２行２列正方行列

交換可能行列からみえるもの

一次変換を視覚化する

松本睦郎（札幌北高等学校）

Episode 1　2013 年　北海道大学 理系 後期

２×２行列 A と B が AB=BA をみたすとき、A と B は交換可能であるという。

（１）A と B が交換可能ならば、AB と B は交換可能であることを示せ。

（２） 行列 X,C,E を

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ と定める。

ただし、a,b,c,dは実数とする。XとCが交換可能のとき、Xは実数α,βを用いて

$$\alpha C+\beta E$$

と表されることを示せ。

（３） 上の行列 C に対して、次の３条件を同時にみたす２×２行列 Y をすべて求めよ。

(a)　Yと Cは交換可能

(b)　$CY=tY$ を満たす実数 t がある。

(c)　Yの（２, ２）成分は１である。

解答方針 ;「行列分野」に関する大学入試問題の多くは「成分比較」による解法を用る。この北大の問題も当然「成分比較」で解法する。

【解答例】

（１）(AB)B=B(AB) を証明する。

〔証明〕左辺＝(AB)B=(BA)B=B(AB)=右辺　■

（２）$XC=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b & 2a\\ c+3d & 2c\end{pmatrix}$　　$CX=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a & 3b\end{pmatrix}$

XC=CX より　各成分を比較すると

$$\begin{cases}a+3b=a+2c\\ 2a=b+2d\\ c+3d=3a\\ 2c=3b\end{cases}\qquad \begin{cases}b=2a-2d=2(a-d)\\ c=3a-3d=3(a-d)\end{cases}$$

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}a & 2(a-d)\\ 3(a-d) & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-d & 2(a-d)\\ 3(a-d) & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}=(a-d)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$=(a-d)C+dE$　　a,dは実数なので、$\alpha=a-d,\beta=d$ とおくと、

$$X=\alpha C+\beta E$$

■

（３）（*a*）YC=CY より　$Y = pC + qE$　と表示される。

$Y = p\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p+q & 2p\\3p & q\end{pmatrix}$　（ｃ）より q=1　$\therefore \mathrm{Y} = \begin{pmatrix}p+1 & 2p\\3p & 1\end{pmatrix}$

CY=tY より　$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p+1 & 2p\\3p & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t(p+1) & 2pt\\3pt & t\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}7p+1 & 2p+2\\3p+3 & 6p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t(p+1) & 2pt\\3pt & t\end{pmatrix}$$

各成分を比較すると$\begin{cases}7p+1 = t(p+1)\cdots ① \\ 2p+2 = 2pt\cdots ② \\ 3p+3 = 3pt\cdots ③ \\ 6p = t\cdots ④\end{cases}$　③－②　$p+1 = pt$ へ④を代入

$$6p^2 - p - 1 = 0$$

$$(2p-1)(3p+1) = 0$$

$$p = \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$$

$$p = \frac{1}{2}, t = 3 \qquad p = -\frac{1}{3}, t = -2$$

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

■

命題「*XC=CX*　⇒　$X = \alpha C + \beta E$」は、一般に成立するのか確認する。

Episode1－1　例（4 Step より）

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -2\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}0 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & -2+6\\4 & -4-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 4\\4 & -10\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{BA} = \begin{pmatrix}0 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 4\\4 & -10\end{pmatrix} \quad \therefore \mathrm{AB} = \mathrm{BA}$$

