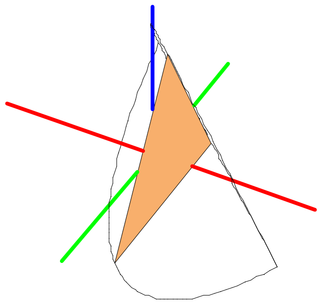
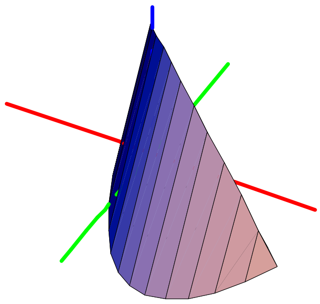
第１話　断面を分析する技術

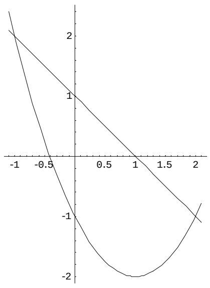


Exercise 1　2003 年信州大学・工学部

xy 平面内の放物線 $y=x^2-2x-1$ と直線 $y=-x+1$ で囲まれた部分を底面とし、x 軸に垂直な平面で切り口がつねに正三角形であるような右図の概形をもつ立体の体積を求めよ。

[解答例]





Step 1 ；断面積を求める。

$y=x^2-2x-1\cdots$①

$y=-x+1\cdots$②　　　の交点を求める。

$x^2-2x-1=1-x$ を解くと　$x=-1,2$

$P(x,x^2-2x-1)$

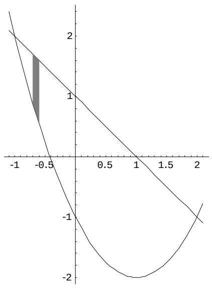
$Q(x,1-x)$

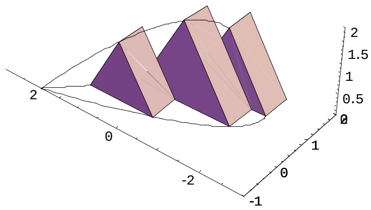
PQ を１辺とする正三角形の面積を S とすると

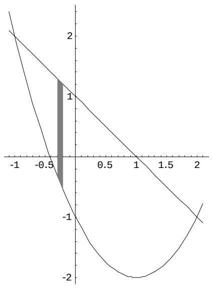
$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}PQ^2$$

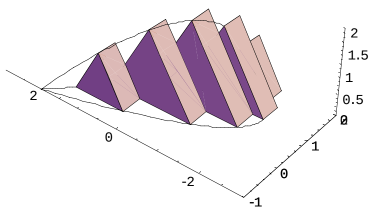
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{x^2-2x-1-(1-x)\}^2$$

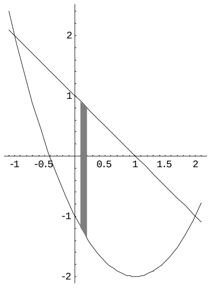
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(x+1)(x-2)\}^2$$

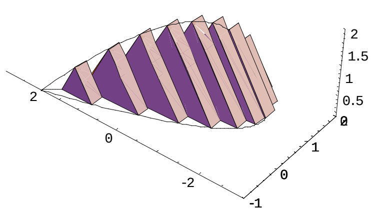


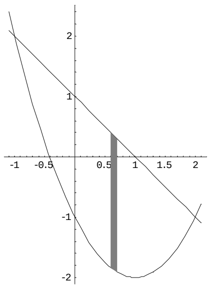


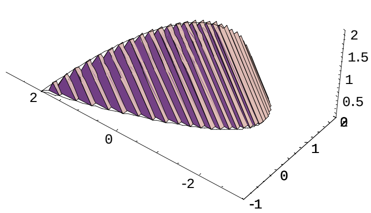












Step 2 ；断面積を積分すると体積を求めることができる。

ベーター関数

$$\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1}$$

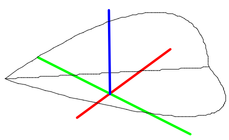
$$V=\int_{-1}^{2} S\,dx$$

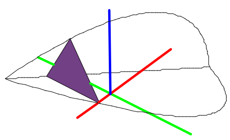
断面積を積分すると体積になる。

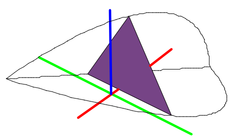
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)^2 dx$$

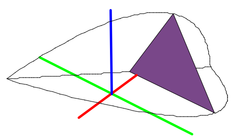
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{2!\,2!}{(2+2+1)!}(2+1)^{2+2+1}$$

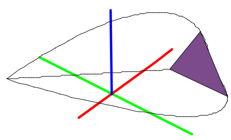
$$=\frac{81\sqrt{3}}{40}\cdots（答）$$









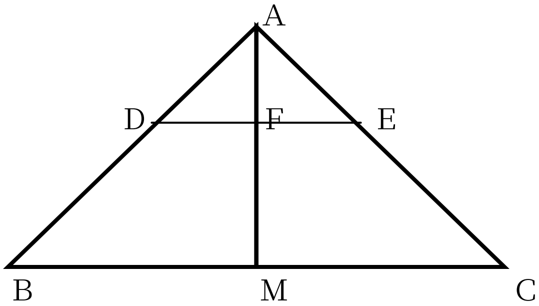


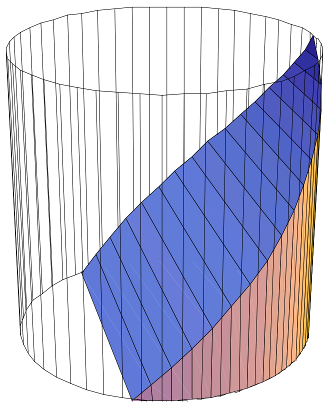
Exercise 2　2004 年札幌医科大学

　次のような直円柱Kと三角形 ABC を考える。
　直円柱 K は底面の円の半径１、高さが２である。三角形 ABC は AB=AC の二等辺三角形であり、辺 BC の中点を M、AM=MC＝２とする。また点 D,E はそれぞれ辺 AB、AC 上を AD=AE を保ちながら動くとする。　三角形 ABC を直円柱 K の側面に辺 AM が母線、辺 BC が底面の周の一部となるようにはり、線分 DE が通過してできる曲面によりこの直円柱を二つの立体に分ける（下図参照）。このとき、点 M を含むほうの立体の体積を求めよ。

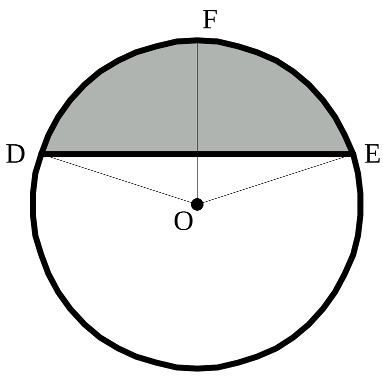
[解答例]

Point 1 ；右図立体を底面に水平に切断する方法





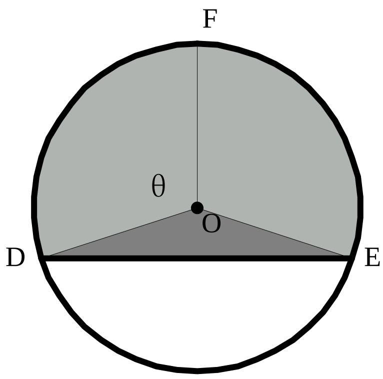
線分 DE と線分 AM の交点を F とする。三角形 ABC を直円柱に巻きつける。
上図の三角形 ADE において、DF＝θ とおくと
右上図の直円柱を真上から見た切断面（右図）において、弧 $DF=\theta$ となり、扇形 ODF の中心角、∠DOF＝θ



