第83回北数教数学教育実践研究会　平成24年12月1日(土)
アスティ45ビル　10階セミナールーム

大学入試問題分析

Jensen 不等式を活用した解法

凸不等式から得られるもの

松本睦郎（札幌北高等学校）

　大学入試問題には、様々な特殊不等式を活用した問題が出題される。教科書、問題集において、「相加平均・相乗平均」,「シュワルツの不等式」は、記載されている。
しかし、「Jensen の不等式」は、あまり活用されていない。
　一見すると難問に見える大学入試問題が、「Jensen の不等式」を利用すると、簡単に解法できるケースがある。今回は、「Jensen の不等式」を活用した例題をまとめた。

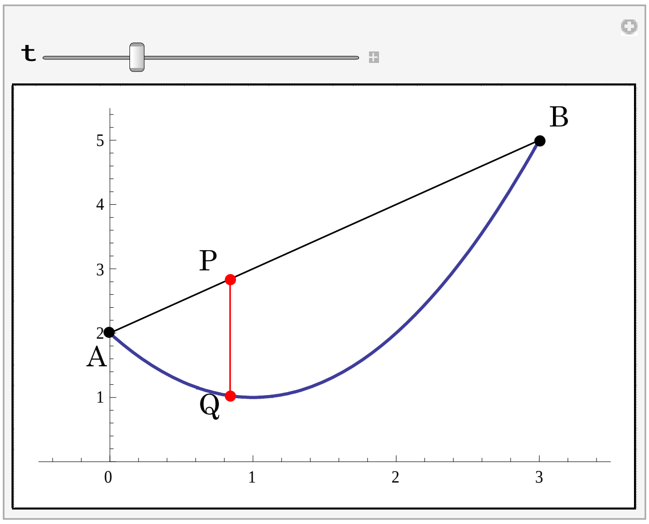
Episode1　凸不等式

関数$y=f(x)$は、$x>0$において、$f''(x)>0$を満たす。
$x_1>0, x_2>0$において$s+t=1, s\geq 0, t\geq 0$

$$f(sx_1+tx_2)\leq sf(x_1)+tf(x_2)$$

Proof

$f''(x)>0$より$y=f(x)$は、下に凸の曲線である。
「曲線 AB は、線分 AB よりも下に存在する。」(↓)



$\mathrm{A}(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$とし、

$$\mathrm{Q}(sx_1+tx_2, f(sx_1+tx_2)), P(sx_1+tx_2, sf(x_1)+tf(x_2))$$

点 P は、線分 AB を$t:s$に内分する点である。上図より

$$f(sx_1+tx_2)\leq sf(x_1)+tf(x_2)$$

Q.E.D.

Episode2　相加平均・相乗平均

$p \neq q, p, q, r$は正の実数とする。このとき

$$\frac{p+q+r}{3} > \sqrt[3]{pqr}$$

を証明せよ。　信州大学 2010 後期

Proof

$f(x) = logx \ \ (x > 0)$とおく。

$y = f(x)$上の異なる3点　$P(p, logp), Q(q, logq), R(r, logr)$,△PQRの重心Gとすると、

$$G\left(\frac{p+q+r}{3}, \frac{logp+logq+logr}{3}\right)$$

$y = f(x)$上の点

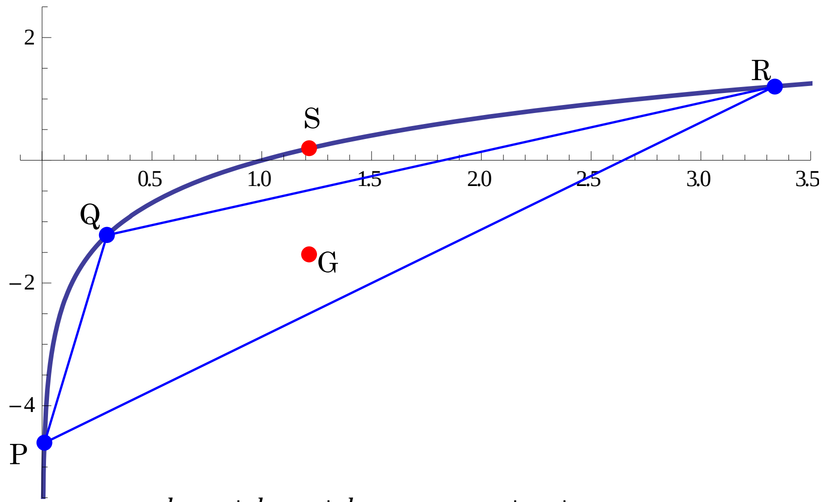
$$S\left(\frac{p+q+r}{3}, log\frac{p+q+r}{3}\right)$$