$$\mathrm{B} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{E}$$

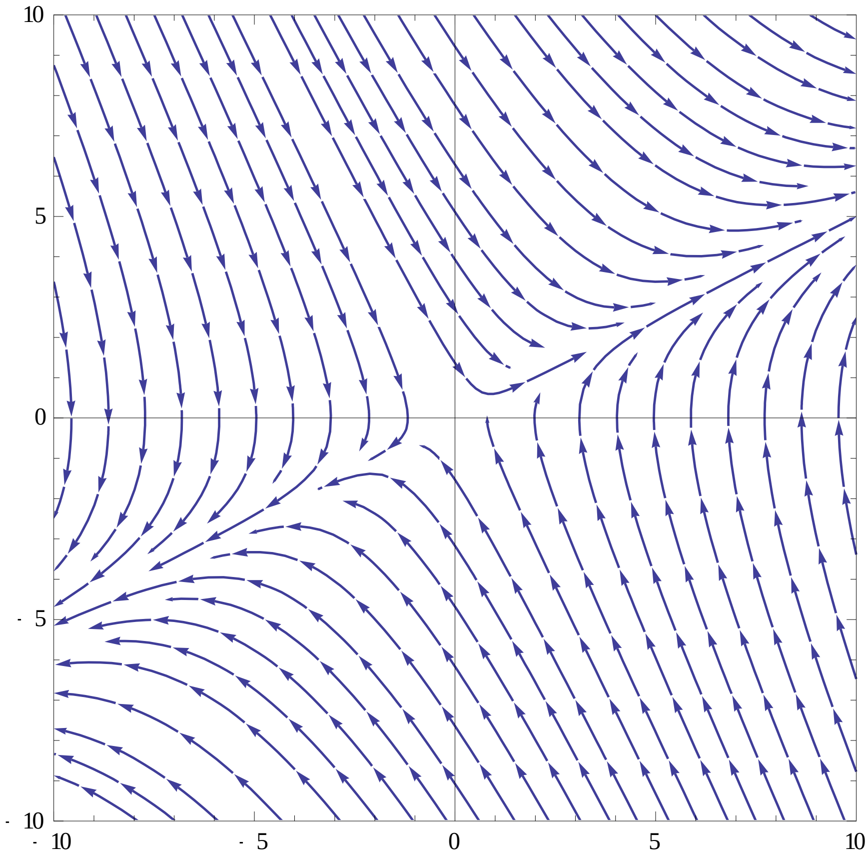
$$\begin{pmatrix}0 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

