北数教　第 89 回数学教育実践研究会　平成 26 年 6 月 25 日（土）
北海道大学

# ベクトル外積を活用する

外積を視覚化するとどうなるか？

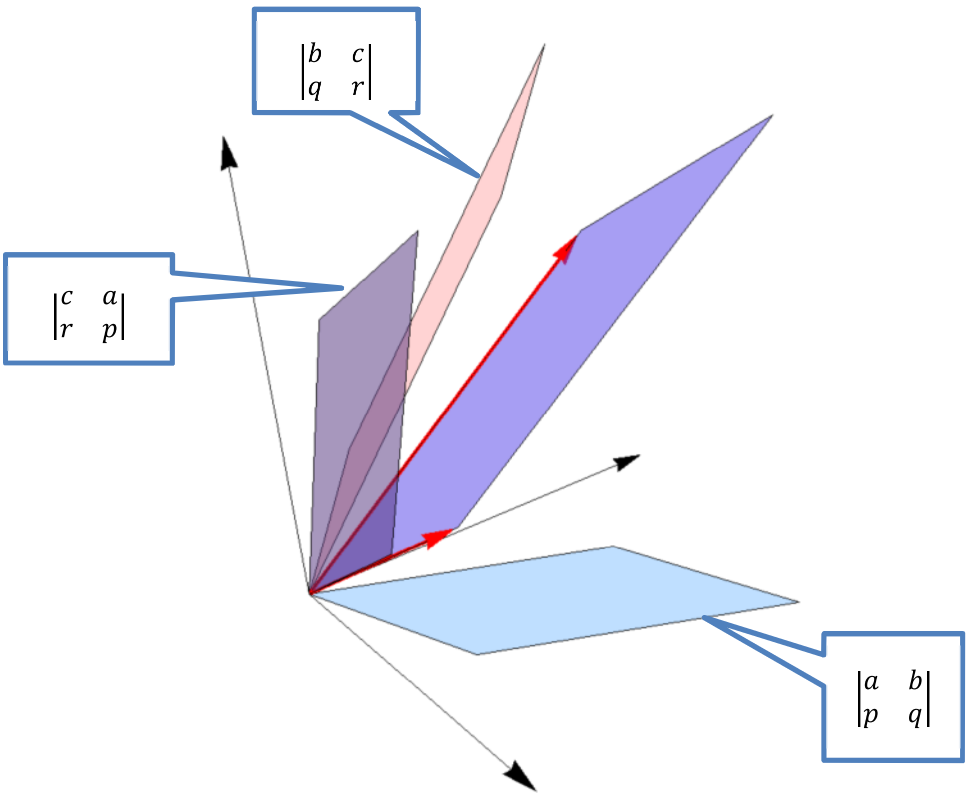
松本睦郎（札幌北高等学校）

## Episode 1　外積の定義

$\vec{a}=(a,b,c),\vec{p}=(p,q,r)$に対して

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(br-cq,cp-ar,aq-bp)\\&=\left(\begin{vmatrix}b&c\\q&r\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c&a\\r&p\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a&b\\p&q\end{vmatrix}\right)\end{aligned}$$

を外積と定義する。




$\begin{vmatrix}b&c\\q&r\end{vmatrix}$ ; $\vec{a}=(a,b,c),\vec{p}=(p,q,r)$で張られる平行四辺形を$yz$平面へ射影した面積。

$\begin{vmatrix}c&a\\r&p\end{vmatrix}$ ; $\vec{a}=(a,b,c),\vec{p}=(p,q,r)$で張られる平行四辺形を$zx$平面へ射影した面積。

$\begin{vmatrix}a&b\\p&q\end{vmatrix}$ ; $\vec{a}=(a,b,c),\vec{p}=(p,q,r)$で張られる平行四辺形をxy平面へ射影した面積。

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e_1}&\vec{e_2}&\vec{e_3}\\a&b&c\\p&q&r\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&c\\q&r\end{vmatrix}\vec{e_1}+\begin{vmatrix}c&a\\r&p\end{vmatrix}\vec{e_2}+\begin{vmatrix}a&b\\p&q\end{vmatrix}\vec{e_3}$$

