３次元空間と２次元空間への変換

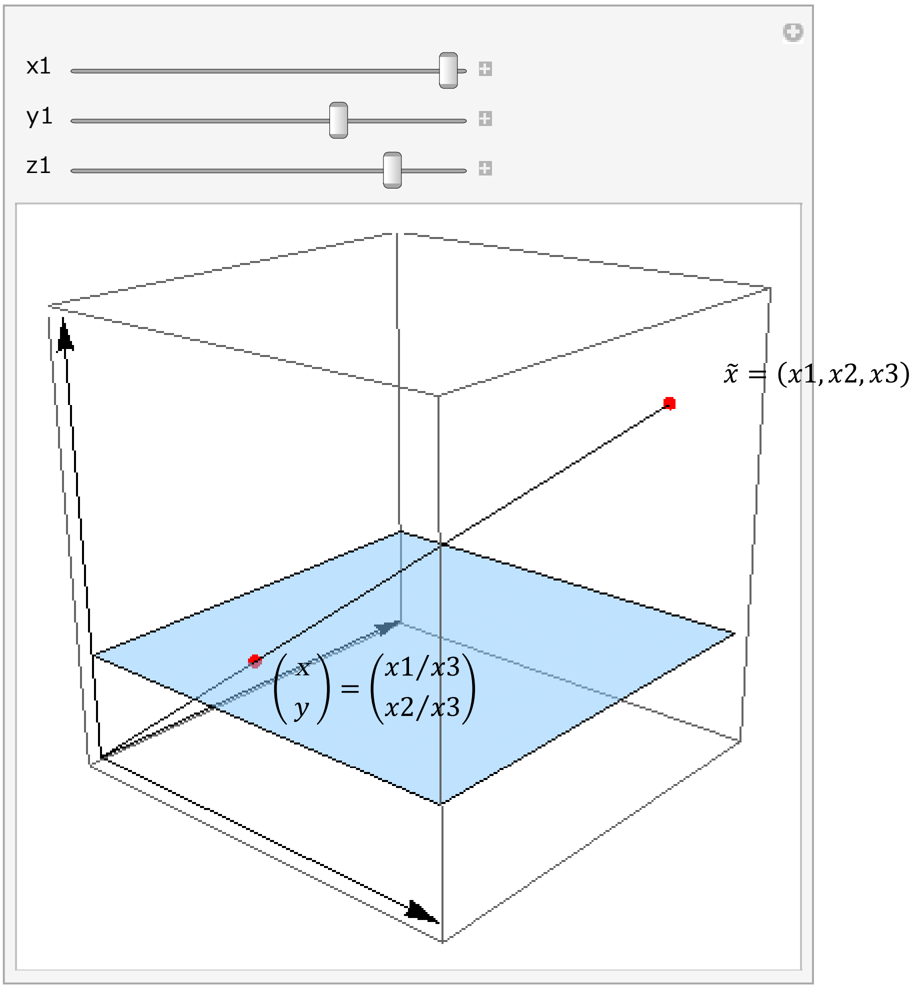
# 射影変換とダ・ビンチの世界

１枚絵画から得られるもの

松本睦郎（札幌北高等学校）

ルネッサンス期の画家レオナルド・ダ・ビンチ Leonard.da.Vinch(1452~1519)は、ジザール・デザルグ(Girard.Desargue(1591~1661)のデザルグの定理を知ることなく、透視図法によって、遠くのものを小さく、近くのものを大きく、無限遠点を消失点として、３次元空間を２次元世界に、リアルに近似した絵画を描いた。逆に、１枚の絵画から、3 次元世界を復元することはできるのか？その数学的背景を探った。

## Episode1　射影平面の同次座標



２次元平面上の点$\vec{x}=(x,y)$を

$$\tilde{x}=(x1,x2,x3)$$

によって表示する。
ただし、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x1/x3 \\ x2/x3 \end{pmatrix} \quad x3\neq 0$$

を満たす。

このとき、$\vec{x}=(x,y)$は、ユークリッド平面上の点表す。

更に、$x3=0$であれば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x1/x3 \\ x2/x3 \end{pmatrix}$$