成分比較すると、$\alpha = -1, \beta = 1$

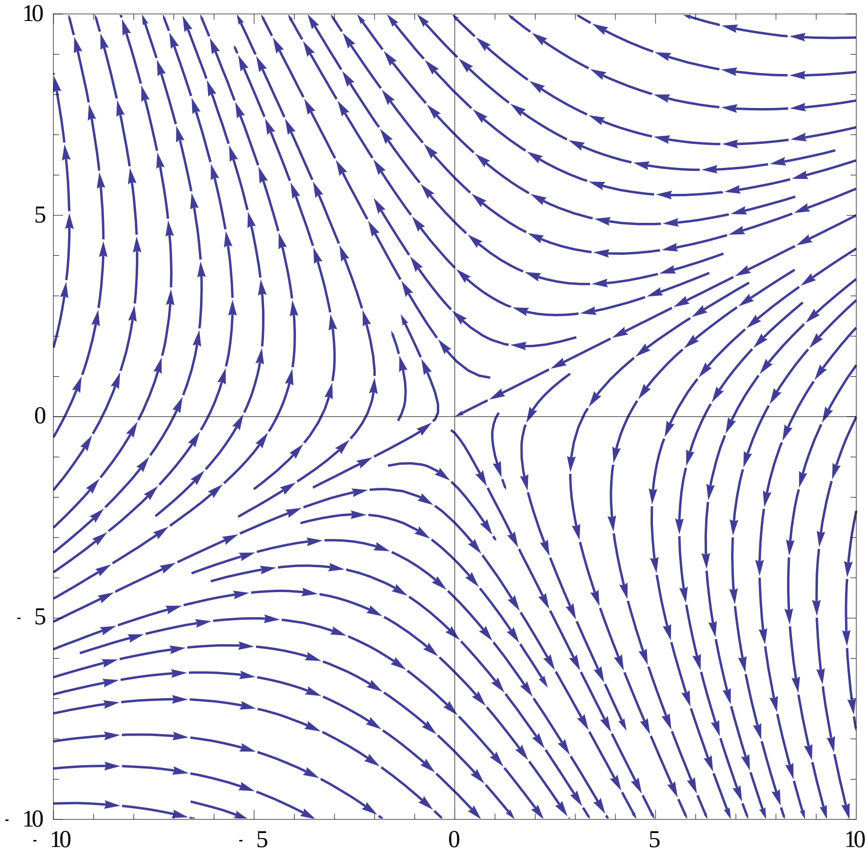
$$B = -A + E$$

この例題は、成立する。次に、一次変換のから、行列 A と B の性質を調べよう。

$\overrightarrow{OP} = (x, y), \overrightarrow{OQ} = (X, Y), \overrightarrow{OQ} = A\,\overrightarrow{OP}$　として、$\overrightarrow{PQ}$　を作図してみる。



$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$の 1 次変換↑　　$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$の 1 次変換↓



Episode２　交換可能行列の定理

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$は単位行列 E の実数倍ではなく、$c \neq 0$　B は２行２列の行列で　AB=BA

$\vec{p}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{q}=A\vec{p}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$　とする。

（１）　$B\vec{p}=\vec{r}$ とおくとき$\vec{r}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}$ と表示できる。

（２）　(１)の α, β を用いて$B=\beta A+\alpha E$ と表示できる。

〔証明〕

（１）$c \neq 0$　より$\vec{p}$と $\vec{q}$ は１次独立である。　平面上の任意のベクトルは、$\vec{p}$と $\vec{q}$ の１次結合で表示される。　∴ $\vec{r}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}$り

（２）

$$(AB)\vec{p}=A(B\vec{p})=A\vec{r}=A(\alpha\vec{p}+\beta\vec{q})=\alpha A\vec{p}+\beta A\vec{q}=\alpha A\vec{p}+\beta A^2\vec{p}=(\alpha E+\beta A)A\vec{p}$$

AB=BA より

$$(BA)\vec{p}=B(A\vec{p})=(\alpha E+\beta A)A\vec{p}\cdots①$$

$$B\vec{p}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}=\alpha\vec{p}+\beta A\vec{p}=(\beta A+E)\vec{p}\cdots②$$

①②をまとめると

$$B(A\vec{p},\vec{p})=(\alpha E+\beta A)(A\vec{p},\vec{p})$$

$$B\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}=(\beta A+\alpha E)\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}=-c\neq 0$$　なので、逆行列をもち

$$B=\beta A+\alpha E$$

■

一般に、

交換可能な２×２行列 A,B は、$B=\beta A+\alpha E$ と表示できる。

Episode３　交換可能と固有ベクトル

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$　の固有値と固有ベクトルを求める。

（ｉ）A について

$$\det\begin{pmatrix} 1-\mu & 2 \\ 2 & -2-\mu \end{pmatrix}=0 \text{ より }\quad \mu=-3,2$$

$$\mu=-3 \text{ のとき }\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ から} y=-2x$$

$$\mu=2 \text{のとき }\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ から} y=\frac{1}{2}x$$

（ⅱ）B について

$$\det\begin{pmatrix} 0-\mu & -2 \\ -2 & 3-\mu \end{pmatrix}=0 \text{ より } \quad \mu=4,-1$$