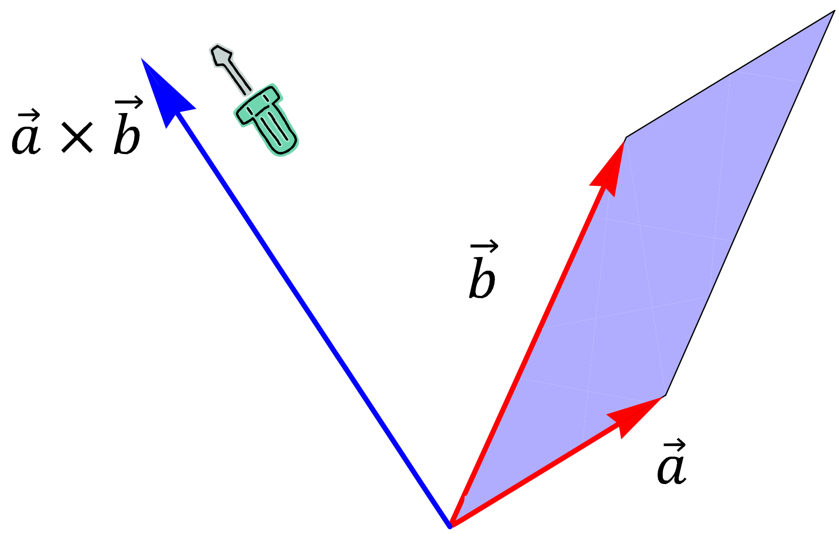
**Episode 2　外積の図形的性質**

（ⅰ）$\vec{a}\times\vec{b}$　は$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直である。

（ⅱ）$\vec{a}\times\vec{b}$　は$\vec{a}$ から$\vec{b}$ のに向かって右ねじ方向に向いている。

（ⅲ）$|\vec{a}\times\vec{b}|$ は$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で作る平行四辺形の面積に等しい。

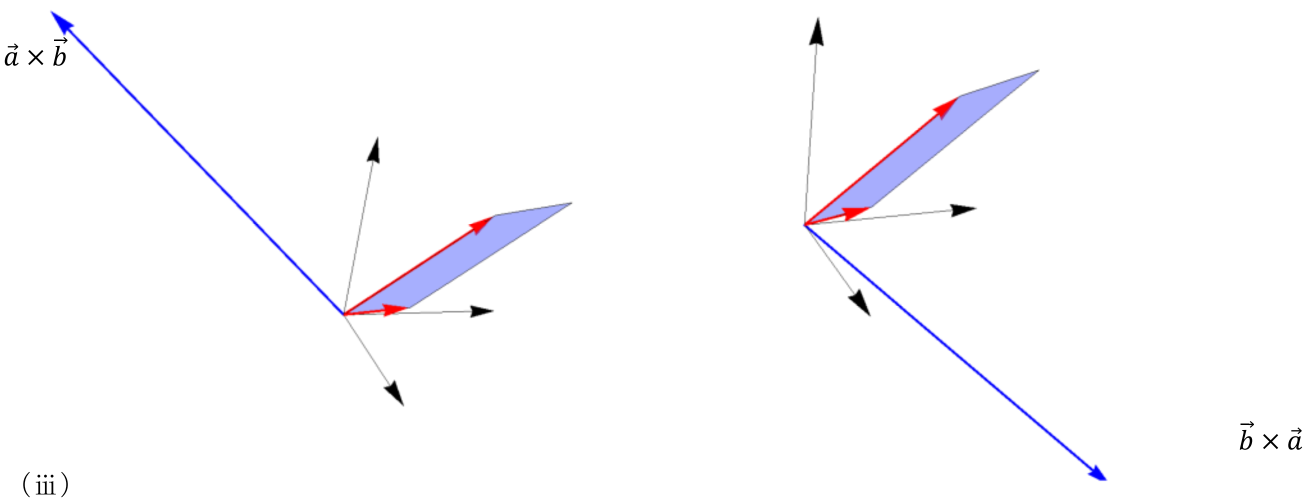
$\vec{a}=(a,b,c),\vec{b}=(p,q,r)$に対して、$\vec{a}\times\vec{b}=(br-cq,cp-ar,aq-bp)$




（ⅰ）の証明

$$\vec{a}=(a,b,c),\vec{b}=(p,q,r)\,,\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(br-cq,cp-ar,aq-bp)$$
$$\vec{a}\cdot\vec{c}=a(br-cq)+b(cp-ar)+c(aq-bp)=0$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=p(br-cq)+q(cp-ar)+r(aq-bp)=0$$