は、無限大になり、$\tilde{x}=(x1,x2,x3)$は、直線上の無限遠点を表す。

空間の次元を１つ上げることにより、ユークリッド平面に無限遠直線を加えた点を表現できる。
この座標を**同次座標**と言う。

$$\tilde{x}=(x1,x2,x3)$$

をλ倍すると、

$$\lambda\tilde{x}=(\lambda x1,\lambda x2,\lambda x3)$$

これが、2 次元平面上の点は、

$$\begin{pmatrix} \lambda x1/\lambda x3 \\ \lambda x2/\lambda x3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x1/x3 \\ x2/x3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

射影平面の同時座標と、これを定数λ倍したものは、同値関係にあたる。

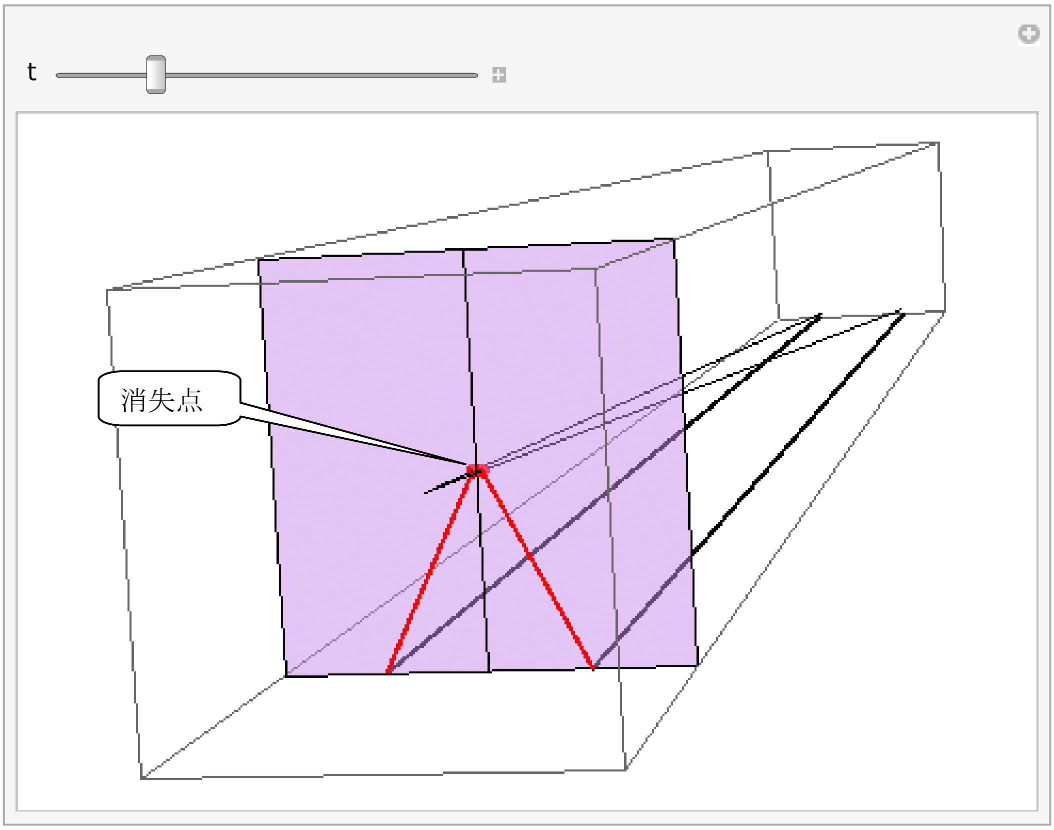
$$\tilde{x}\sim\lambda\tilde{x}$$

この２つの同次座標が同値であるとき、同じ点を表していると考える。
　射影平面 $P^2$とは、３次元ユークリッド平面 $R^3$から、原点（0,0,0）を除いた集合 $V^3$の同値関係～による、商集合 $V^3$/～である。