$$\mu=4 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ から} y=-2x$$

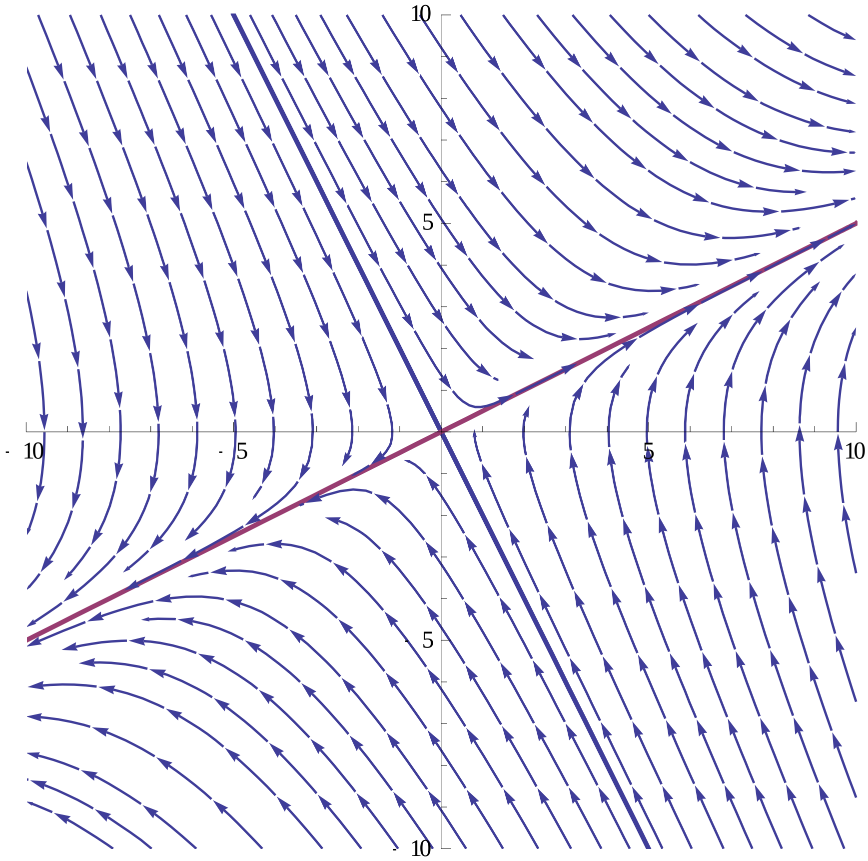
$$\mu=-1 \text{のとき } \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ から} y=\frac{1}{2}x$$

（ⅲ）AB について

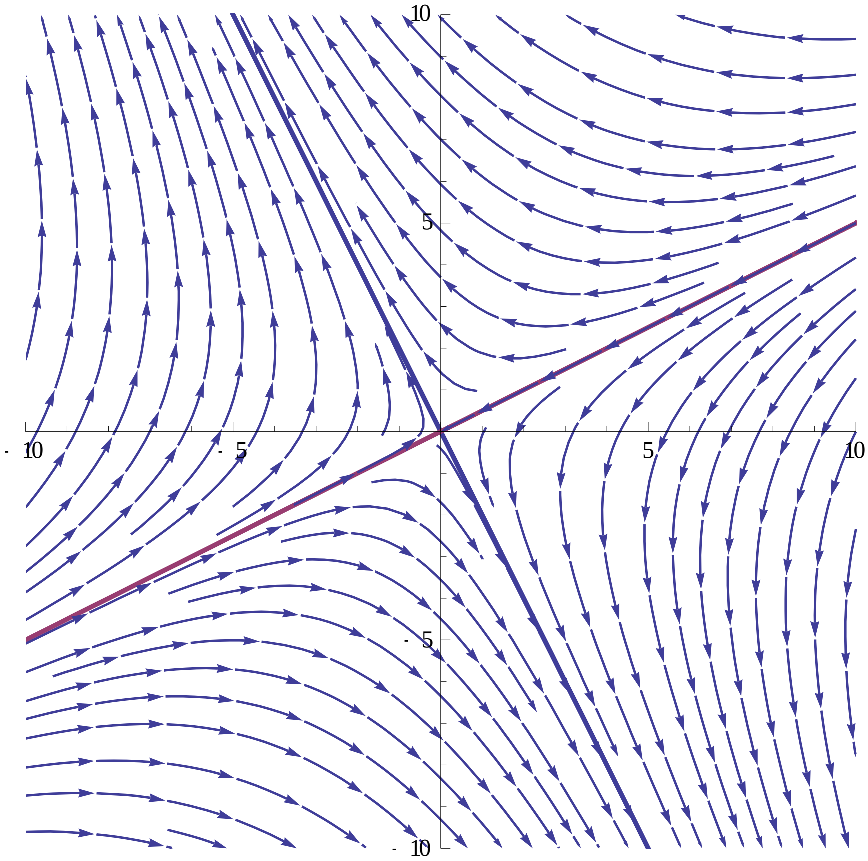
$$\det\begin{pmatrix} -4-\mu & 4 \\ 4 & -10-\mu \end{pmatrix}=0 \text{ より } \quad \mu=-2,-12$$

$$\mu=-2 \text{ のとき } \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ から} y=\frac{1}{2}x$$