（ⅱ）




（ⅲ）

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で作る平行四辺形の面積をSとおく。

$$S^2=|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=(a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2)-(ap+bq+cr)^2$$
$$=(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2$$
$$=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2$$

**Episode 3　平行六面体の体積**

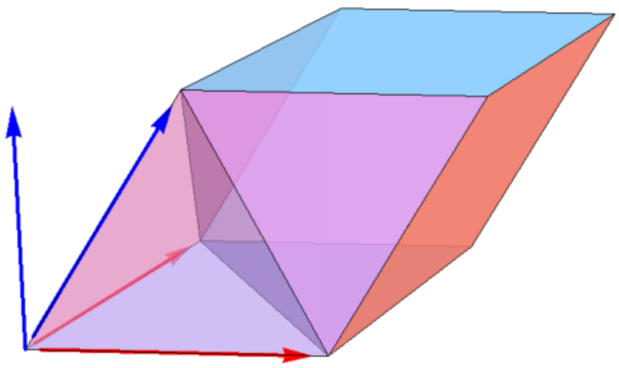
体積 V とすると、$V=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\,|\vec{c}|cos\varphi=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$

$$\vec{a}=(a,b,c),\vec{b}=(p,q,r),\vec{c}=(x,y,z)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(br-cq,cp-ar,aq-bp)$$

$$\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=|(br-cq)x+(cp-ar)y+(aq-bp)z|$$

$$=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}$$



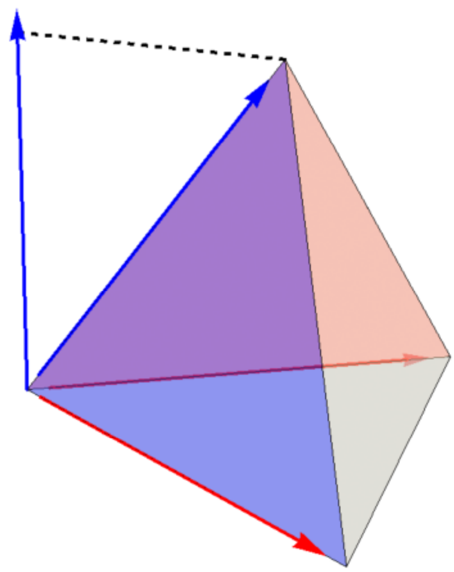
**Episode 4　正四面体の体積**

1 辺の長さが 1 の正面体の体積 V を、外積を用いて求める。

$$\overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\overrightarrow{OB}=(1,0,0),\overrightarrow{OC}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$$

$$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}=\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$V=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right)}{6}=\frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}\qquad V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} {}^{1}/_{2} & {}^{\sqrt{3}}/_{6} & {}^{\sqrt{6}}/_{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{2} & {}^{\sqrt{3}}/_{2} & 0 \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{12}$$



**2014 年　東京大学・理**

１辺の長さ１の正方形を底面とする四角柱 OABC-DEFG を考える。3 点 P,Q,R をそれぞれ辺 AE,辺 BF,辺 CG 上に４点 O,P,Q,R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。∠AOP を α,∠COR を β とおく。

（１） S を$tan\alpha$ と$tan\beta$ を用いて表せ。

（２） $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}, S=\frac{7}{6}$ であるとき、$tan\alpha+tan\beta$ の値を求めよ。さらに、$\alpha\leq\beta$ のとき$tan\alpha$ の値を求めよ。