$$y = logx$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$y = f(x)$のグラフは、上に凸なので、



$$\frac{logp+logq+logr}{3} < log\frac{p+q+r}{3}$$

$$\frac{1}{3}logpqr < log\frac{p+q+r}{3}$$

$$\sqrt[3]{pqr} < \frac{p+q+r}{3}$$

Q.E.D.

Episode 3　重み$\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n}$に関する$\boldsymbol{A_1, A_2, \cdots A_n}$の加重重心

平面上にn個の点$A_1, A_2, \cdots A_n$が存在し、

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha \quad , \qquad \alpha \neq 0$$

を満たす実数とする。

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$

が成立するとき、

点Pを重み$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$に関する$A_1, A_2, \cdots A_n$の加重重心

Episode 3　$\boldsymbol{n}$点の重心

平面上にn個の点$A_1, A_2, \cdots A_n$が存在し、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}$$

n個の点$A_1, A_2, \cdots A_n$の重心

Episode 5　Jensenの不等式

$x > 0$において、$f''(x) > 0$

$n \geq 2, x_1 > 0, x_2 > 0, \cdots, x_n > 0$とする。

$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0. \cdots, \alpha_n \geq 0$ のとき、

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

Proof

nに関する数学的帰納法によって証明するのが一般的である。

$n = 2$の時

$x_1 > 0, x_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ 前述のEpisode1凸不等式より

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

は成立する。

$n = k$の時

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \ \ (i = 1,2,3, \cdots, k)$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots \alpha_k f(x_k)$$

が成立すると仮定する。

$n = k + 1$の時

$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \mathrm{\alpha_{k+1}} = 1, \mathrm{\alpha_1} \geq 0, \mathrm{\alpha_2} \geq 0, \mathrm{\alpha_3} \geq 0, \cdots, \mathrm{\alpha_k} \geq 0, \mathrm{\alpha_{k+1}} \geq 0$

とする時

$s=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k, t=\alpha_{k+1}$とおくと、$s+t=1, s\geq 0, t\geq 0$

$$\frac{\alpha_i}{s}=\alpha_i', (i=1,2,\cdots,k)$$

$$X=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{s}x_i, Y=x_{k+1}$$

$$X=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i' x_k$$

$$\alpha_1'+\alpha_2'+\cdots+\alpha_k'=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}{s}=1$$

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_kx_k+\mathrm{\alpha_{k+1}x_{k+1}})=f(sX+tY)$$

$$\leq sf(X)+tf(Y)=sf\left(\frac{\alpha_1}{s}x_1+\frac{\alpha_2}{s}x_2+\cdots+\frac{\alpha_k}{s}x_k\right)+tf(x_{k+1})$$

$$\leq s\left\{\frac{\alpha_1}{s}f(x_1)+\frac{\alpha_2}{s}f(x_2)+\cdots+\frac{\alpha_k}{s}f(x_k)\right\}+tf(x_{k+1})$$

$$=\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots\alpha_kf(x_k)+\alpha_{k+1}f(x_{k+1})$$