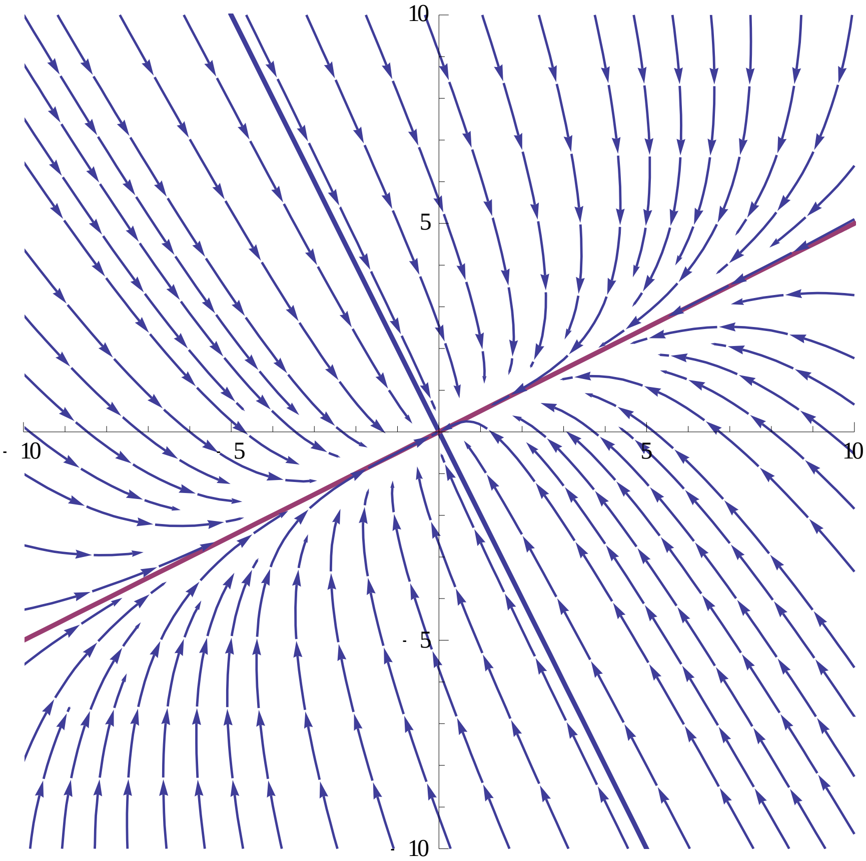
$$\mu=-12 \text{のとき } \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-12\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ から} y=-2x$$



$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ の一次変換↑



$B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$の一次変換↑　　$AB=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 4 & -10\end{pmatrix}$の一次変換↓



Episode 4　交換可能行列の定理

n次正方行列 A，B があり、どちらも単位行列の実数倍でなく、AB=BA である。$\overrightarrow{p} \neq \vec{0}$

（１） $\vec{p}$ が A の固有ベクトル⇒$\vec{p}$ が B の固有ベクトル

（２） 特に、$n = 2$ のとき、

A が２つの固有ベクトルを持てば（持たない場合もある）⇒B も２つの固有ベクトルを持ち

それらの固有ベクトルは一致する。

〔証明〕

（１）$\mathrm{A}\vec{p} = \alpha\,\vec{p}$ と AB=BA より $AB\vec{p} = A(B\,\vec{p})$ ⋯①