【解答例】

S;四角形 OPQR の面積,∠AOP＝α,∠COR＝β

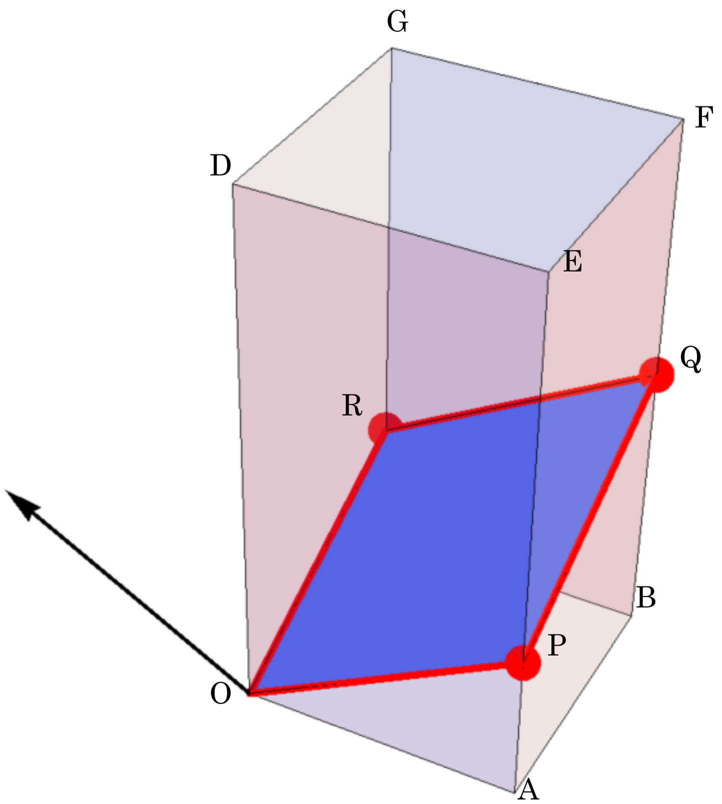
$$\overrightarrow{OA}=(1,0,0),\overrightarrow{OB}=(1,1,0),\overrightarrow{OC}=(0,1,0)$$

△OAP において、$AP=tan\alpha$, △OCR において、$CR=tan\beta$となるので、

$$\overrightarrow{OP}=(1,0,tan\alpha),\overrightarrow{OR}=(0,1,tan\beta)$$

（１）【外積を活用する方法】

$$S=\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OR}\right|=|(-tan\alpha,-tan\beta,1)|=\sqrt{1+tan^2\alpha+tan^2\beta}$$




【外積を活用しない方法】

$$S=\sqrt{\left|\overrightarrow{OP}\right|^2\left|\overrightarrow{OR}\right|^2-\left(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(1+tan^2\alpha)(1+tan^2\beta)-(tan\alpha\, tan\beta)^2}$$

$$=\sqrt{1+tan^2\alpha+tan^2\beta}$$

（２）

$$\mathrm{S}=\frac{7}{6}$$

$$\sqrt{1+tan^2\alpha+tan^2\beta}=\frac{7}{6}$$

$$tan^2\alpha+tan^2\beta=\frac{13}{36}$$

$tan\alpha+tan\beta=k\ \ (k>0)$　とおく

$$k^2=tan^2\alpha+2tan\alpha\times tan\beta+tan^2\beta$$

$$k^2=\frac{13}{36}+2tan\alpha\times tan\beta\cdots①$$

$tan(\alpha+\beta)=1$　より

$$\frac{tan\alpha+tan\beta}{1-tan\alpha\times tan\beta}=1$$

$$k=1-tan\alpha\times tan\beta$$

$$tan\alpha\times tan\beta=1-k\cdots②$$

②を①へ代入

$$36k^2+72k-85=0$$

$$(6k+17)(6k-5)=0$$

$$k=\frac{5}{6}$$

$$\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha\,,tan\alpha+tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{5}{6}$$

$$tan\alpha+\frac{tan\frac{\pi}{4}-tan\alpha}{1+tan\frac{\pi}{4}\ tan\alpha}=\frac{5}{6}$$

$$(2tan\alpha-1)(3tan\alpha-1)=0\ ,\qquad \therefore tan\alpha=\frac{1}{2}\,,tan\alpha=\frac{1}{3}$$

（ⅰ）$\tan\alpha=\frac{1}{2}$ のとき、$\tan\beta=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ ，$tan\alpha>tan\beta$ となり不適。

（ⅱ）$\tan\alpha=\frac{1}{3}$ のとき、$\tan\beta=\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ ，$tan\alpha<tan\beta$ となり適する。

$$\therefore tan\alpha=\frac{1}{3}$$

**2014 年　札幌医科大学・医**

$a$ を$0 < a < 1$ とする。座標空間の４点$\mathrm{O}(0,0,0), A(1,0,0), B\left(0, \frac{1}{a}, 0\right), C\left(0,0, \frac{1}{1-a}\right)$ とする。