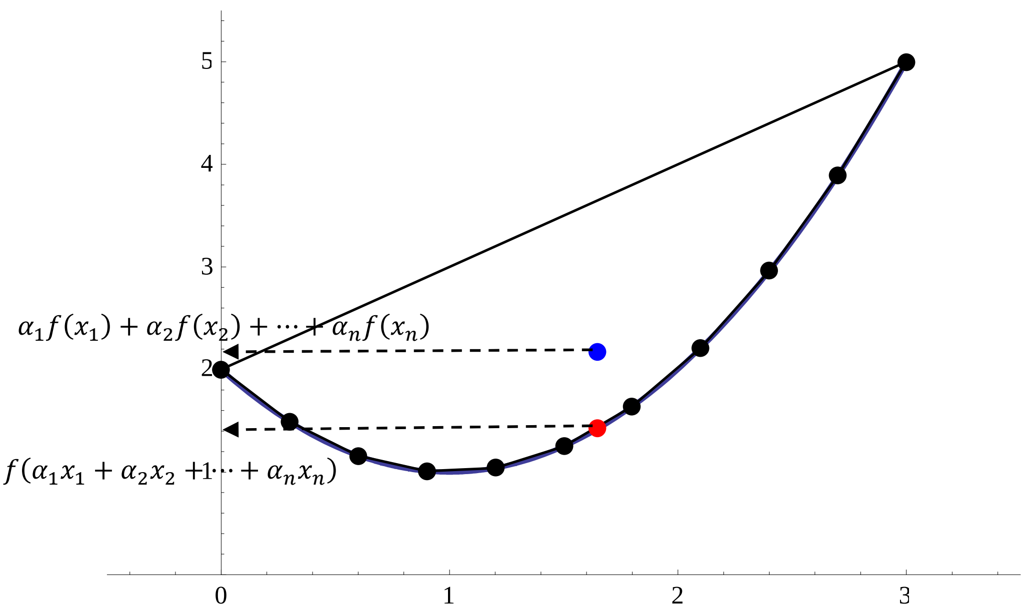
$n=k+1$の時も成立する。

以上より、すべての自然数nについて

$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1, \alpha_1\geq 0, \alpha_2\geq 0.\cdots, \alpha_n\geq 0$ のとき、

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_nf(x_n)$$

■



Example 1

正の実数a, b, pに対して

$\mathrm{A} = (a+b)^p$と$\mathrm{B} = 2^{p-1}(a^p + b^p)$の大小関係を調べよ。

東京工業大学 1999

[解答例]

$$f(x) = x^p \quad とおく。$$

$$f'(x) = px^{p-1}, f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$$

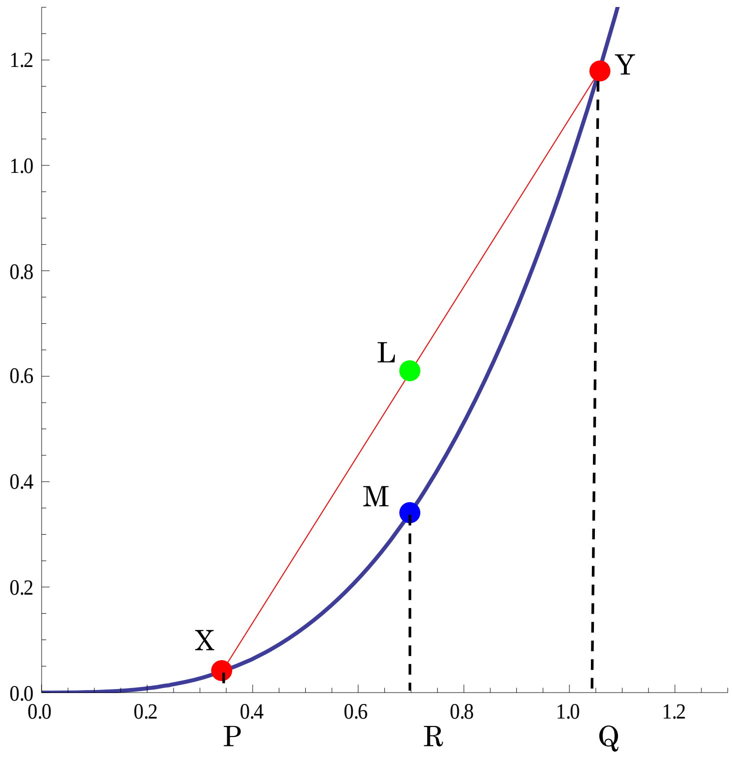
（ｉ）$p > 1$の場合

$x > 0$の時、$f''(x) > 0$となるので、$f(x) = x^p$は、下に凸のグラフである。

点$X(a, a^p), Y(b, b^p), P(a, 0), Q(b, 0)$とおく。

線分 PQ の中点$R\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$，弧 AB 上の点$M\left(\frac{a+b}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^p\right)$，線分 XY の中点$\mathrm{L}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^p+b^p}{2}\right)$

