平成 23 年 6 月 11 日（土）第 77 回数学教育実践研究会
北海道大学　情報教育館 3F スタジオ型多目的中講義室

発展的な入試問題

チェビシェフの多項式問題　その出題背景を探る

松本睦郎（札幌北高等学校）

近年、チェビシェフ(Chebyshev もしくは Tschebycheff)の多項式の理論を背景とする入学試験問題が多く出題されている。三角関数の 2 倍角、3 倍角の公式を拡張した理論で興味深いものがある。

「Chebyshev の多項式理論」を入試問題に軸足をおいて出題背景を分析してみた。

チェビシェフの多項式とは

三角関数の２倍角、３倍角の公式は

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ ，$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

である。

一般的に、n を自然数とするとき、『$\cos n\theta$ を、$\cos\theta$ の多項式として表示する。三角関数の n 倍角の公式』が基本的な考えである。

信州大学

（1）すべての自然数 n について、

$\cos n\theta$ は、$\cos\theta$ の多項式として表されることを示せ。

（2）すべての自然数 n について、

多項式 $f_n(x)$ を $\cos n\theta = f_n(\cos\theta)$

で定める。

このとき x に関する２つの多項式

$$f_{n+1}(x) = 0,\ f_n(x) = 0$$

は、共通解を持たないことを示せ。

【解答例(1)】

「$\cos n\theta = f_n(\cos\theta)$ となる多項式 $f_n(x)$ が存在する。」ことを n に関する数学的帰納法で証明する。

（ｉ）$n = 1, 2$ のとき

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

から、$f_1(x) = x$ ，$f_2(x) = 2x^2 - 1$

と表示できる。$n = 1, 2$ のときは成立する。

（ii）$n = k, k+1$ のとき

$$\cos k\theta = f_k(\cos\theta)\ ,\ \cos(k+1)\theta = f_{k+1}(\cos\theta)$$

となる $f_k(x), f_{k+1}(x)$ が存在するとき、

【積→和の公式を用いる方法】

$$\cos(k+1)\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\{\cos(k+2)\theta + \cos k\theta\}$$

より

$$\cos(k+2)\theta = 2\cos(k+1)\theta\cos\theta - \cos k\theta$$

を活用して漸化式を作成する方法。

$f_{k+2}(x) = 2x\, f_{k+1}(x) - f_k(x)$ で定まる多項式 $f_{k+2}(x)$ を作成すると、

$$f_{k+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta f_{k+1}(\cos\theta) - f_k(\cos\theta)$$
$$= 2\cos\theta\cos(k+1)\theta - \cos k\theta$$

ここで「積→和公式」を適用して

$$f_{n+2}(\cos\theta)=\{\cos(k+2)\theta+\cos k\theta\}-\cos k\theta$$

$$=\cos(k+2)\theta$$

$n=k+2$ のときも成立する。
（ｉ）（ⅱ）より、すべての自然数 n について
$\cos n\theta=f_n(\cos\theta)$ となる多項式 $f_n(x)$ が存在する。(QED)

【解説】 $y=f_n(x)$ はどんな曲線を描くのか？

$\cos n\theta=f_n(\cos\theta)$ となる多項式 $f_n(x)$ が存在性を示す問題である。一般式 $f_n(x)$ そのものを求める問題は大学入試では見られない。