（ｉ）$0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

扇形 ODE の面積＝θ，△ODE の面積＝$\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

切断面の面積 $S(\theta)=\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$



（ii）$\dfrac{\pi}{2}<\theta<2$ のとき

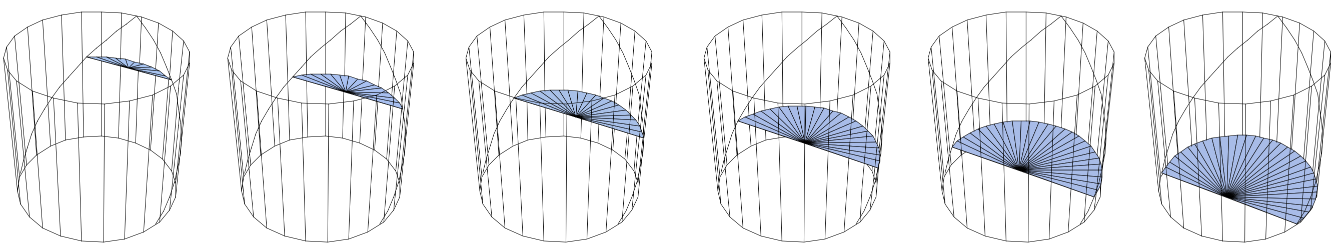
扇形 ODE の面積＝θ，∠DOE＝$2\pi-2\theta$

△ODE の面積＝$\dfrac{1}{2}\sin(2\pi-2\theta)=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

△切断面の面積 $S(\theta)=\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

（ｉ）（ii）の場合も断面積は $S(\theta)=\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

$$\int_0^2\left(\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)d\theta=\left[\frac{\theta^2}{2}+\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^2=\frac{7+\cos 4}{4}$$



Exercise 3　札幌医科大学2003

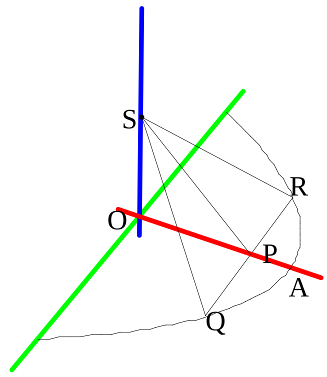
Ｏを原点とするxyz座標空間内に $A\left(\dfrac{2}{3},0,0\right)$ があり、Ｐは線分OA上の点とする。次の手順で正三角形SQRを作る。xy平面上において、Ｐを通りｙ軸に平行な直線と放物線 $x=\dfrac{2}{3}-y^2$ との交点をＱ, Ｒとする。線分ＱＲを一辺とする正三角形SQRをxy平面に垂直な平面より45°だけx軸の負の方向へ傾けて作る。ただし、Ｑのy座標が０以下、Ｓのz座標が０以上となるようにＱ, Ｒ, Ｓは定める。

（１）　正三角形SQRがyz平面と共有点をもつときの、Ｐのx座標の範囲を $0 \leqq x \leqq a$ とする。a を求めよ。

（２）　ＰがＡからＯまで動くとき、正三角形SQRが通過するyz平面上の部分の面積を求めよ。

〔解答例〕（１）

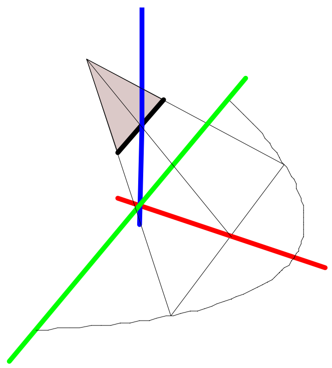
Step 1　正三角形 SQR の１辺の長さを求める。



線分 OA 上の点 $P(t,0,0)\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\right)$ とおくと、$x=\dfrac{2}{3}-y^2$ へ $x=t$ を代入し、$y=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}-t}$　　$P(t,0,0),\ Q\left(t,-\sqrt{\dfrac{2}{3}-t},0\right),\ R\left(t,\sqrt{\dfrac{2}{3}-t},0\right)$

正三角形 SQR の１辺の長さ QR＝$2\sqrt{\dfrac{2}{3}-t}$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\right)$

Step 2　正三角形 SQR の点 S の座標を求める。

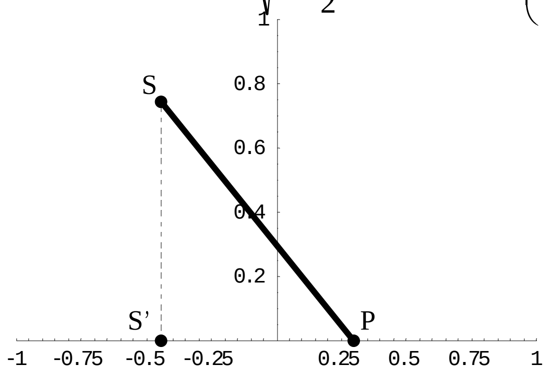


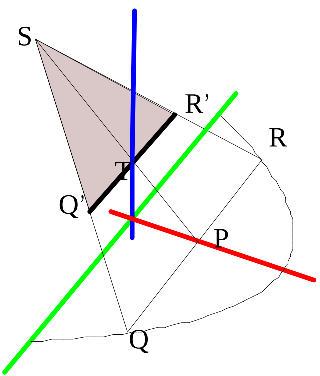
$SP=\sqrt{3}PR$ へ $PR=\dfrac{1}{2}QR=\sqrt{\dfrac{2}{3}-t}$ を代入し　$SP=\sqrt{2-3t}$

点 S から x 軸へ垂線を下ろし点 S' とする。　∠SPO＝45°より

$S'P=SP\cos 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2-3t}=\sqrt{1-\dfrac{3}{2}t}$

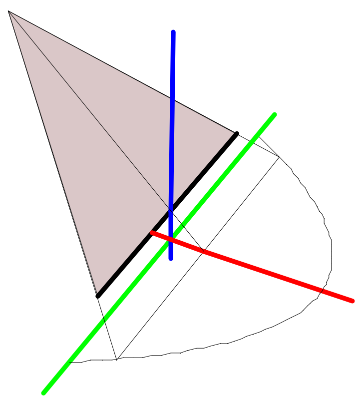
$OS'=OP-S'P=t-\sqrt{1-\dfrac{3}{2}t}$　　　$S\left(t-\sqrt{1-\dfrac{3}{2}t},0,\sqrt{1-\dfrac{3}{2}t}\right)$





Step 3　点 S の x 成分がマイナスになる範囲を求める。

正三角形 SQR が yz 平面と共有点をもつ　⇔ **同値** ⇔　点 S の x 成分が負になる



$t-\sqrt{1-\dfrac{2}{3}t} \leqq 0$ ，　$0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}$ の共通部分の範囲を求める。$t \leqq \sqrt{1-\dfrac{3}{2}t}$