右図より



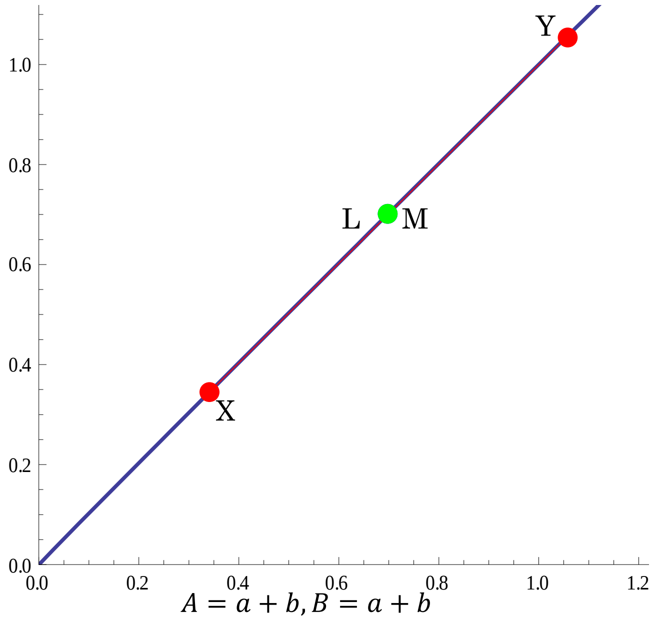
$$\frac{a^p + b^p}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^p$$

$$\frac{a+b}{2} > \frac{1}{2^p}(a+b)^p$$

$$2^{p-1}(a^p + b^p) > (a+b)^p$$

$$\therefore \mathrm{B} > A$$

（ⅱ）$p=1$の場合



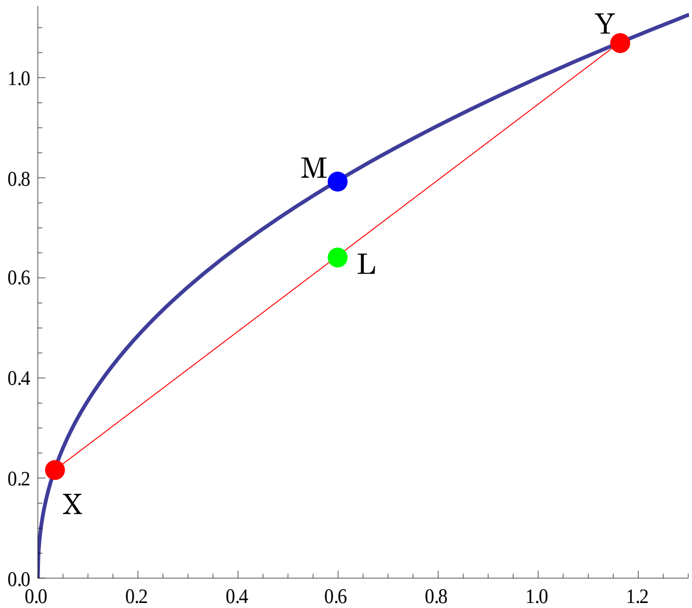
$$A=a+b, B=a+b$$

$$\therefore \mathrm{A}=\mathrm{B}$$

(ⅲ)$0<p<1$の場合

$$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}<0$$

$f(x)=x^p$は、上に凸のグラフ



$$\frac{a^p+b^p}{2}<\left(\frac{a+b}{2}\right)^p$$

$$\frac{a+b}{2}<\frac{1}{2^p}(a+b)^p$$

$$2^{p-1}(a^p+b^p)<(a+b)^p$$

$$\therefore \mathrm{B}>A$$

Example 2

α,β,γは$\alpha>0,\beta>0,\gamma>0,\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする。