$f_n(x)$ は、漸化式 $f_1(x)=x$ ，$f_2(x)=2x^2-1$

$$f_{n+2}(x)=2x\ f_{n+1}(x)-f_n(x)$$

から帰納的に、求めることができる。
漸化式から $n=10$ までの多項式を作成した。

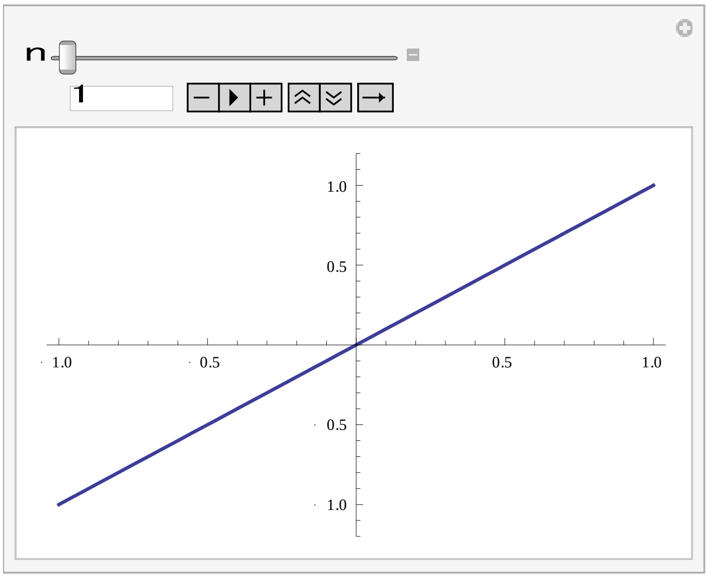
```
t1[x_]:=x;
t2[x_]:=2 x^2-1;
tn_[x_]:=tn[x]=2 x tn-1[x]-tn-2[x];
Table[Expand[tn[x]]//Simplify,{n,1,10}]
```

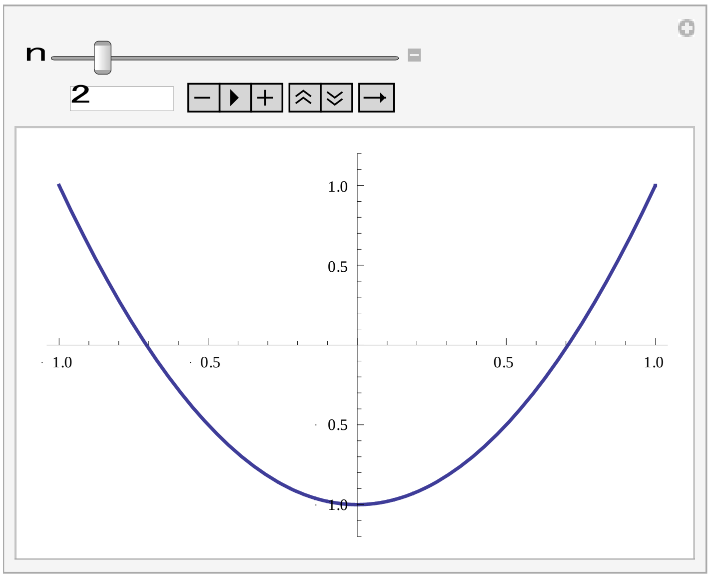
{x,-1+2 x^2,x (-3+4 x^2),1-8 x^2+8 x^4,x (5-20 x^2+16 x^4),-1+18 x^2-48 x^4+32 x^6,x (-7+56 x^2-112 x^4+64 x^6),1-32 x^2+160 x^4-256 x^6+128 x^8,x (9-120 x^2+432 x^4-576 x^6+256 x^8),-1+50 x^2-400 x^4+1120 x^6-1280 x^8+512 x^10}