$t^2 \leqq 1-\dfrac{3}{2}t$

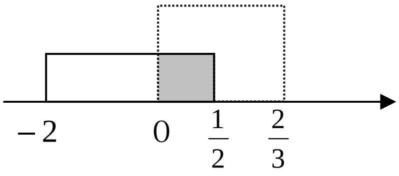
$2t^2+3t-2<0$

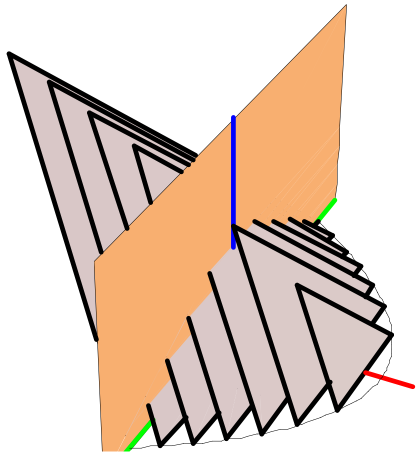
$(2t-1)(t+2) \leqq 0$

$-2 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}$ との共通部分を求めると

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$　よって　$a = \dfrac{1}{2} \cdots$（答）





（2）

Step 1　線分 Q'R'の長さを t で表示する。

正三角形 SQR において、

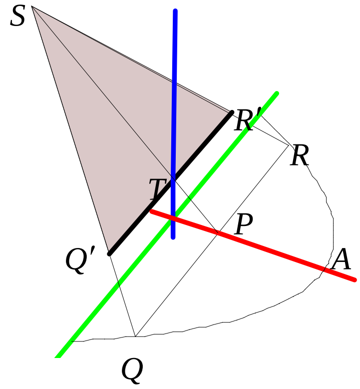
$SP = \sqrt{2-3t}\,, TP = \sqrt{2}\,t$ より

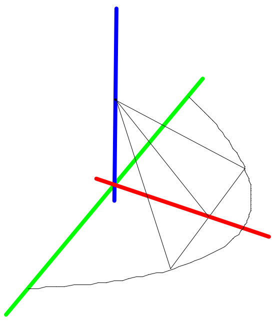
$ST = \sqrt{2-3t} - \sqrt{2}\,t$

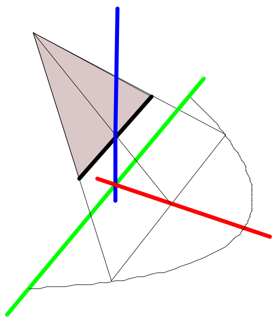
三角形 STR'は直角三角形であるから

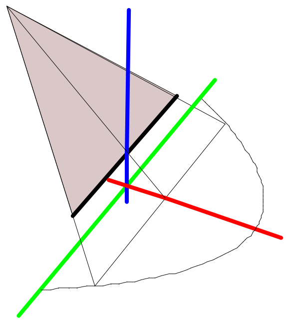
$TR' = ST \times \tan 30°$

$TR' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2-3t} - \sqrt{2}\,t\right)$　　$Q'R' = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2-3t} - \sqrt{2}\,t\right)$



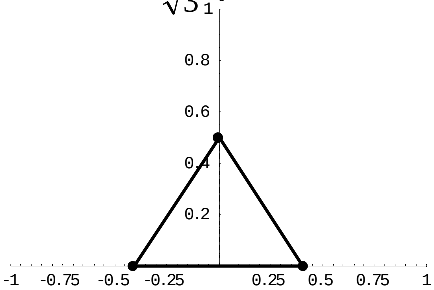


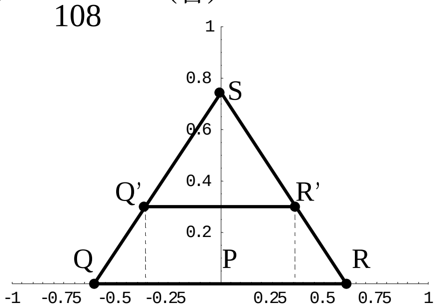


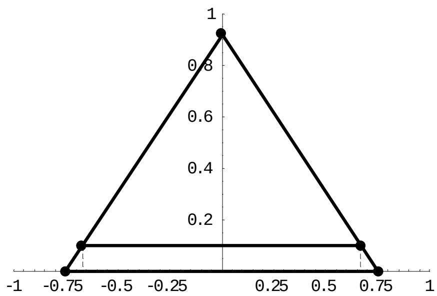


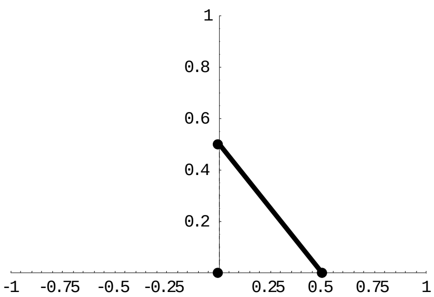
Step 2　正三角形 SQR が通過する yz 平面上の部分の面積を求める。

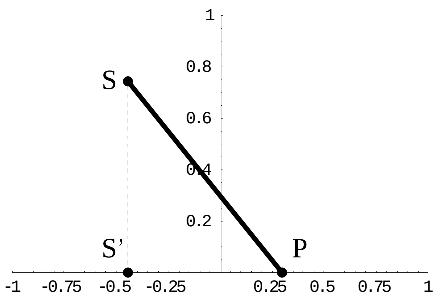
求める面積$= \dfrac{2}{\sqrt{3}}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2-3t} - \sqrt{2}\,t\right)dt = \dfrac{19\sqrt{6}}{108} \cdots$（答）

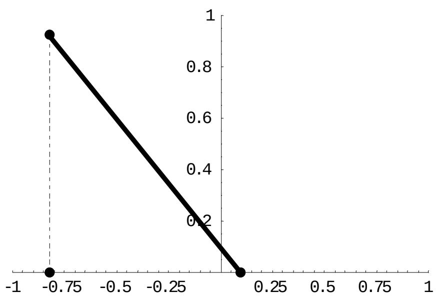












Exercise 4　回転体の体積　2003 年中部大学

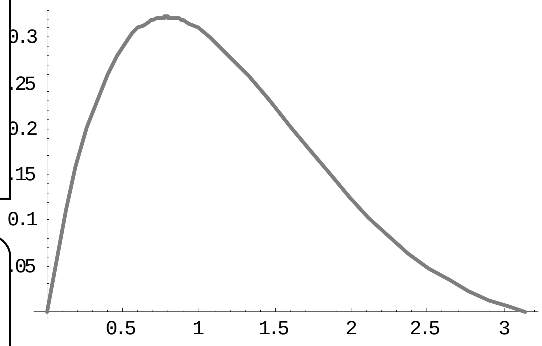
曲線 $y=e^{-x}\sin x$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

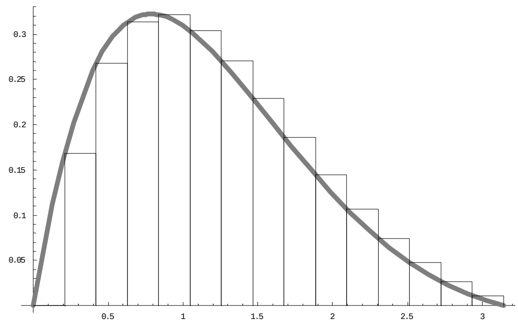
〔解答例〕

回転体の体積の公式

$y=f(x)$ のグラフと $x=a, x=b\ (a<b)$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできた立体の体積 V

$$V=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx$$





$$V=\int_0^\pi \pi\left(e^{-x}\sin x\right)^2 dx$$
$$=\pi\int_0^\pi e^{-2x}\sin^2 x\,dx$$
$$=\pi\int_0^\pi e^{-2x}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^\pi e^{-2x}dx-\int_0^\pi e^{-2x}\cos 2x\right)dx\cdots\text{(A)}$$