このとき、$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$の最大値を求めよ。

京都大学 1999 後期

[解答例]

$f(x)=log(\sin x),(0<x<\pi)$のグラフについて　　$\beta+\gamma=\pi-\alpha>0$より$0<\alpha<\pi$

同様にして

$$0<\beta<\pi, 0<\gamma<\pi \qquad f'(x)=\frac{cosx}{sinx}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{sin^2x}<0$$

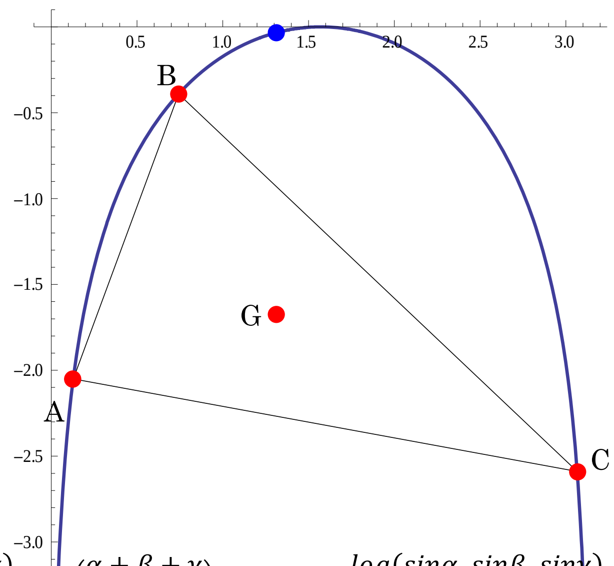
$f(x)=log(\sin x),(0<x<\pi)$のグラフは、上に凸のグラフである。

$A(\alpha,log(sin\alpha)),B(\beta,log(sin\beta)),C(\gamma,log(sin\gamma))$とおく。

△ABC の重心 G の y成分は、

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}=\frac{log(sin\alpha)+log(sin\beta)+log(sin\gamma)}{3}=\frac{log(sin\alpha\ \ sin\beta\ \ sin\gamma)}{3}$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=log\left(sin\frac{\pi}{3}\right)=log\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}\le f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) \qquad \frac{log(sin\alpha\ \ sin\beta\ \ sin\gamma)}{3}\le log\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$log(sin\alpha\ sin\beta\ sin\gamma)\le 3log\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$　　の時、等号成立。

■

Example 3

正の実数a,b,cが、$a+b+c=1$を満たしているとき、

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1$$

を示せ。

日本数学オリンピック 2005 年

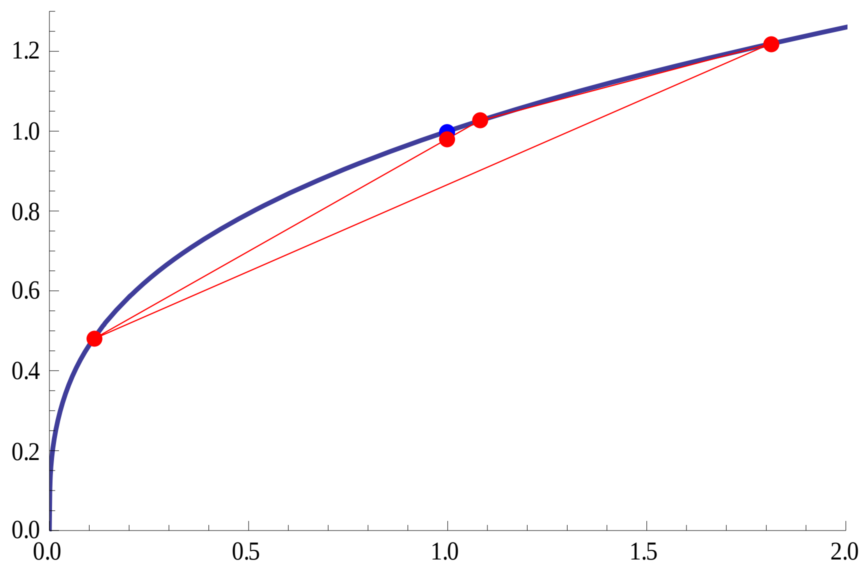
[解答例]