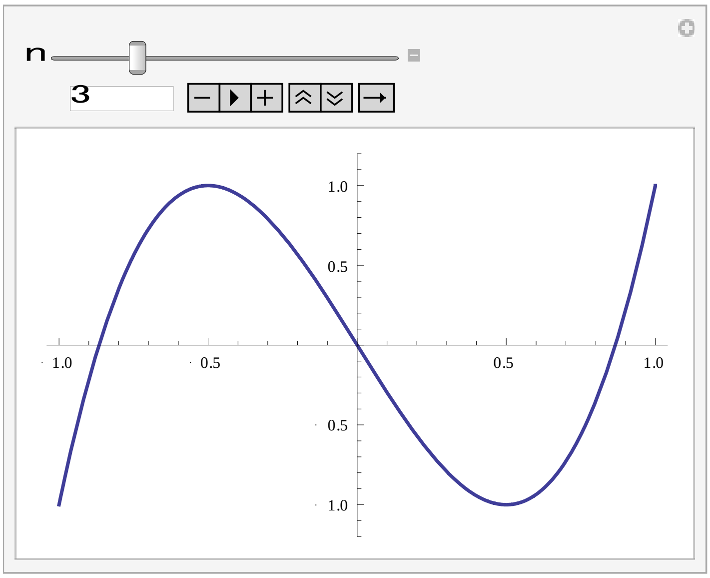
この多項式のグラフを作成すると、右図のような曲線になる。

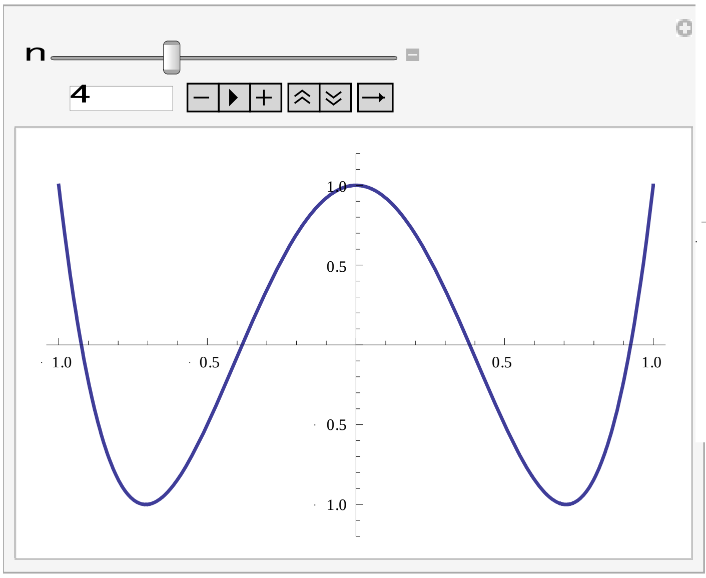
```
t1[x_]:=x;
t2[x_]:=2 x^2-1;
tn_[x_]:=tn[x]=2 x tn-1[x]-tn-2[x];
```

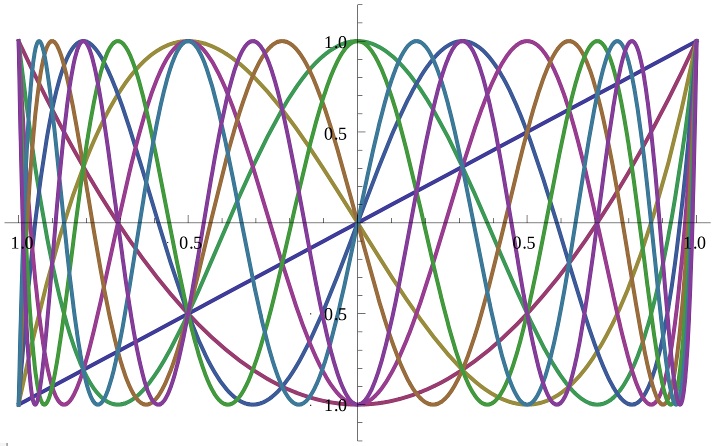
```
Manipulate[Plot[tn[x],{x,-1,1},PlotRange→1.2,PlotStyle→Thick],{n,1,10,1}]
```









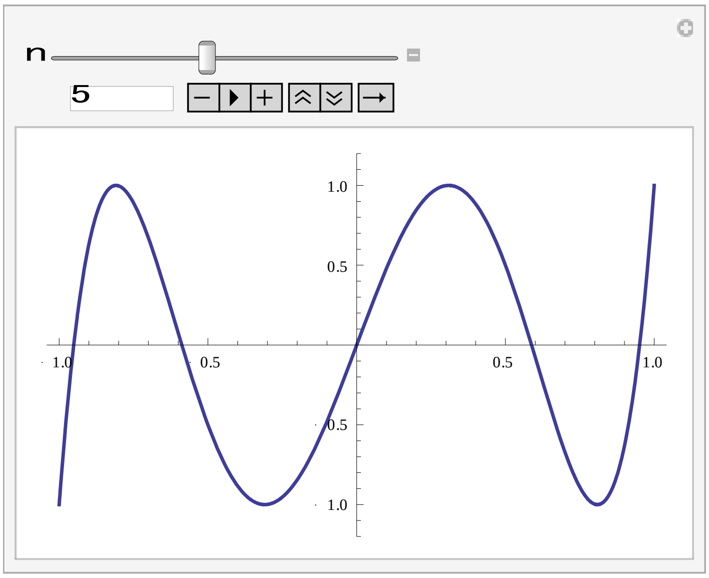


これらの関数は、$-1 \leqq x \leqq 1$ かつ $-1 \leqq y \leqq 1$ の正方形内に収まってしまうので、Cube Function と呼ばれることもある。(1)は数学的帰納法を用いて