倍角公式

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ より

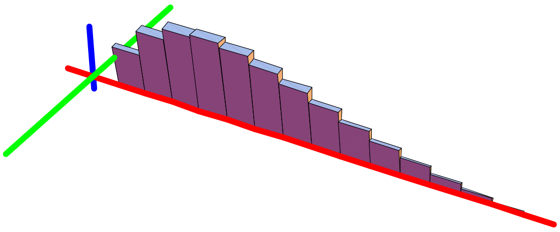
$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

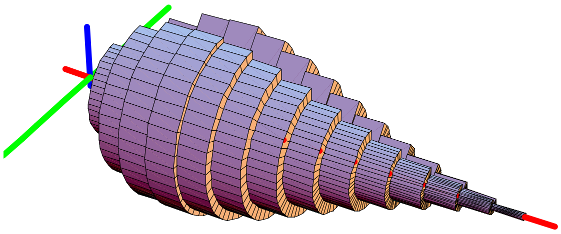
$\int_0^\pi e^{-2x}\cos 2x$ の計算方法

$$\left(e^{-2x}\cos 2x\right)'=-2e^{-2x}\cos 2x-2e^{-2x}\sin 2x\cdots①$$
$$\left(e^{-2x}\sin 2x\right)'=-2e^{-2x}\sin 2x+2e^{-2x}\cos 2x\cdots②$$

②−①

$$4e^{-2x}\cos 2x=\left(e^{-2x}\sin 2x-e^{-2x}\cos 2x\right)'$$
$$e^{-2x}\cos 2x=\frac{1}{4}\left(e^{-2x}\sin 2x-e^{-2x}\cos 2x\right)'$$





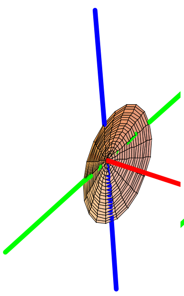
$$\int_0^\pi e^{-2x}\cos 2x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^\pi\left(e^{-2x}\sin 2x-e^{-2x}\cos 2x\right)'dx$$
$$=\left[\frac{e^{-2x}\sin 2x-e^{-2x}\cos 2x}{4}\right]_0^\pi=\frac{1-e^{-2\pi}}{4}\cdots③$$

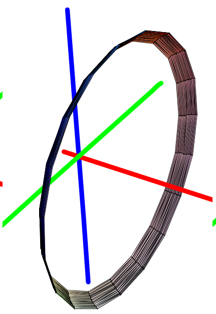
$$\int_0^\pi e^{-2x}dx=\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^\pi=\frac{1-e^{-2\pi}}{2}\cdots④$$

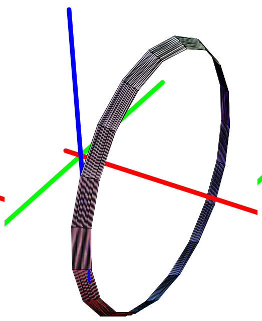
③④を（A）へ代入して

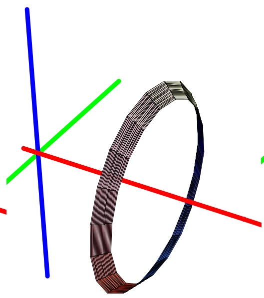
$$\text{(A)}\ =\frac{\pi}{2}\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{2}-\frac{1-e^{-2\pi}}{4}\right)=\frac{1-e^{-2\pi}}{8}\pi\cdots\text{（答）}$$

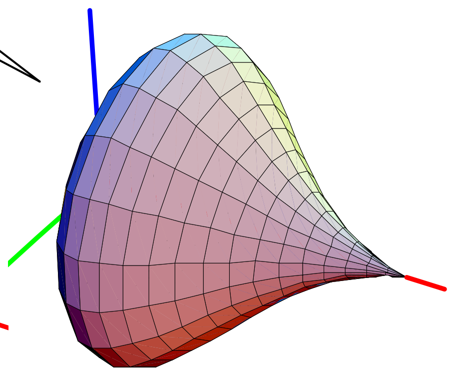
「玉ねぎ」の体積











Exercise 5　回転体の体積　2003 年東京理科大学理工

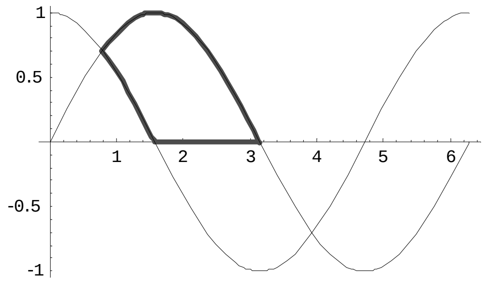
2つの曲線 $C_1 : y=\sin x$，$C_2 : y=\cos x$　$\left(0 \leqq x \leqq 2\pi\right)$を考える。

（1） C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ。

（2） C_1 と C_2 で囲まれた図形の $y \geqq 0$ にある部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

〔解答例〕

（1） C_1 と C_2 の交点の x 座標は、 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5}{4}\pi$

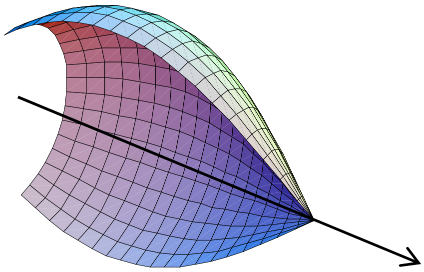


（2）求める立体は右の太線の部分を x 軸のまわりに回転させたものである。

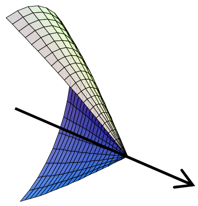
$y=\sin x$ の $\dfrac{\pi}{4}$ から π までを x 軸のまわりに回転させた立体 Fig‐1

$y=\cos x$ の $\dfrac{\pi}{4}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ までを x 軸のまわりに回転させた立体 Fig‐2

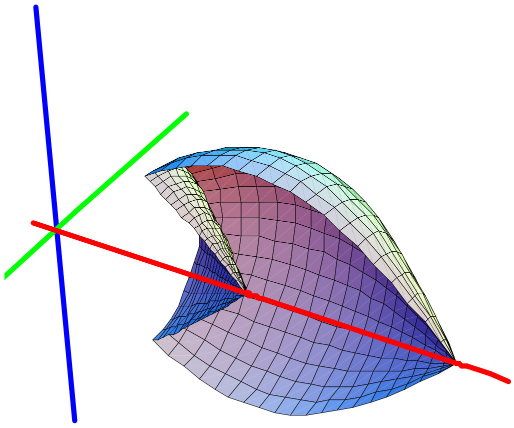
【Fig－1 の体積】－【Fig－2 の体積】＝【求める立体の体積】



【Fig‐1】



【Fig‐2】



求める立体の体積＝$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\pi\sin^2 x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2 x\,dx$

$\displaystyle =\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(1-\cos 2x)dx-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx$

$\displaystyle =\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}-\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

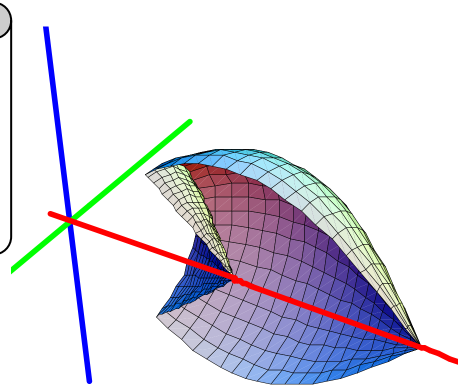
$\displaystyle =\frac{3}{8}\pi^2+\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{8}\pi^2+\frac{1}{4}\pi$