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}\quad (x>0)$$

とおく。

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}<0$$

$f''(x)<0$より。$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$は、上に凸のグラフである。



Jennsen の不等式より

$$x_1=1+b-c=a+b+c+b-c=2b+a>0$$
$$x_2=1+c-a=a+b+c+c-a=2c+b>0$$
$$x_3=1+a-b=a+b+c+a-b=2a+c>0$$

とおくと、

$$af(x_1)+bf(x_2)+cf(x_3)\leq f(ax_1+bx_2+cx_3)$$
$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq\sqrt[3]{a(1+b-c)+b(1+c-a)+c(1+a-b)}$$
$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq\sqrt[3]{a+b+c}$$
$$\therefore a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1$$

■

Example4

aを実数とする。また、関数$f(x)$を$x>1$の範囲において

$$f(x)=x^{-a}\{log(x+1)-log(x-1)\}。$$

（１）関数$f(x)$が単調減少であるためのaの条件を求めよ。

（２）級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

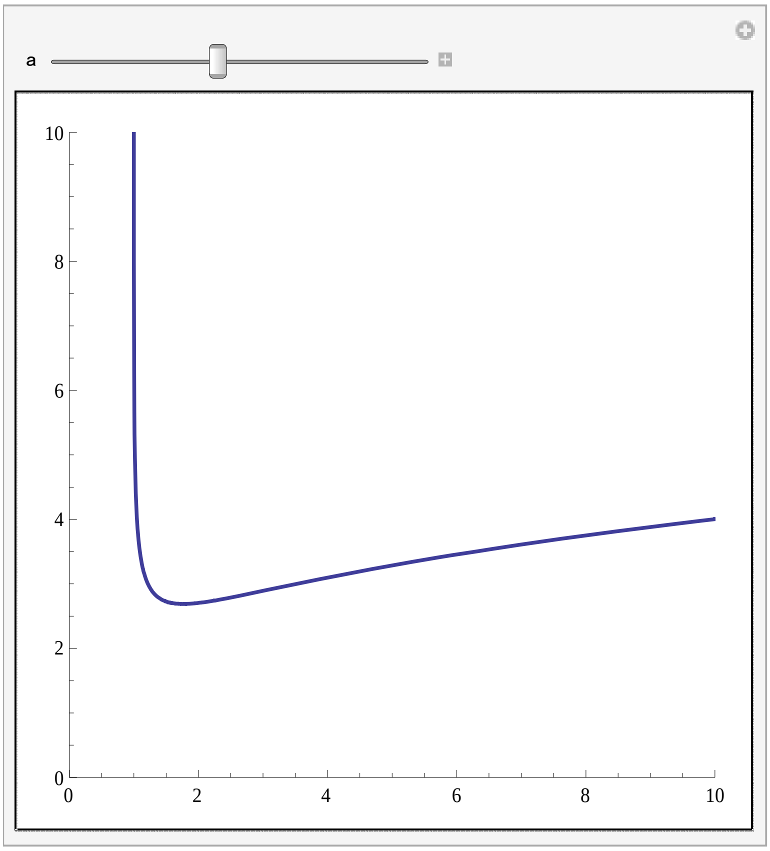
が正の無限大に発散するようなaの条件を求めよ。

札幌医科大学 2012

解答例

（１）省略

$f(x)$のグラフはaの変化により、様々なグラフになる。



（２）$f''(x)>0$を示す。

$$f(x)=x^{-a}\{log(x+1)-log(x-1)\}$$

$$x^a f(x)=log(x+1)-log(x-1)$$

$$f'(x)x^a+f(x)ax^{a-1}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$$

$$f''(x)x^a+f'(x)ax^{a-1}+f'(x)ax^{a-1}+f(x)a(a-1)x^{a-2}=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)x^a+2f'(x)ax^{a-1}+f(x)a(a-1)x^{a-2}=\frac{4x}{(x+1)^2(x-1)^2}$$