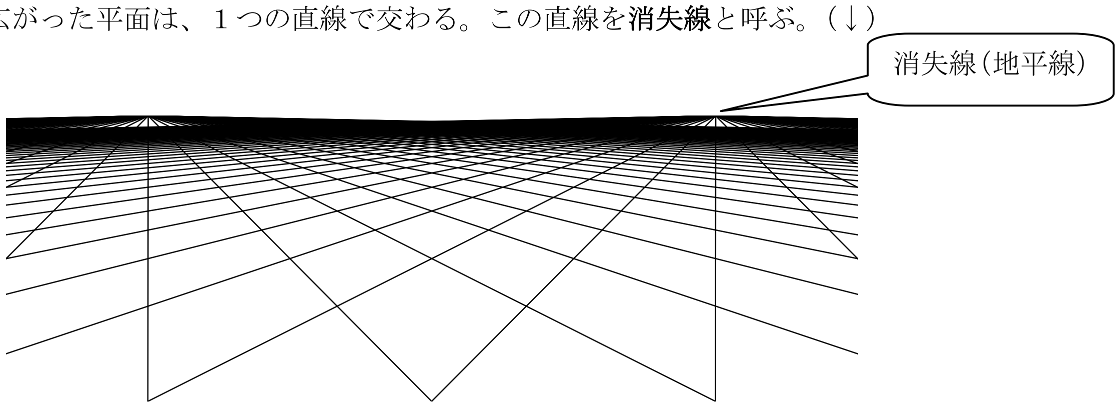
『同次座標により、２次元平面上の点が、３次元空間の直線と同一視される。』

## Episode 2　平行線が交わる射影幾何の世界

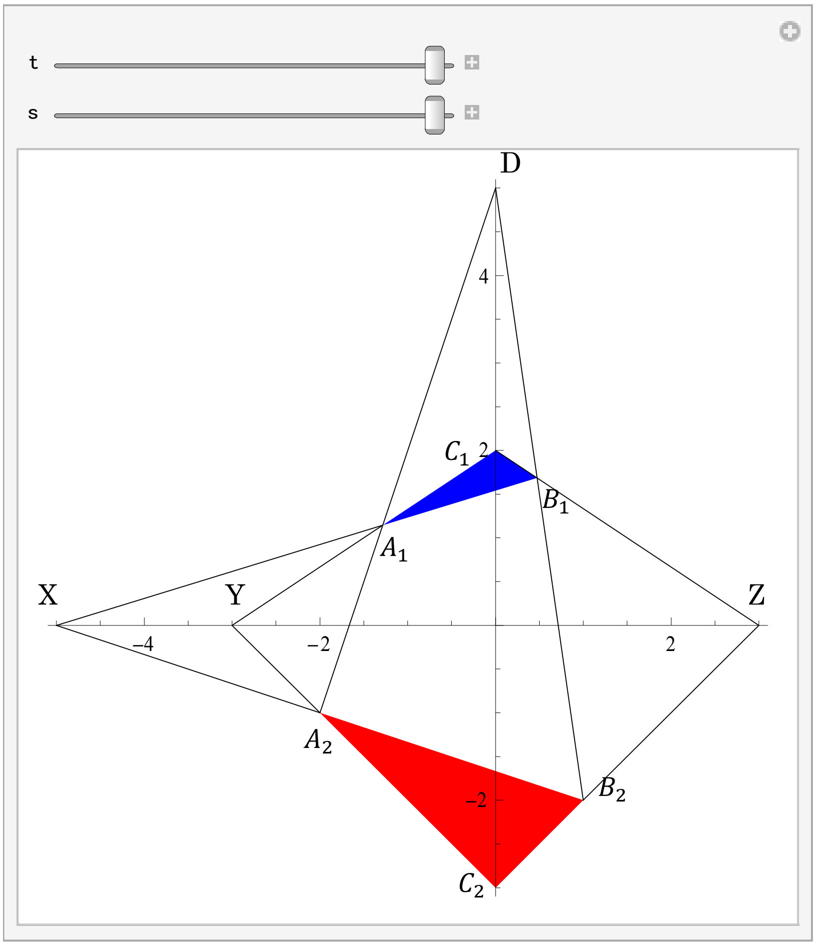
　ユークリッド幾何において、平行な２直線は、無限に延ばしても決して交わらない。しかし、下図のように『はじめから、平行線は、無限遠で交わる。』として、その交点を**消失点**と呼ぶ。（↓）




無限に広がった平面は、１つの直線で交わる。この直線を**消失線**と呼ぶ。（↓）



## Episode 3　デザルグの定理




デザルグ（G.Desargues,1591~1661）は、建築家でもあった。射影幾何学の最初の定理であるデザルグの定理を証明したが、18 世紀末から 19 世紀初めにかけて、モンジュ、ポンスレが射影幾何の研究を再興するまで、150 年間、この分野は、誰にも研究されなかった。