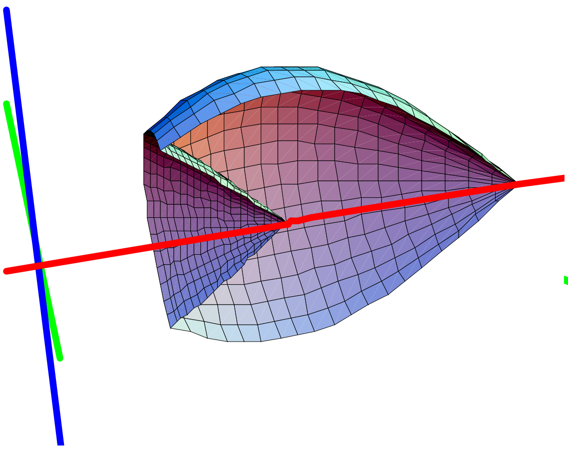
$\displaystyle =\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}$ ・・・（答）

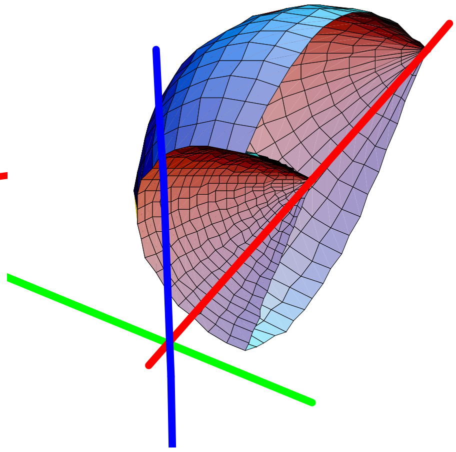
$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

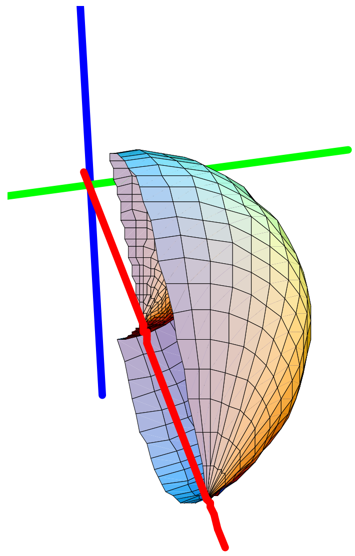
$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

を活用せよ。







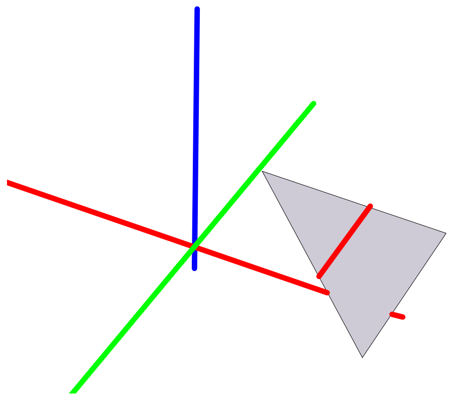


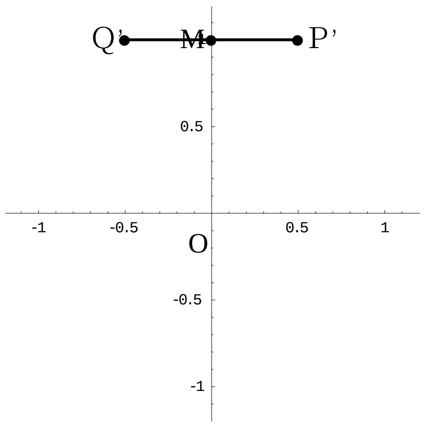
Exercise 6　三角形の回転問題

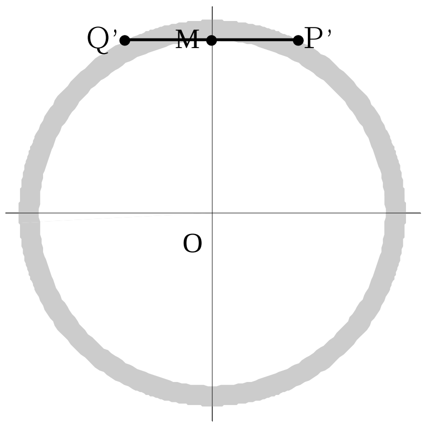
空間内に、３点 $P\left(1,\frac{1}{2},0\right),Q\left(1,-\frac{1}{2},0\right),R\left(\frac{1}{4},0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ を頂点とする正三角形の板 S がある。S を z 軸のまわりに１回転させたとき、S が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ。

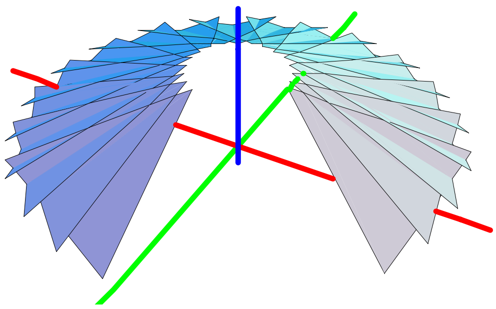
〔解答例〕

z 軸に垂直な平面 $z=t\left(0\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ で正三角形 S を切断し切断面を考える。線分 P'Q'を z 軸の回りに回転すると、ドーナッツ状の断面が完成する。





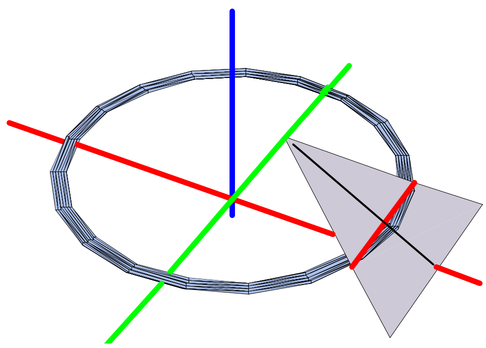




ドーナッツ状断面積＝π OP'^2 －π OM'^2 ＝π $\left(OP'^2-OM'^2\right)$

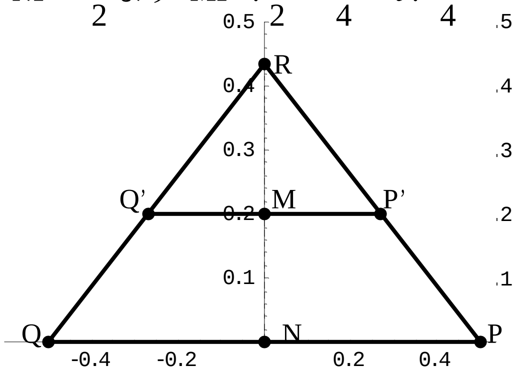
ピタゴラスの定理 $OP'^2=OM'^2+MP'^2$ により

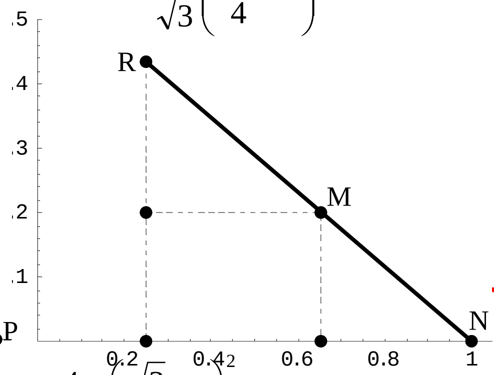
ドーナッツ状断面積＝π MP'^2 …①

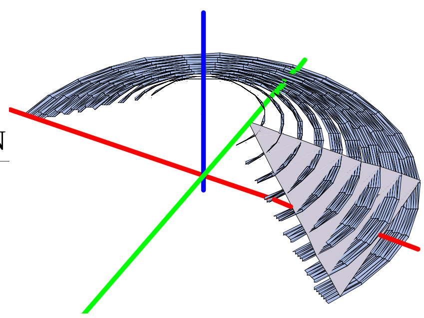


三角形の相似比を利用する $MP':NP=RM:RN=\frac{\sqrt{3}}{4}-t:\frac{\sqrt{3}}{4}$

$NP=\frac{1}{2}$ より　$MP':\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}-t:\frac{\sqrt{3}}{4}$　　$MP'=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-t\right)$