$\mathrm{AB}\vec{p} = BA\,\vec{p} = B(A\,\vec{p}) = B(\alpha\,\vec{p}) = \alpha(B\,\vec{p})$ ⋯②

$$\therefore \mathrm{A}(B\,\vec{p}) = \alpha\,B\vec{p}$$

$\mathrm{B}\vec{p}$ が A の固有値 α の固有ベクトルである。

仮定Ｉ ;「$B\vec{p} \nparallel \vec{p}$ 」と仮定する。

$$\mathrm{A}\vec{p} = \alpha\,\vec{p}$$

$$\mathrm{A}(B\,\vec{p}) = \alpha\,B\vec{p} \quad より$$

$$\mathrm{A}(\vec{p}\,,B\vec{p}) = (\alpha\,\vec{p}\,,\alpha\,B\vec{p}) = \alpha(\vec{p}\,,B\,\vec{p}\,)$$

$B\vec{p} \nparallel \vec{p}$ より$(\vec{p}\,,B\,\vec{p}\,)^{-1}$ が存在する。

$$\mathrm{A}(\vec{p}\,,B\vec{p})(\,\vec{p}\,,B\vec{p})^{-1} = \alpha(\vec{p}\,,B\,\vec{p}\,)(\,\vec{p}\,,B\vec{p})^{-1}$$

$$A = \alpha E$$

A が単位行列 E の実数倍でないことに反する。仮定 I は成立しない。

$B\vec{p}$ と $\vec{p}$ は　平行である。　$\mathrm{B}\vec{p} = k\,\vec{p}$

∴　$\vec{p}$ は B の固有ベクトルである。

（２）⇒の証明

> 定理　２次正方行列 A,B について、A が単位行列の実数倍でない。
>
> $$AB{=}BA \quad \Rightarrow \quad B{=}s\,A + t\,E$$

定理より　$B = sA + t\,E$ と表示できる。（s,tは実数）

$$B\vec{p} = \ (s\,A + t\,E)\,\overrightarrow{p} = sA\vec{p} + t\,\vec{p} = s\,(\alpha\,\vec{p}) + t\vec{p} = (s\,\alpha + t)\,\vec{p}$$

∴　A の固有ベクトルは、B の固有ベクトルである。

Episode 4　交換可能と固有ベクトル

２次正方行列A,Bの固有方程式が相異なる２実数解をもつとき、

（１）　Aの相異なる固有値をα,βとするとき、αとβの固有ベクトルは方向が異なる。

（２）　Aの相異なる固有値α,βに関する固有ベクトルを$\vec{p}$,$\vec{q}$、
Bの相異なる固有値γ,δに関する固有ベクトルも$\vec{p}$,$\vec{q}$　とするとき　AB=BA（交換可能）

〔証明〕（１）

仮定Ⅰ；「$\mathrm{A}\vec{p}=\alpha\,\vec{p}$　かつ　$\mathrm{A}\vec{p}=\beta\vec{p}$　$\vec{p}\neq\vec{0}$」と仮定する。

$$\alpha\,\vec{p}=\beta\,\vec{p}$$

$$(\alpha-\beta)\,\vec{p}=0$$

$$\vec{p}\neq\vec{0}\ \text{より}$$

$\alpha=\beta$　となり　条件に反する。

∴　αとβの固有ベクトルは異なる。

〔証明〕（２）　（１）より$\vec{p}$,$\vec{q}$ は一次独立

$$\begin{cases}A\,\vec{p}=\alpha\,\vec{p} & A\vec{q}=\beta\,\vec{q}\\ B\,\vec{p}=\gamma\,\vec{p} & B\,\vec{q}=\delta\,\vec{q}\end{cases}$$

$$\begin{cases}AB\,\vec{p}=A(B\,\vec{p})=A\,(\gamma\,\vec{p})=\gamma A\vec{p}=\alpha\,\gamma\,\vec{p}\\ BA\,\vec{p}=B(A\,\vec{p})=B\,(\alpha\,\vec{p})=\alpha B\vec{p}=\alpha\,\gamma\,\vec{p}\end{cases}$$

$$\therefore AB\vec{p}=BA\vec{p}\ \cdots ①$$

同様に　$AB\vec{q}=\beta\delta\vec{q}$ かつ $BA\vec{q}=\beta\delta\vec{q}$

$$\therefore AB\vec{q}=BA\vec{q}\cdots ②$$

①　②より

$$AB(\vec{p}\ \vec{q})=BA(\vec{p}\ \vec{q})$$

$\vec{p}$,$\vec{q}$ は一次独立なので、$(\vec{p}\ \ \vec{q})^{-1}$ が存在するので、両辺の右から$(\vec{p}\ \ \vec{q})^{-1}$ をかけると