$x>1$ なので、

$$f''(x)x^a+2f'(x)ax^{a-1}+f(x)a(a-1)x^{a-2}>0$$

両辺をx^{a-2}で割ると、

$$f''(x)x^2+2af'(x)x+a(a-1)f(x)>0$$
$$f(x)a^2+\left(2f'(x)x-f(x)\right)a+f''(x)x^2>0$$

aを実数なので、判別式＜0

$$\left(2f'(x)x-f(x)\right)^2-4f(x)f''(x)x^2<0$$
$$\left(2f'(x)x-f(x)\right)^2<4f(x)f''(x)x^2$$
$$0<4f(x)f''(x)x^2$$

$f(x)=x^{-a}log\left(1+\frac{2}{x-1}\right)>0$　なので、

$$\therefore f''(x)>0$$
$$S(N)=\sum_{n=2}^{N}f(n)=f(2)+f(3)+\cdots+f(N)$$

$f''(x)>0$より、$f(x)$のグラフは、下に凸なので、Jensen の不等式

$$f\left(\frac{2+3+\cdots+N}{N-1}\right)<\frac{f(2)+f(3)+\cdots+f(N)}{N-1}$$

$$(N-1)f\left(\frac{2+3+\cdots+N}{N-1}\right)<S(N)\cdots(*)$$

$$左辺=(N-1)\frac{1}{\left(\frac{2+3+\cdots+N}{N-1}\right)^a}\left\{log\left(\frac{2+3+\cdots+N}{N-1}+1\right)-log\left(\frac{2+3+\cdots+N}{N-1}-1\right)\right\}$$
$$=(N-1)\frac{1}{\left(\frac{N+2}{2}\right)^a}\left\{log\left(\frac{N+2}{2}+1\right)-log\left(\frac{N+2}{2}-1\right)\right\}$$
$$=\frac{2^a(N-1)}{(N+2)^a}log\left(1+\frac{5}{N-1}\right)$$
$$=\frac{2^a(N-1)}{(N+2)^a}\times\frac{5}{(N-1)}log\left(1+\frac{5}{N-1}\right)^{\frac{N-1}{5}}$$

（ｉ）$a>0$の時

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2^a(N-1)}{(N+2)^a}\times\frac{5}{(N-1)}log\left(1+\frac{5}{N-1}\right)^{\frac{N-1}{5}}=\lim_{N\to\infty}\frac{5\times2^a}{(N+2)^a}log\left(1+\frac{5}{N-1}\right)^{\frac{N-1}{5}}=\infty$$

（＊）より$S(N)$は発散する。

$$\sum_{n=2}^{\infty}f(n)$$

は正の無限大に発散する。

（ⅱ）$a=0$の時

$$左辺=\lim_{N\to\infty}\frac{2^a(N-1)}{(N+2)^a}\times\frac{5}{(N-1)}log\left(1+\frac{5}{N-1}\right)^{\frac{N-1}{5}}=\lim_{N\to\infty}5\times log\left(1+\frac{5}{N-1}\right)^{\frac{N-1}{5}}=5$$

と収束してしまう。

$f(x)=log(x+1)-log(x-1)$より

$$S(N)=\sum_{n=2}^{N}f(n)=f(2)+f(3)+\cdots+f(N)$$

$$=log3+log4+log5+\cdots+log(N+1)-log2-log3-\cdots-log(N+1)$$

$$=-log2+logN+log(N+1)$$

$$\lim_{N\to\infty}S(N)=+\infty$$

$a=0$の時

$$\sum_{n=2}^{\infty}f(n)$$

は発散する。

（ⅲ）$a<0$の時

$$左辺=\lim_{N\to\infty}\frac{2^a(N-1)}{(N+2)^a}\times\frac{5}{(N-1)}log\left(1+\frac{5}{N-1}\right)^{\frac{N-1}{5}}$$

$$=\lim_{N\to\infty}2^a\times5\times(N+2)^{-a}log\left(1+\frac{5}{N-1}\right)^{\frac{N-1}{5}}=\infty$$

$$\lim_{N\to\infty}S(N)=+\infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}f(n)$$

は発散する。

（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）より、$a\leq0$のとき

級数

$$\sum_{n=2}^{\infty}f(n)$$

は発散する。