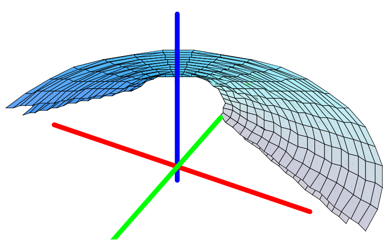


ドーナッツ状の断面積 $S(t)$ とすると $S(t)=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-t\right)^2$

t の動く範囲が $0\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{4}$ より、求める体積Ｖは

$$V=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}S(t)\,dt=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-t\right)^2dt=\frac{4}{3}\pi\left[\frac{1}{3}\left(t-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

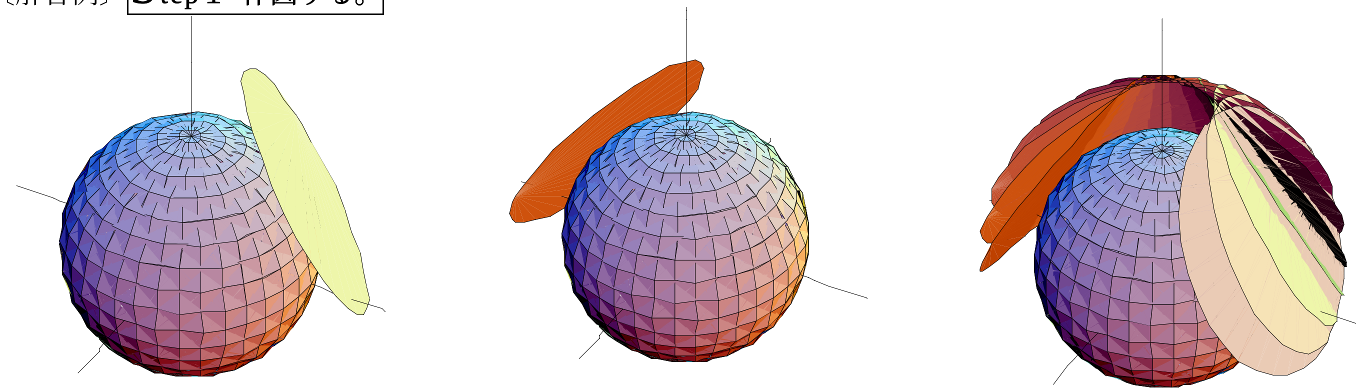
$$=\frac{\sqrt{3}}{48}\pi\cdots\text{（答）}$$



Exercise 7　円盤の回転に関する問題

z 軸上の点 $A(0,0,2)$ を通る平面 α が、原点 O を中心とする半径 1 の球面に接しながら 1 周する（接点を P とすると OP ⊥ α）。このとき、接点 P を中心とする平面 α 上の半径 1 の円盤が通過する部分を F とする。F の体積を求めよ。