また、４点 O,A,B,C を頂点とする四面体に内接する球を S とする。

（１）　３点 A,B,C を通る平面に直交し、長さが１のベクトルを$a$ を用いて表せ。

（２）　３点 A,B,C を通る平面と球 S の接点の座標を$a$ を用いて表せ。

（３）　球 S の半径を$a$ を用いて表せ。

（４）　球 S の体積の最大値を求めよ。

【解答例】（１）

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(-1, \frac{1}{a}, 0\right), \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \left(-1, 0, \frac{1}{1-a}\right)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{a(1-a)}, \frac{1}{1-a}, \frac{1}{a}\right), |\vec{u}|^2 = \frac{2a^2 - 2a + 2}{a^2(1-a)^2}, |\vec{u}| = \pm\frac{\sqrt{2a^2-2a+2}}{a(1-a)}$$

$$\pm\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2a^2-2a+2}}, \frac{a}{\sqrt{2a^2-2a+2}}, \frac{1-a}{\sqrt{2a^2-2a+2}}\right)$$

（２）（３）は同時に解く。

３点 A,B,C を通る平面α；$x + ay + (1-a)z = 1 \cdots$①

球 S；$(x-r)^2 + (y-r)^2 + (z-r)^2 = r^2 \cdots\cdots$②

球 S の中心$\mathrm{I}(r,r,r)$は、平面αの負領域（下側）に位置するので、$r + ar + (1-a)r < 1 \cdots$③

S の中心$\mathrm{I}(r,r,r)$と平面αの距離は$r$なので、点と平面の距離公式より

$$\mathrm{r} = \frac{|r + ar + (1-a)r - 1|}{\sqrt{1 + a^2 + (1-a)^2}} = \frac{|2r-1|}{\sqrt{2a^2-2a+2}}$$

③より絶対値内の符号は負なので、$r\sqrt{2a^2-2a+2} = 1 - 2r$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2a^2-2a+2}+2}$$

接点$P(x,y,z)$とおくと

$$\overrightarrow{IP} = r\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OI} + r\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$(x,y,z) = (r,r,r) + r\left(\frac{1}{\sqrt{2a^2-2a+2}}, \frac{a}{\sqrt{2a^2-2a+2}}, \frac{1-a}{\sqrt{2a^2-2a+2}}\right)$$

$$\mathrm{x} = \frac{1}{\sqrt{2a^2-2a+2}+2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2a^2-2a+2}}\right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2a^2-2a+2}+2}\left(1 + \frac{a}{\sqrt{2a^2-2a+2}}\right)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2a^2-2a+2}+2}\left(1 + \frac{1-a}{\sqrt{2a^2-2a+2}}\right)$$

（４）

「S の体積の最大値」⇔「S の半径が最大」

$$r = \frac{1}{\sqrt{2a^2 - 2a + 2} + 2} \quad (0 < r < 1)$$

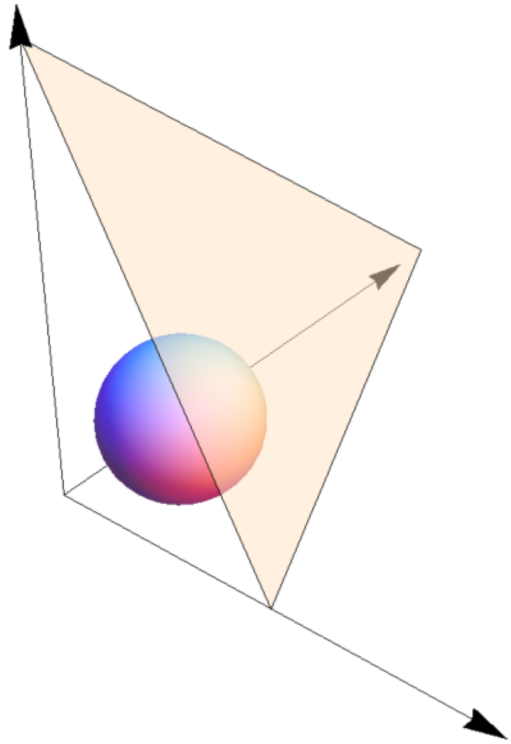
$f(a) = 2a^2 - 2a + 2$ $(0 < a < 1)$ が最小となるとき、$r$ は最大となる。