漸化式 $f_1(x) = x$ ， $f_2(x) = 2x^2 - 1$

$$f_{n+2}(x) = 2x\, f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

から $f_n(x)$ の存在を示した。この漸化式を満たす多項式を「**第 1 種チェビシェフ多項式**」と呼ぶ。

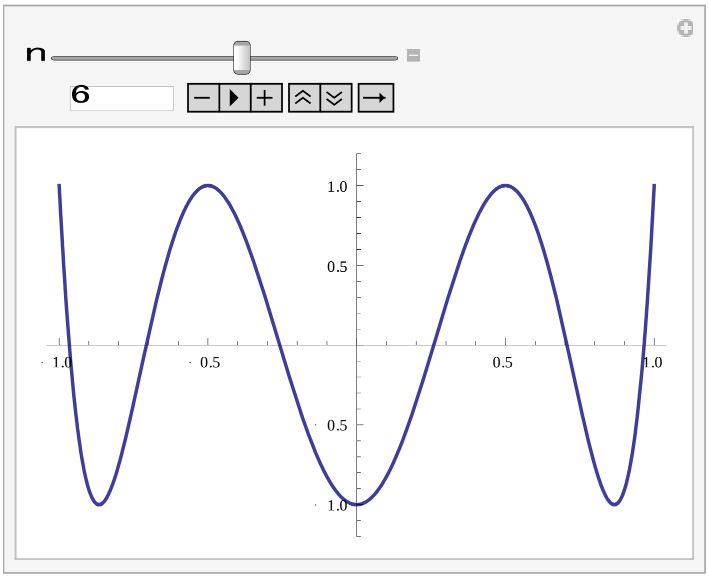


【解答例(2)】

多項式 $f_{n+1}(x) = 0,\ f_n(x) = 0$

は、共通解を持たないことを示す設問である。

上図（↑）は $n = 1, 2, \cdots, 10$ までの多項式 $f_n(x)$ のグラフを重ねて作図した。 x 軸上で交点が重なるような共通解は見られないが・・・。



【Point】背理法の活用

『 $f_{n+1}(x) = 0,\ f_n(x) = 0$ は共通解 $x = \alpha$ を持つ』

と仮定する。… (*)

$f_{n+1}(\alpha) = 0,\ f_n(\alpha) = 0$

漸化式 $f_{n+1}(x) - 2x\, f_n(x) = f_{n-1}(x)$　$n \geqq 2$ より

$x = \alpha$ を代入して $f_{n+1}(\alpha) - 2\alpha\, f_n(\alpha) = f_{n-1}(\alpha)$

$f_{n+1}(\alpha)=0, f_n(\alpha)=0$ より $f_{n-1}(\alpha)=0$

$f_{n-1}(x)=0$　も、共通解 $x=\alpha$ を持つ。

帰納的に、$f_1(x)=0, f_2(x)=0$ も共通解を持つ。

$x=0, 2x^2-1=0$ は、共通解を持つ。

$x=0, x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　となり共通解を持たないので、矛盾する。

$\therefore$ 多項式 $f_{n+1}(x)=0, f_n(x)=0$ は、共通解を持たない。（QED）

【解説】 $f_n(x)=0$ の解は、どんな形？

n 次の方程式 $f_n(x)=0$ は、共通解を持たないので、異なる n 個の解を持つことがわかった。

$f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ を満たす多項式なので、

$x=\cos\theta, -1<x<1$ から $0<\theta<\pi$ とおくことができる。

$$f_n(x)=0 \Leftrightarrow \cos n\theta=0, x=\cos\theta, 0<\theta<\pi$$

$0<\theta<\pi$ から $0<n\theta<n\pi, \cos n\theta=0$

$$n\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\cdots,\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$\theta=\frac{1}{2n}\pi,\frac{3}{2n}\pi,\frac{5}{2n}\pi,\cdots,\frac{2n-1}{2n}\pi$$

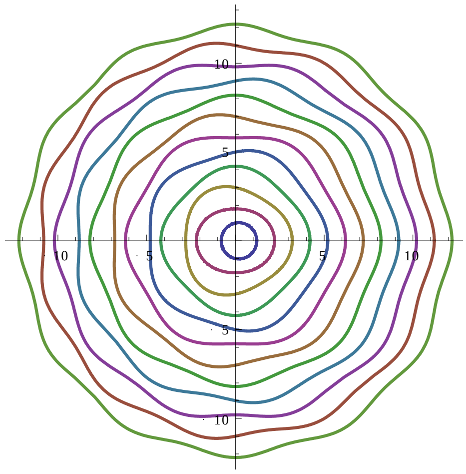
$x_k=\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi, (k=1,2,3,\cdots,n)$ の n 個の異なる解を持つ。これを **Chebyshev root** と呼ばれる。