**デザルグの定理**

平面上に$\triangle A_1B_1C_1$と$\triangle A_2B_2C_2$があり、

３直線 $A_1A_2$,$B_1B_2$,$C_1C_2$ 組が 1 点 D で交われば、⇒直線 $A_1B_1$ と直線 $A_2B_2$ の交点, 直線 $B_1C_1$ と直線 $B_2C_2$ の交点，直線 $A_1C_1$ と直線 $A_2C_2$ の交点の３点 X,Y,Z は一直線上に存在する。

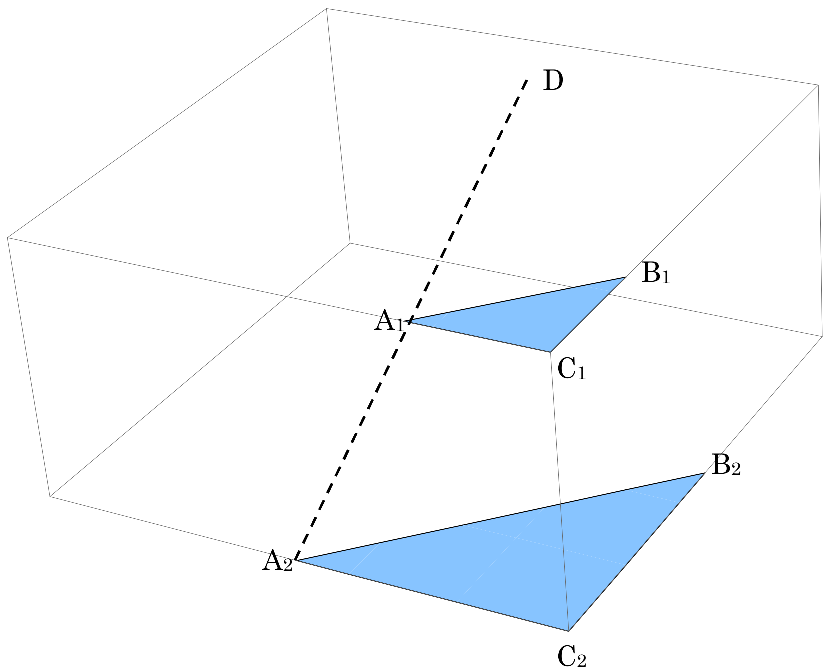
この逆も成立する。

　射影平面上における、「点」と「直線」に関する性質は、点と直線を入れ替えても成立する。

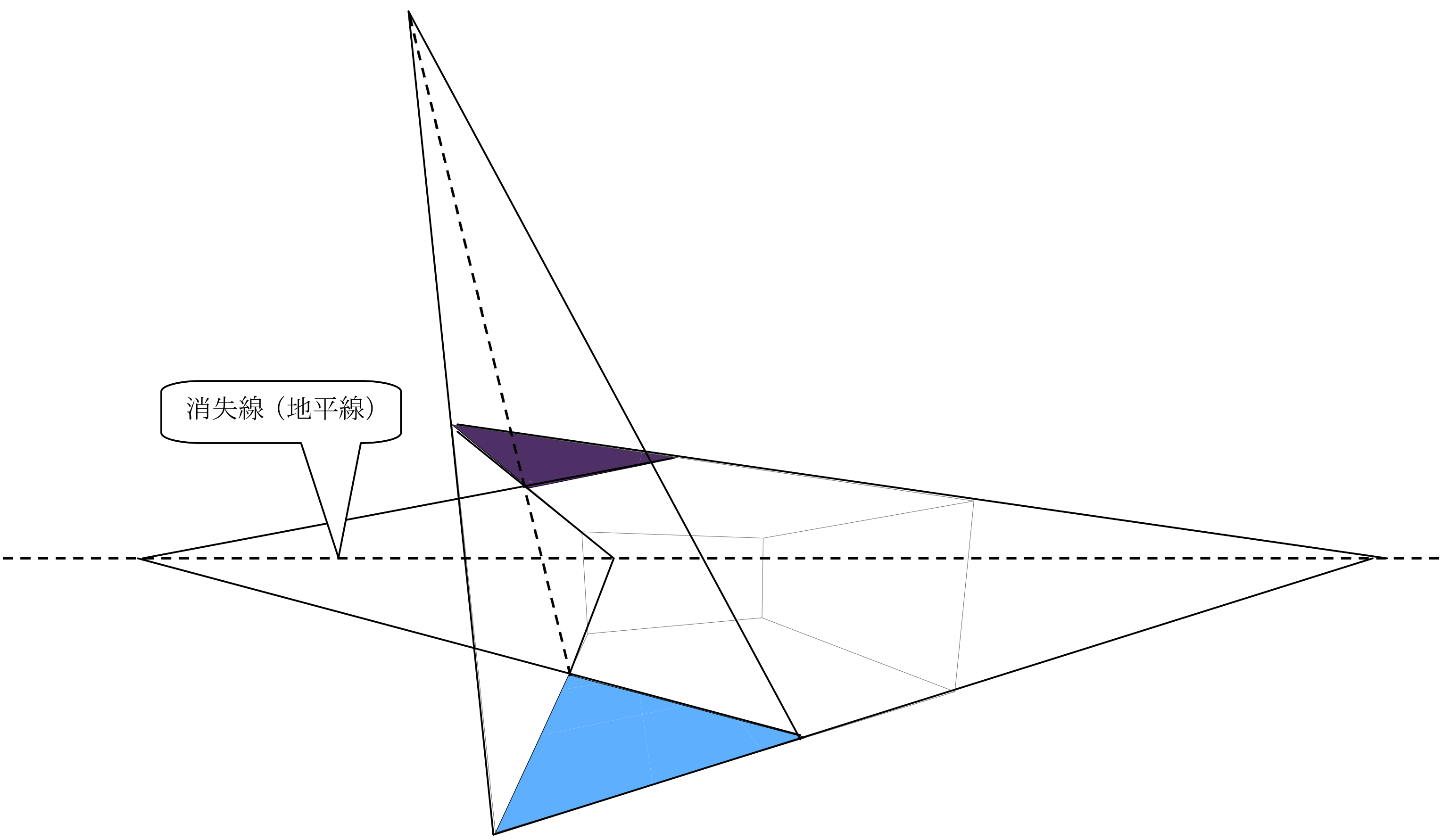
射影平面上の点と直線の互換性を**双対性**と呼ぶ。

この定理は、空間内の２つの三角形の透視図として見ると、納得できる。

今、$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$ とする。

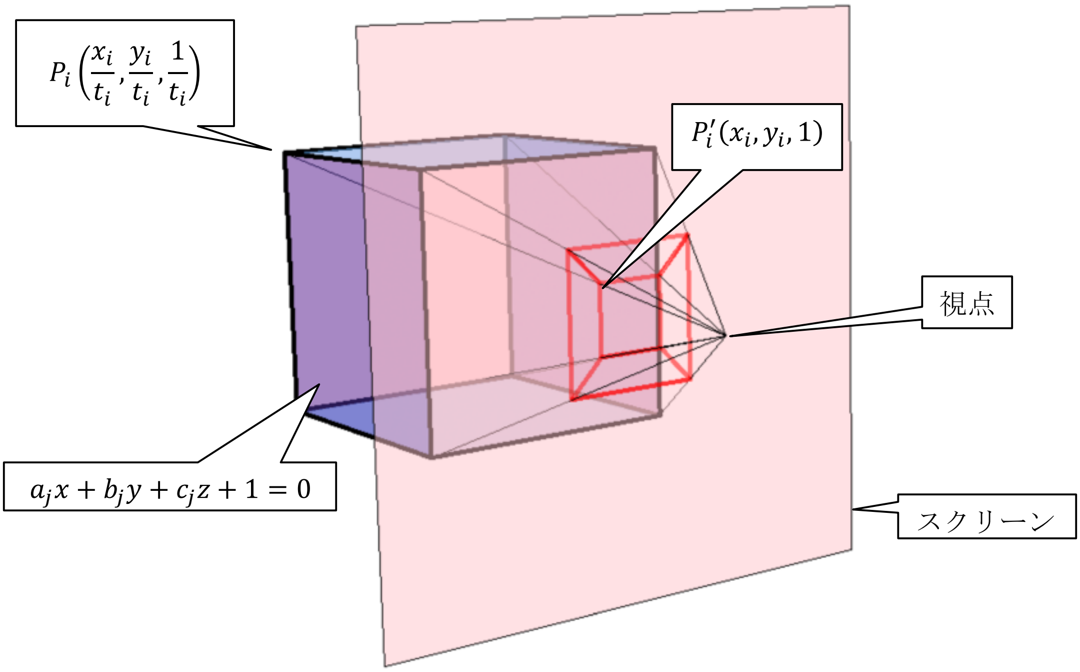