〔解答例〕 **Step 1　作図する。**



Step 2　回転軸に垂直な平面 z=t による円盤を切断する。

断面積を $S(t)$ とする。

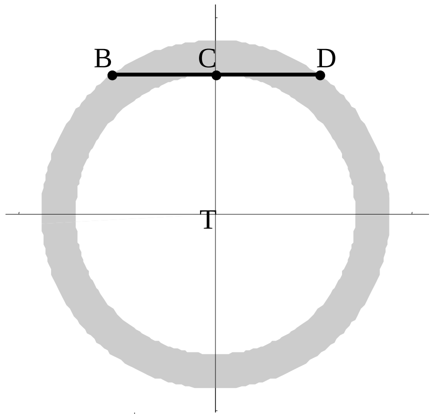
$S(t)=\pi\left(TB^2-TC^2\right)\cdots$①

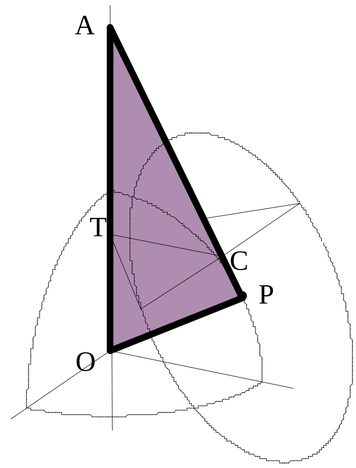
Step 3　TC と TB を求める。

$OT=t$

$AT=2-t$, $\tan 30^\circ=\dfrac{TC}{AT}$ より

$TC=(2-t)\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdots$②





△OTB は直角三角形より

$TB^2+OT^2=OB^2$

$TB^2=OB^2-OT^2\cdots$③

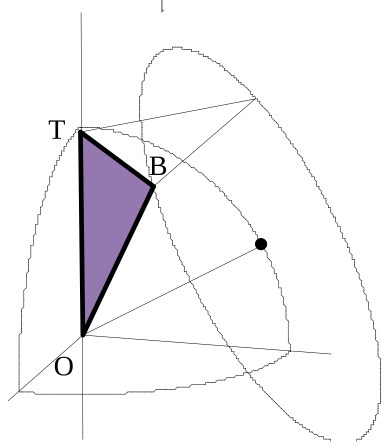
③④より $TB^2=2-t^2\cdots$⑤

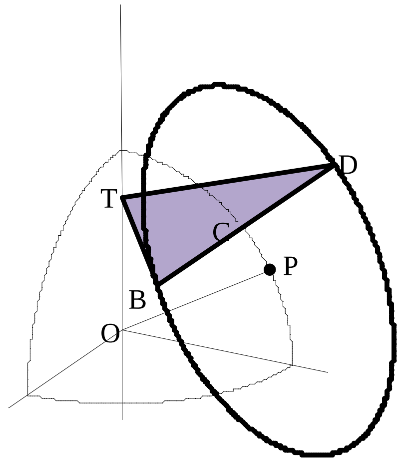
②⑤より

$S(t)=\pi\left(TB^2-TC^2\right)$

$=\pi\left(-\dfrac{4}{3}t^2+\dfrac{4}{3}t+\dfrac{2}{3}\right)$

$=-\dfrac{4}{3}\pi\left(t^2-t-\dfrac{1}{2}\right)$





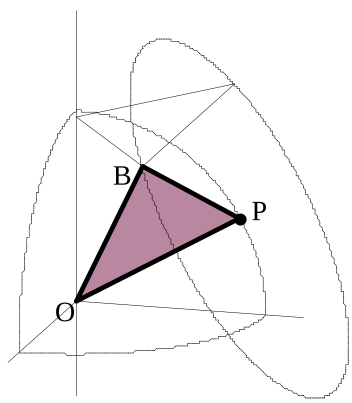
△OPB は直角三角形より

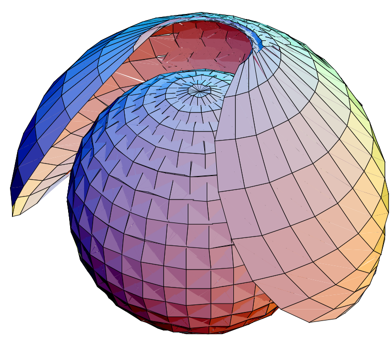
$OB^2=BP^2+OP^2$

$OP=1, BP=1\cdots$④

$OB^2=2$

$OB=\sqrt{2}$





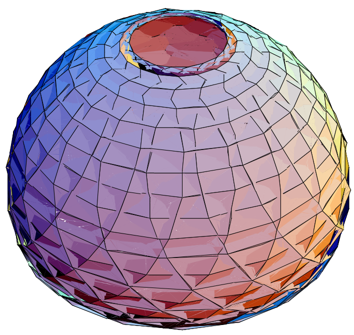
Step 4　図よりｔの範囲を求める。

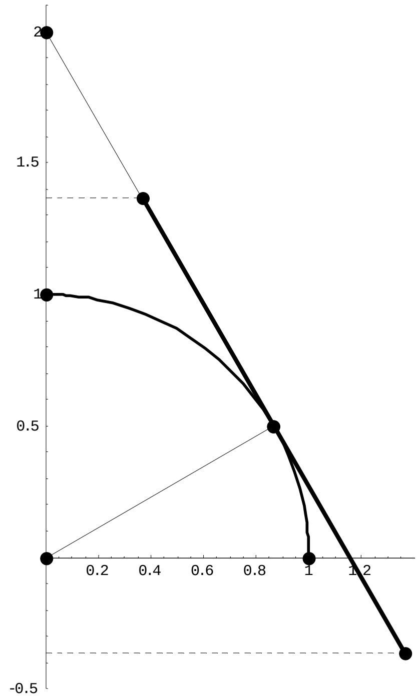
$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Step 5　断面積より体積を求める。

$$\mathrm{V}=\int_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}S(t)dt$$

$$=\int_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{4}{3}\pi\left(t^2-t-\frac{1}{2}\right)dt$$





Point　$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を活用する。

$t^2-t-\frac{1}{2}=0$ とおく $2t^2-2t-1=0$

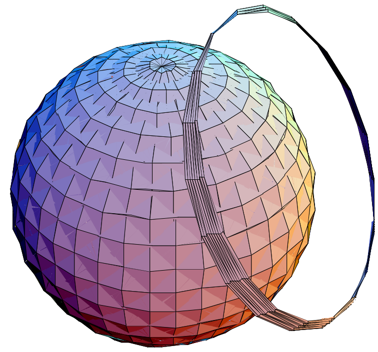
$$t=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

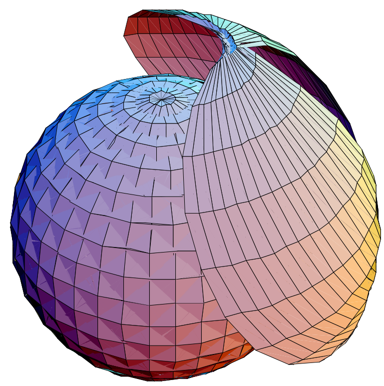
$$\beta=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

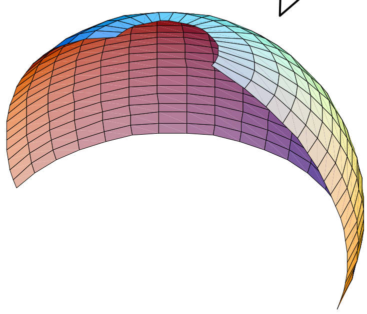
$$\int_{\alpha}^{\beta}(t-\alpha)(t-\beta)dt=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

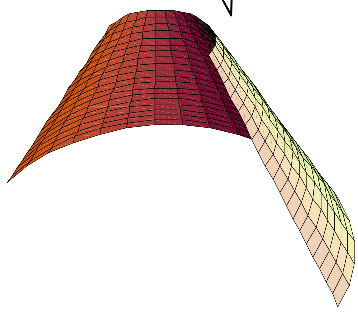
$$=-\frac{1}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

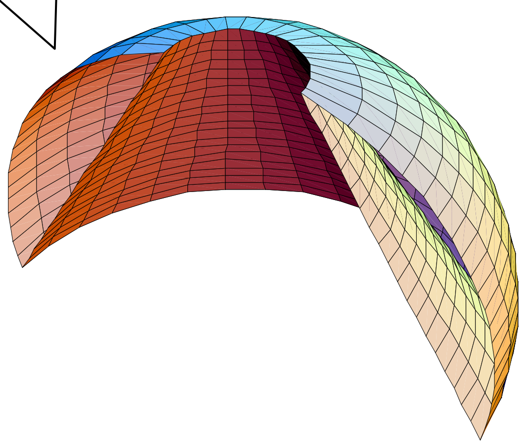
$$\mathrm{V}=\frac{4}{3}\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

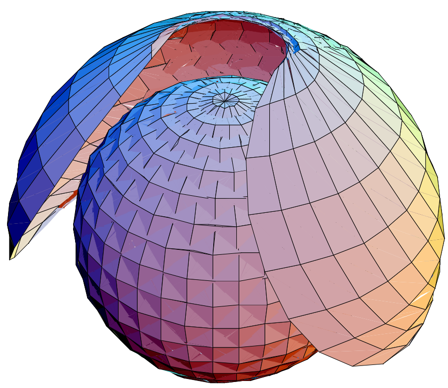












第３話　バウムクーヘン型体積

Exercise 8　2003 年信州大学

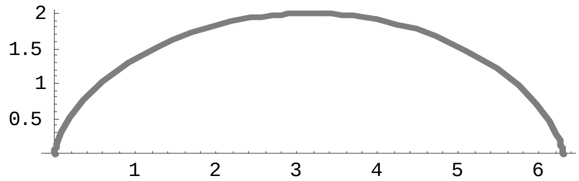
　媒介変数θで表されたサイクロイド$x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$とx軸とで囲まれた図形を、y軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。ただし、aは正の定数とする。

〔解答例その 1〕教科書とおり、体積を求め正面突破を試みる。

（ｉ）$\pi a\leqq x$のとき（大きい回転体の体積V_1）

$$V_1=\int_0^{2a}\pi x^2 dy=\int_{2\pi}^{\pi}\pi x^2\frac{dy}{d\theta}d\theta$$

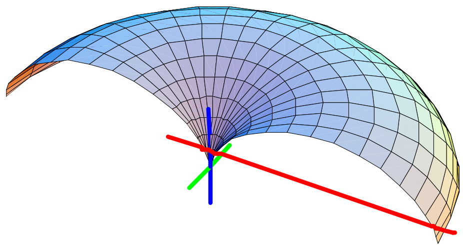
x	$0\to 2a$
θ	$2\pi\to\pi$



（ii）$x\leqq\pi a$　のとき（小さい回転体の体積V_2）

$$V_2=\int_0^{2a}\pi x^2 dy=\int_0^{\pi}\pi x^2\frac{dy}{d\theta}d\theta$$

x	$0\to 2a$
θ	$0\to\pi$

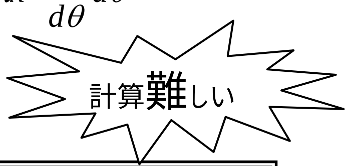


求める立体の体積 Vとすると

$$V=V_1-V_2=\int_{2\pi}^{\pi}\pi x^2\frac{dy}{d\theta}d\theta-\int_0^{\pi}\pi x^2\frac{dy}{d\theta}d\theta$$

$$=-\int_{\pi}^{2\pi}\pi x^2\frac{dy}{d\theta}d\theta-\int_0^{\pi}\pi x^2\frac{dy}{d\theta}d\theta=-\int_0^{2\pi}\pi x^2\frac{dy}{d\theta}d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}\pi a^3(\theta-\sin\theta)^2\sin\theta\,d\theta$$