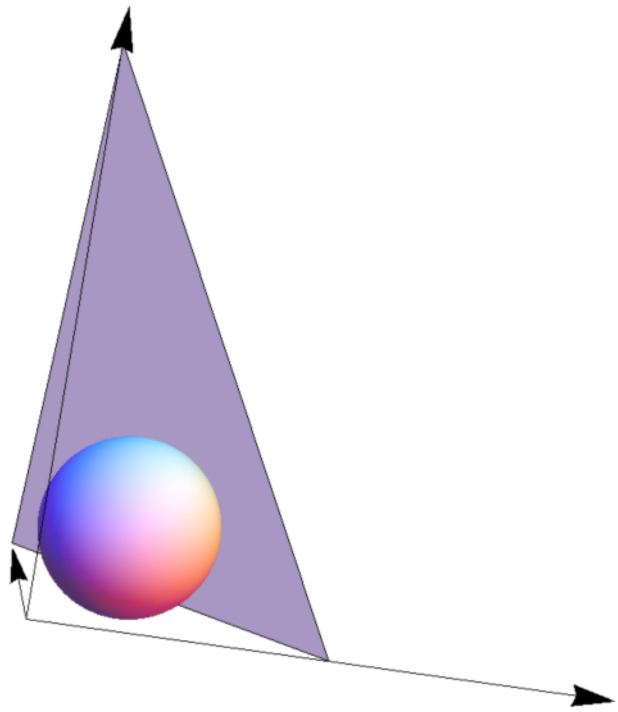
$$f(a) = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

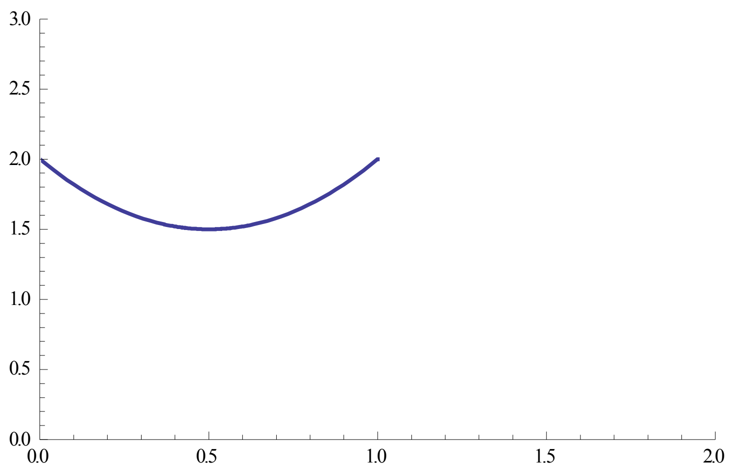
図より

$a = \frac{1}{2}$のとき最小となる。$r = \frac{4-\sqrt{6}}{5}$

S の体積の最大値は、$\frac{4\pi}{3}\left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)^3$







**Episode 5　外積は回転移動に有効である。**

３次元空間内の原点を通り、方向ベクトルが$\vec{u}=(p,q,r)$直線を$l$とする。

$$l;\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$$

この空間内の点$P(x,y,z)$を、直線$l$を軸として、$\theta$回転した点 A を求める。

Step1；点$P(x,y,z)$から直線$l$へ垂線を下ろした点 Q を求める。

$\overrightarrow{OQ}$ は $\overrightarrow{OP}$ の正射影ベクトルである。$\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角を$\alpha$とする。

$$\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|cos\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{|\vec{u}|\left|\overrightarrow{OP}\right|cos\alpha}{|\vec{u}|^2}\vec{u}=\left(\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$$

Step2；点$P(x,y,z)$を、直線$l$を軸として、90° 回転した点$R$の座標を求める。

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$$

ここで外積を使う。

$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QP}\times\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}\times\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Step3；点$P(x,y,z)$を、直線$l$を軸として、$\theta$回転した点 A を求める。