３次元空間で、デザルグの定理を見てみよう。$\triangle A_2B_2C_2$ が、床面に存在する。（↑）
$\triangle A_1B_1C_1$ が空中に浮かんでいる状態で天井に配置されている、このとき、
$A_1C_2 /\!/ A_2C_2, B_1C_1 /\!/ B_2C_2, A_1B_1 /\!/ A_2B_2$ なので、
射影平面 $P^2$ において、$A_1C_2$ と $A_2C_2$、$B_1C_1$ と $B_2C_2$、$A_1B_1$ と $A_2B_2$ は無限遠点で交わる。
その交点を X，Y，Z は、無限遠の消失線上に存在する。
別の視点から見ると（↓）。



## Episode 4　２次元から３次元空間への復元

２次元画像世界から３次元立体図形を再構築する数学的処理方法を考える。つまり、投影変換の逆変換であるが、奥行き方向に自由度があるために、完璧な復元立体図形を求めることは不可能であるが、不足した情報を補足して、立体を作る。




スクリーン上の画像の点$P_i'(x_i, y_i, 1)$とする。直線$OP_i'$上の点$P_i$は、$t_i$を媒介変数として、

$$P_i\left(\frac{x_i}{t_i},\frac{y_i}{t_i},\frac{1}{t_i}\right)$$

として、表示することができる。画像の中の第 j 面が含まれる３次元平面の方程式を

$$a_jx+b_jy+c_jz+1=0$$

と仮定する。

頂点$P_i\left(\frac{x_i}{t_i},\frac{y_i}{t_i},\frac{1}{t_i}\right)$が第 $j$ 面上に存在するので、

$$a_j\frac{x_i}{t_i}+b_j\frac{y_i}{t_i}+c_j\frac{z_i}{t_i}+1=0$$

$$a_j\,x_i+b_jy_i+c_j\,z_i+t_i=0$$

$a_j, b_j, c_j, t_i$は、未知数であり、$x_i, y_i$は、画像から得られる数値である。

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ x_i & y_i & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot & a_j & \cdot \\ \cdot & b_j & \cdot \\ \cdot & c_j+t_i & \cdot \end{pmatrix}=0$$