パップス・ギュルダンの定理（Pappus－Guldin）

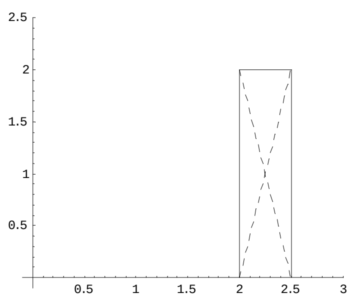
　平面上に面積 Sの図形 D と直線lがある。D の重心 G とlとの距離を L とする。lが D の内部を通らないとき、D をlのまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

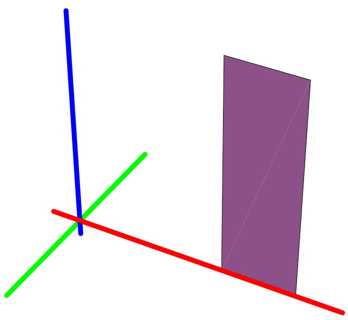
$$V=2\pi L\times S$$

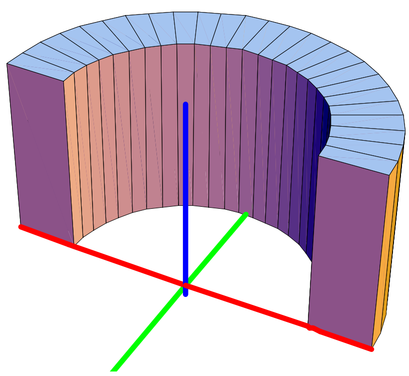
バウムクーヘン型立体の体積

$$V=2\pi\int_a^b x\,f(x)\,dx$$

長方形 ABCD をｙ軸のまわりに回転してできるパイプ状の立体〔右下図〕の体積δVとする。

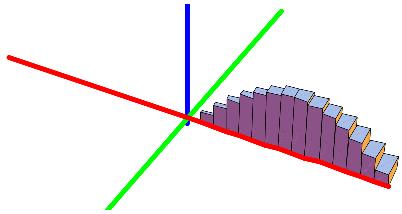






パップス・ギュルダンの定理より

$$\delta V = 2\pi\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\times\delta x\times f(x) = 2\pi\ x\,f(x)\delta x + \pi\ f(x)\delta x^2$$



$$\frac{\delta V}{\delta x} = 2\pi\,x\,f(x) + \pi\,f(x)\delta x$$　分割を細かくすると $\delta x \to 0$

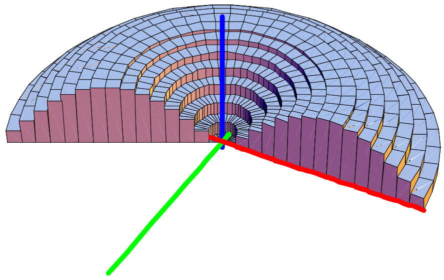
$$V = 2\pi\int_a^b x\ f(x)\,dx$$

バウムクーヘン型
立体の体積

〔解答例その 2〕
このバウムクーヘン型の公式を利用してみよう。

$$V = 2\pi\int_0^{2\pi a} x\,y\,dx = 2\ \pi\int_0^{2\pi} a(\theta-\sin\theta)a(1-\cos\theta)\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

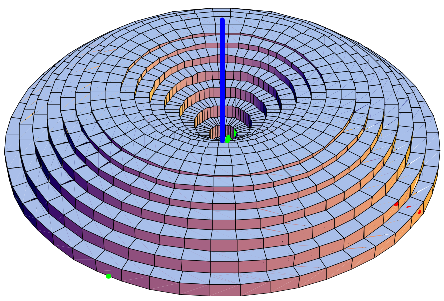
$$= 2a^3\pi\int_0^{2\pi}(\theta-\sin\theta)(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$



この計算も**難**しい

〔解答例その 3〕
パップス・ギュルダンの定理を利用する方法。

断面積 S＝$(x_2-x_1)\,dy$，サイクロイドの対称性より $\dfrac{x_2+x_1}{2}=\pi\ a$



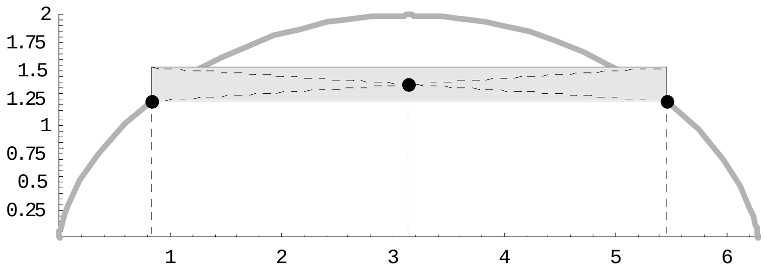
重心 G と回転軸である y 軸との距離 L は、L＝πa
長方形 ABCD を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 δV とする。

パップス・ギュルダンの定理より、

$$\delta V = 2\pi\,L\times S = 2\pi^2 aS = 2\pi^2 a(x_2-x_1)\,dy \cdot\cdot\cdot ①$$

$$V = 2\pi^2 aS = 2\pi^2 a\int_0^{2\pi a} ydx$$

$$= 2\pi^2 a\int_0^{2\pi} y\frac{dx}{d\theta}d\theta$$



$$= 2\pi^2 a\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= 2\pi^2 a^3\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$= 6\pi^3 a^3$ ・・・(答)

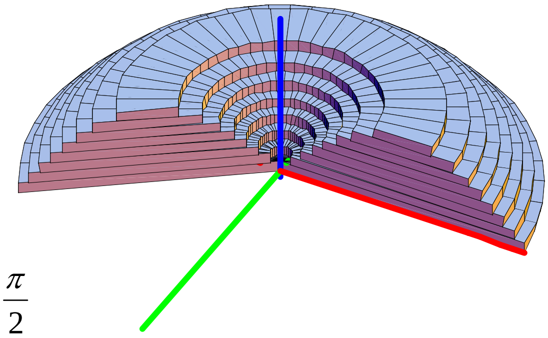
①以降の別解　左右対象性に注目して、$x_2 - x_1 = 2\pi a - 2x_1$

$\delta V = 2\pi^2 a\{2\pi a - 2x_1\}dy$， $x_1 = a(\theta-\sin\theta)$ を代入して

$= 4\pi^2 a^2(\pi-\theta+\sin\theta)dy$， $y = a(1-\cos\theta)$ より $dy = a\sin\theta\,d\theta$

$= 4\pi^2 a^3(\pi-\theta+\sin\theta)\sin\theta\,d\theta$

$= 4\pi^2 a^3(\pi\sin\theta - \theta\sin\theta + \sin^2\theta)d\theta$ ・・・②



$$\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} = 2$$

$$\int_0^{\pi}\theta\sin\theta\,d\theta = [-\theta\cos\theta]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta = \pi$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

②へ代入して

V＝$\displaystyle\int_0^{\pi} 4\pi^2 a^3(\pi\sin\theta - \theta\sin\theta + \sin^2\theta)d\theta = 4\pi^2 a^3\times\frac{3\pi}{2}$

$= 6\pi^3 a^3\cdots$（答）