

２直線 $y=-x$, $y=x$ とで囲まれる領域における曲面の方程式は

$z=\sqrt{1-x^2}$ を極座標表示すると

$x=r\cos\theta$ を代入して $z=\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}, 0\leqq r\leqq1$ の範囲で積分する。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}\,dr$$

を計算すると良い。