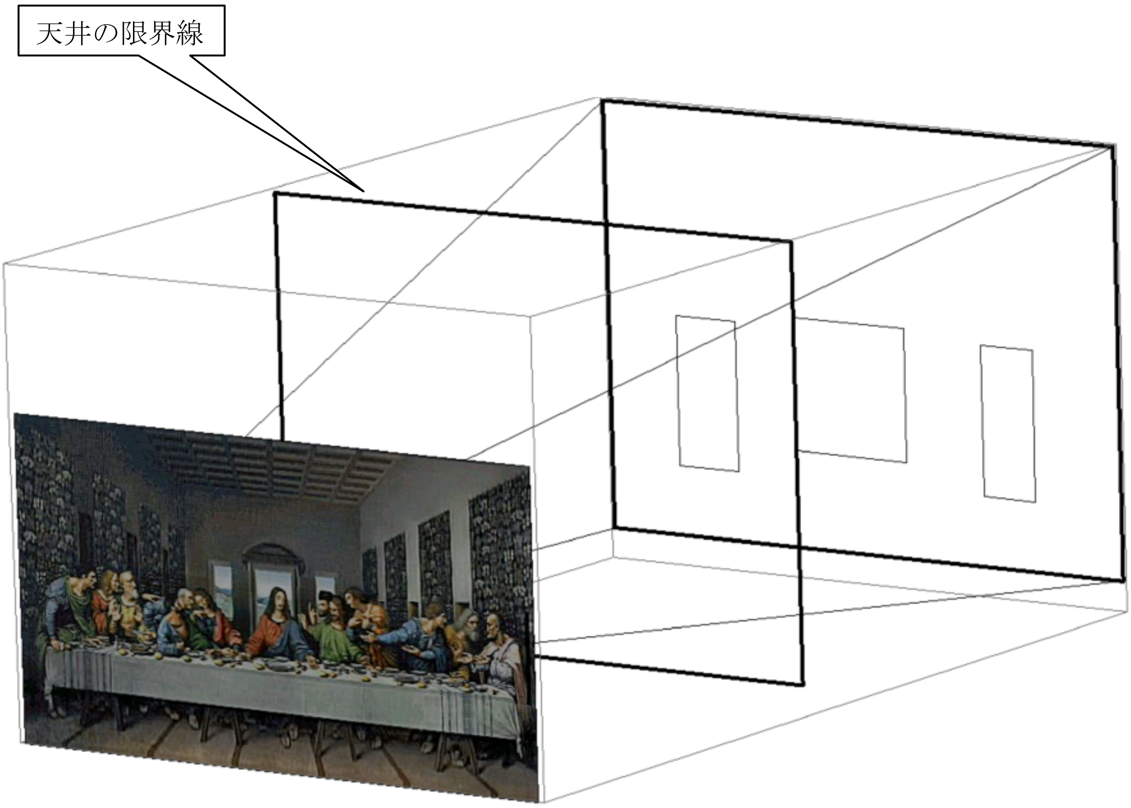
行列表示すると、

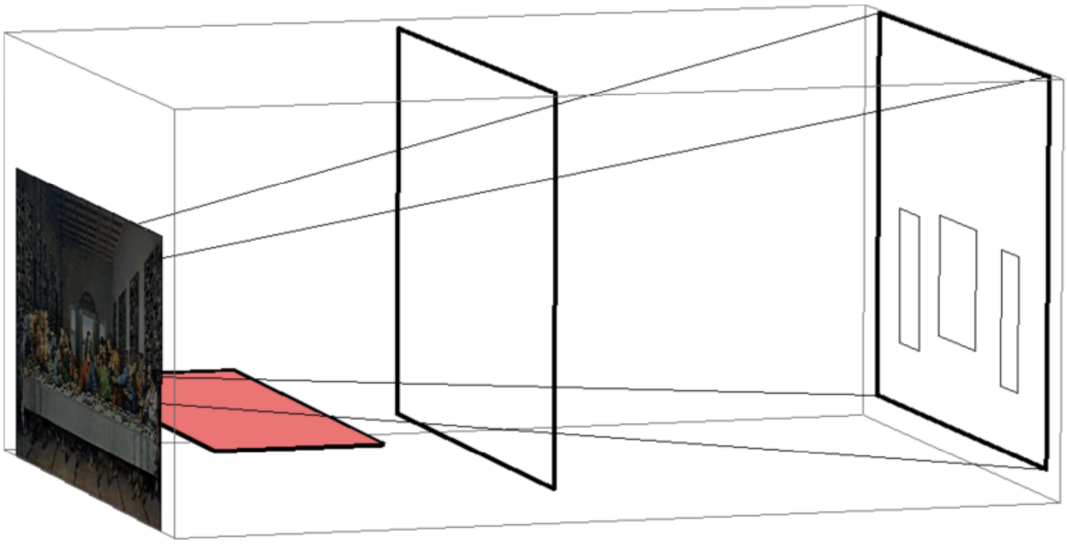
$$\mathrm{AW}=0$$

行列 A は、2 次元画像から得ることができる定数行列で、行列 W は未知数からなる行列である。
W の不足した情報$a_j, b_j, c_j, t_i$を人間の感覚によって、決定する。
「平面に見える平行四辺形は、長方形である。」とか「2 平面のなす角が直角である。」等の情報を追加することにより、立体情報を補足することができる。

## Episode 5　ダ・ビンチ｢最後の晩餐｣の復元

　窓から、無限遠の地平線が見え、キリストの額に 1 点消失点があり、人物を囲む床、天井、壁等の隣り合うポリゴンが、3 次元空間内で直交している長方形である「最後の晩餐」を例に処理してみた。
Step1；消失点、消失点を指定。
Step2；カメラ位置、スクリーン位置を指定。





「カメラ位置」を移動して、テーブルの上のもの（↓）を真上から見た。

テーブルの上の食物が見える。テーブルクロスに、刺繍がしてあること。ユダの手には、かなりの金貨の入った袋がテーブル中央にあること。皿の上には、魚があること。等が読み取れる。ダ・ビンチはデザルグの定理より以前に、この絵を描いた。この「最後の晩餐」は、極めて数学的な絵画と言える。

１枚の画像から、３次元立体モデルを復元する簡単な方法を試みたが、この技術は、医療分野や、CG の世界で活用されている。

松本睦郎（札幌北高等学校）