点 A から線分 QP,QR へ垂線を下ろした点を C,B とする。

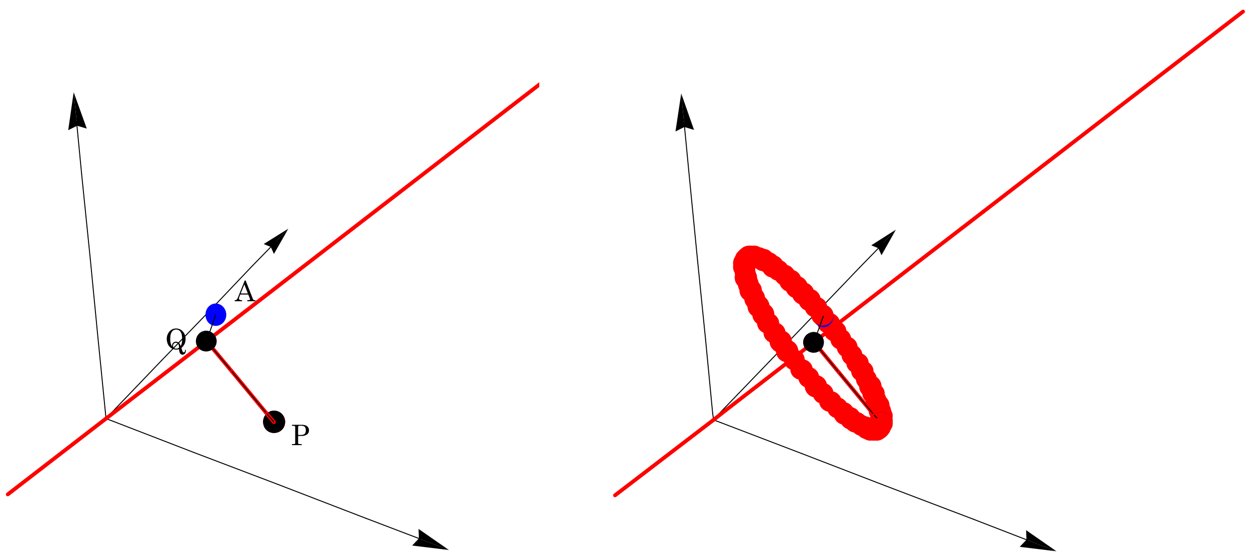
図より、$\left|\overrightarrow{QP}\right|=\left|\overrightarrow{QR}\right|=\left|\overrightarrow{QA}\right|$

$$\left|\overrightarrow{QC}\right|=\left|\overrightarrow{QA}\right|cos\theta=\left|\overrightarrow{QP}\right|cos\theta,\left|\overrightarrow{QB}\right|=\left|\overrightarrow{QA}\right|sin\theta=\left|\overrightarrow{QP}\right|sin\theta$$

$$\overrightarrow{QC}=cos\theta\,\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QB}=sin\theta\,\overrightarrow{QR}$$

$$\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QB}=cos\theta\,\overrightarrow{QP}+sin\theta\,\overrightarrow{QR}$$

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OQ}+cos\theta\,\overrightarrow{QP}+sin\theta\,\overrightarrow{QR}$$



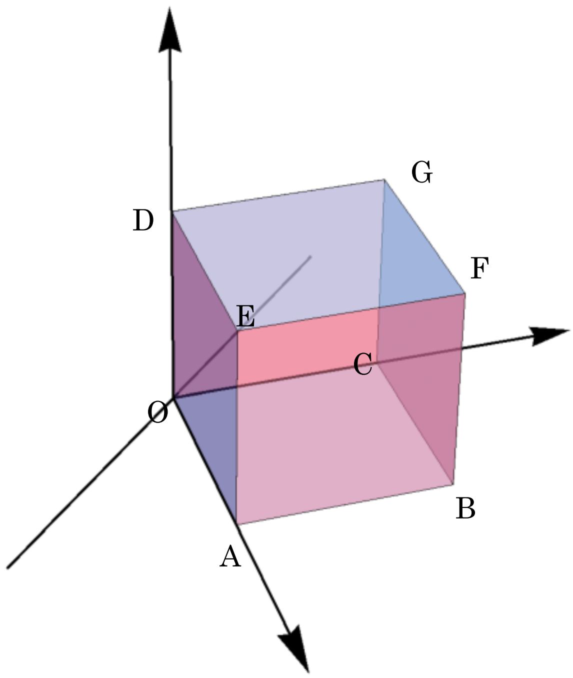
**2010 年　静岡大学・理**

xyz座標空間に、図のように一辺の長さ 1 の立方体 OABC-DEFG がある。この立方体を$xy$平面上の直線 $y=-x$ のまわりに、頂点 F が $z$ 軸の正の部分にくるまで回転させる。