第 1 種チェビシェフ多項式 $f_n(x)$ の興味深い不思議な特性として、『n 次の方程式 $f_n(x)=0$ が、必ず n 個の異なる実数解をもつ。』ことがある。

Chebyshev Spiral

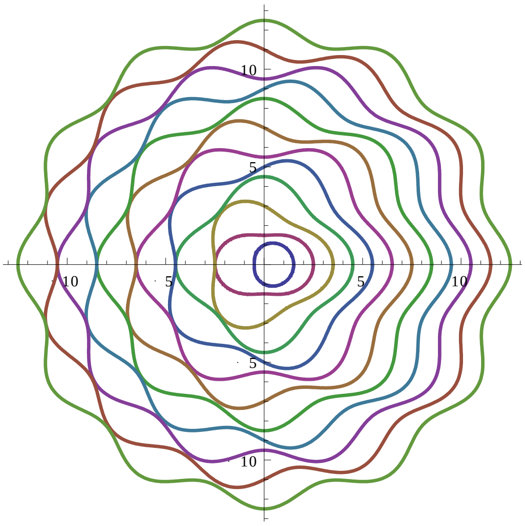
美しく、面白い曲線を作成することができる。

極座標系　$r=n+\dfrac{1}{k}\cos n\theta$　$(n=1,2,3,\cdots 12)$



（↑ $k=5$ のグラフ）

（↓ $k=2$ のグラフ）



$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\left(4\cos^3\theta-1\right)\sin\theta$$

のように、$\sin n\theta$ は $\cos\theta$ だけの多項式にはならない。正の整数 n について、

$\sin n\theta=g_n(\cos\theta)\sin\theta$ を満たす多項式 $g_n(x)$ を**「第 2 種チェビシェフ多項式」**と呼ぶ。

$f_n(x)$ と $g_n(x)$ はどんな関係があるのか？

京都大学 1996 年

（1）すべての実数 θ に対し $\cos n\theta = f_n(\cos\theta)$,

$\sin n\theta = g_n(\cos\theta)\sin\theta$ を満たし、係数が

ともにすべて整数である n 次式 $f_n(x)$ と

$n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ。

（2） $f_n'(x) = ng_n(x)$ であることを示せ。

（3） p を 3 以上の素数とするとき、 $f_p(x)$ の

$p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れることを示せ。

【解答例(1)】 $f_n(x)$ の存在性の証明は、前問で解答したので省略。

$g_n(x)$ の存在性について証明する。

【Point】 加法定理をベースに漸化式を作成する

$$\begin{aligned}\cos(n+1)\theta &= \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta\\ \sin(n+1)\theta &= \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta\end{aligned}$$ より

$$\begin{aligned}f_{n+1}(\cos\theta) &= f_n(\cos\theta)\cos\theta - g_n(\cos\theta)\sin^2\theta\\ g_{n+1}(\cos\theta) &= g_n(\cos\theta)\cos\theta + f_n(\cos\theta)\end{aligned}$$

$f_n(x)$ と $g_n(x)$ の関係式は、

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x) &= xf_n(x) - (1-x^2)g_n(x)\\ g_{n+1}(x) &= xg_n(x) + f_n(x)\end{aligned}$$ となる。

連立漸化式から f_n, f_{n+1} を消去すると、
3 項間漸化式

$$\therefore g_{n+2}(x) - 2xg_{n+1}(x) + g_n(x) = 0$$

帰納的に、$g_n(x)$ は $n-1$ 次の多項式であることがわかる。第 1 種チェビシェフ多項式 $f_n(x)$ と第 2 種チェビシェフ多項式 $g_n(x)$ は、同じの漸化式で表され、初期値が異なる。

$g_1(\cos\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$ から $g_1(x) = 1$

$g_2(\cos\theta) = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$ から $g_2(x) = 2x$

$n = 1, 2$ のとき成立する。
$n = k, k+1$ のとき

$g_k(x), g_{k+1}(x)$ が $k, k+1$ 次の多項式であるとき、

$g_{k+2}(x) = 2xg_{k+1}(x) - g_k(x)$ より

$g_{k+2}(x)$ は $k+1$ 次の多項式である。

よって、$g_n(x)$ は $n-1$ 次の多項式である。(QED)

(2) $\cos n\theta = f_n(\cos\theta)$ の両辺を θ で、微分すると、$n\sin n\theta = f_n'(\cos\theta)\sin\theta$

$ng_n(\cos\theta)\sin\theta = f_n'(\cos\theta)\sin\theta$

$ng_n(\cos\theta) = f_n'(\cos\theta)$　　$x = \cos\theta$ より

$\therefore\ ng_n(x) = f_n'(x)$　　(QED)

(3) p ;3 以上の素数について、$pg_p(x) = f_p'(x)$

$g_p(x)$ は、 $p-1$ 次の整数を係数とする多項式なので、

「 $f_p'(x)$ の係数は。すべて p の倍数」…（*）

$$f_p(x)=a_p x^p+a_{p-1}x^{p-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

$a_p, a_{p-1}, \cdots, a_1, a_0$ は整数

$$f_p{}'(x)=pa_p x^{p-1}+(p-1)a_{p-1}x^{p-2}+\cdots+a_1$$

（＊）より

$(p-1)a_{p-1}, (p-2)a_{p-2}, \cdots, a_1$ は素数 p の倍数である。

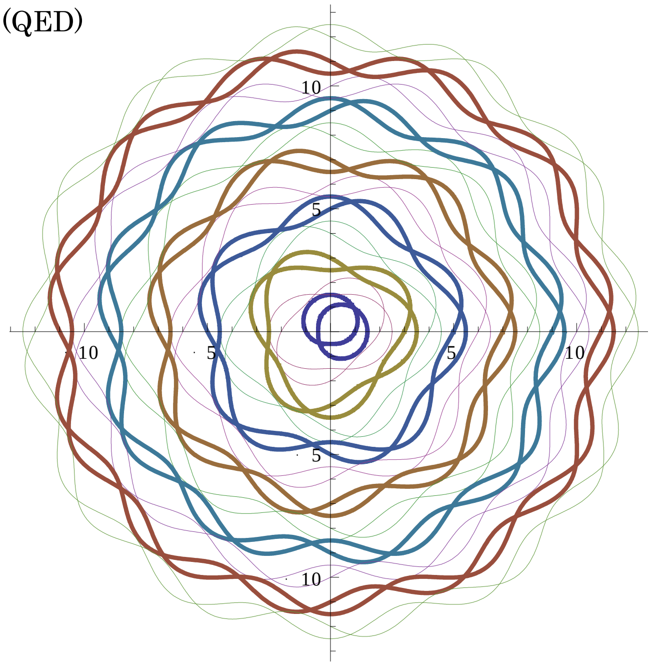
$\therefore a_{p-1}, a_{p-2}, \cdots, a_1$ は、 p の倍数…（＊＊）

$f_p(\cos\theta)=\cos p\theta$ より、 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると、

$f_p\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{p\pi}{2}=0$　p は、3 以上の素数なので、 $f_p(0)=0$ より、定数項 $a_0=0$

$p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れる。

(QED)



$$r=n+\frac{1}{k}\cos n\theta, r=n+\frac{1}{k}\sin n\theta$$

$$(n=1,2,3,\cdots 12), k=2$$

実に、美しいグラフになる。

百面相チェビシェフ多項式

第 1 種チェビシェフ多項式は、実に様々な顔を持つ多項式で、変化のある興味深い多項式である。

$$f_n(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}$$

$$x+\sqrt{x^2-1}=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$$

$x-\sqrt{x^2-1}=\cos\theta-i\sin\theta=e^{-i\theta}$　とおけるので

$$f_n(x)=\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}=\cos n\theta$$

n 個の異なる解を持つので、

$$f_n(x)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(x-\cos\left|\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right|\right)$$

$$f_n(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

更に、 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos m\theta\sin n\theta d\theta=\begin{cases} 0\,(m\neq n\quad) \\ \pi\,(m=n=0) \\ \dfrac{\pi}{2}\,(m=n\neq 0) \end{cases}$ から

$x=\cos\theta$ と変数変換すると、

$$\int_{-1}^{1}\frac{f_m(x)f_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases} 0\quad(m\neq n\quad) \\ \pi\,(m=n=0) \\ \dfrac{\pi}{2}\,(m=n\neq 0) \end{cases}$$

松本睦郎（札幌北高等学校）