（１）　回転後の頂点 B の座標を求めよ。

（２）　回転後の頂点 A,G で定まるベクトル$\overrightarrow{AG}$ の成分を求めよ。

【解答例】



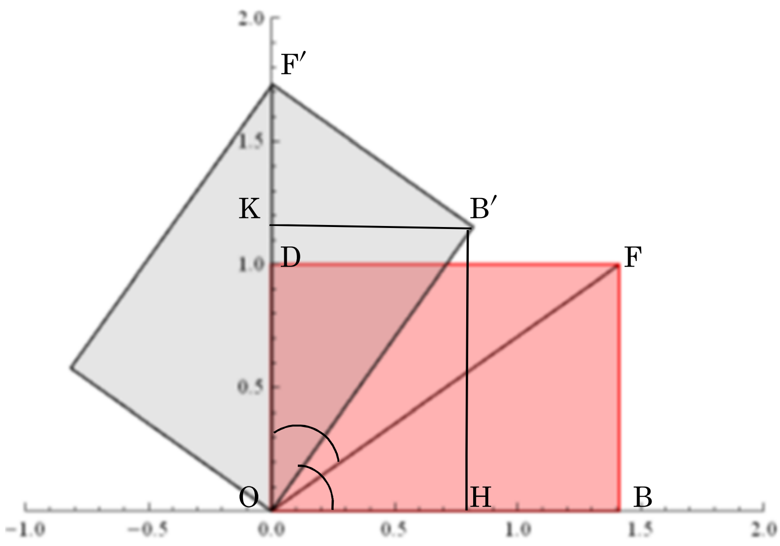

（１）　$xy$平面上の直線$l; y=-x, z=0$,直線$m; y=x, z=0$とする。

直方形 OBFD を、$l$を軸とし回転するときは、平面$y=x$上で回転する。頂点 F が $z$ 軸の正の部分にくるまで回転させた点を F'とする。$\angle FOF'=\theta$とする。

$$OF=\sqrt{OB^2+FB^2}=\sqrt{3}$$

$$cos\theta=\frac{OD}{OF}=\frac{1}{\sqrt{3}}, sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\overrightarrow{OB}=(1,1,0), \overrightarrow{OF'}=\left(0,0,\sqrt{3}\right)$$



【外積を使わない方法】

B’から OB,OF’に下ろした垂線の足を H,K とすると、

$$\frac{OH}{OB'} = cos\theta, \frac{OK}{OB'} = sin\theta\ , OB' = OB = \sqrt{2}$$

$$OH = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ , OK = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} = OH\ \frac{\overrightarrow{OB}}{OB} + OK\ \frac{\overrightarrow{OF}}{OF'} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0) + \frac{2}{3}\left(0,0,\sqrt{3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

（2）$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{AC}$と直線$l$とは平行なので、回転してもベクトルとして変化しないので、$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} = (-1,1,0)$

回転すると、$\overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{B'F'}$

$$\overrightarrow{B'F'} = \overrightarrow{OF'} - \overrightarrow{OB'} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\overrightarrow{A'G'} = (-1,1,0) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

【外積を使う方法】

空間内の任意の点$P(x,y,z)$を、直線$l; y = -x, z = 0$を軸として、$\theta$ 回転した点 A の座標を求める。

$\vec{u} = (-1,1,0)$とおくと Episode5 より、$\overrightarrow{OP}$の直線$l; y = -x, z = 0$への正射影ベクトル$\overrightarrow{OQ}$は、

$$\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u} = \frac{-x+y}{2}\ (-1,1,0)$$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right)$$

$$\overrightarrow{QP} \times \vec{u} = (-z, -z, x+y), |\vec{u}| = \sqrt{2}$$

$\overrightarrow{QP}$を直線$l$を回転軸として 90°　した$\overrightarrow{QR}$は、

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP}\ \times \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-z, -z, x+y)$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} + cos\theta\ \overrightarrow{QP} + sin\theta\ \overrightarrow{QR}$$

$$cos\theta = \frac{OD}{OF} = \frac{1}{\sqrt{3}}, sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}, 0\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}(-z, -z, x+y)$$

$$= \left(\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)x + \left(-\sqrt{3}+1\right)y - 2z}{2\sqrt{3}}, \frac{\left(-\sqrt{3}+1\right)x + \left(\sqrt{3}+1\right)y - 2z}{2\sqrt{3}}, \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\right)$$

外積は、3 次元空間での回転、面積、体積、平面の法線ベクトル分野に活用できる。

松本睦郎（札幌北高等学校）