$$\therefore AB=BA$$

定理　２次正方行列A,Bについて、それぞれの固有ベクトルが存在するとき $AB=BA$　⇔　Aの２つの固有ベクトルと Bの２つの固有ベクトルは一致

【注意】この定理は異なる２つの固有値と固有ベクトルが存在するとき成立する。

Episode 5　スペクトル分解（直和分解）

２次の正方行列Aは、２つの異なる実数の固有値α, βをもち、α, βに対応する固有ベクトルを$\vec{p}, \vec{q}$とする。

$$P = \frac{A - \beta E}{\alpha - \beta}, Q = \frac{A - \alpha E}{\beta - \alpha}$$

とするとき、

（１）$P^2 = P, Q^2 = Q$

（２）$PQ = QP$

（３）$P + Q = E$

（４）$A = \alpha P + \beta Q$

を示せ。

〔証明〕Hamilton-Cayleyの定理より

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta E = 0$$

（１）

$$P^2 = \frac{(A - \beta E)^2}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{A^2 - 2\beta A + \beta^2 E}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)A - \alpha\beta E - 2\beta A + \beta^2 E}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{(\alpha - \beta)(A - \beta E)}{(\alpha - \beta)^2} = P$$

同様に

$$Q^2 = \frac{(A - \alpha E)^2}{(\beta - \alpha)^2} = \frac{A^2 - 2\alpha A + \alpha^2 E}{(\beta - \alpha)^2} = \frac{(\alpha + \beta)A - \alpha\beta E - 2\alpha A + \alpha^2 E}{(\beta - \alpha)^2} = \frac{(\beta - \alpha)(A - \alpha E)}{(\beta - \alpha)^2} = Q$$

（２）

$$PQ = -\frac{(A - \beta E)(A - \alpha E)}{(\alpha - \beta)^2} = -\frac{A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta E}{(\alpha + \beta)^2} = 0$$

同様に

$$QP = 0$$

（３）

$$P + Q = \frac{A - \beta E}{\alpha - \beta} + \frac{A - \alpha E}{\beta - \alpha} = \frac{(\alpha - \beta)E}{\alpha - \beta} = E$$

（４）

$$\alpha P + \beta Q = \alpha\frac{(A - \beta E)}{\alpha - \beta} + \beta\frac{(A - \alpha E)}{\beta - \alpha} = \frac{(\alpha - \beta)A}{\alpha - \beta} = A$$

Episode 6　スペクトル分解（直和分解）の例

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$　で定まる 1 次変換を f とする。

（1）　直線$l_1; y=a_1x,\ l_2; y=a_2x$　はそれぞれ fによって、自分自身に移る。このときa_1, a_2を求めよ。

（2）　任意の点 P に対して、P を通り$l_2; y=a_2x$に平行な直線と$l_1; y=a_1x$との交点を Q,P を通り$l_1; y=a_1x$に平行な直線と$l_2; y=a_2x$との交点を R とする。点 P に Q,R を対応させる 1 次変換 g,h を表す行列 B,C を求めよ。

（3）　A=αB+βC となるα,βを求め、A^nを求めよ。

〔解答〕

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$ の固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4-k & 2\\1 & 3-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$x=0, y=0$　以外の解をもつためには、

$$\det\begin{pmatrix}4-k & 2\\1 & 3-k\end{pmatrix}=0$$

$$k^2-7k+10=0$$

$$k=2, k=5$$

（i）$k=2$　のとき

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore y=-x$$

（i）$k=5$　のとき

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x$$

$$\therefore a_1=\frac{1}{2}, a_2=-1$$

（3）　1 次変換 gによって、点$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ は$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ に移り、点$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ は原点に移る。

$$B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow B\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$$

同様にして、

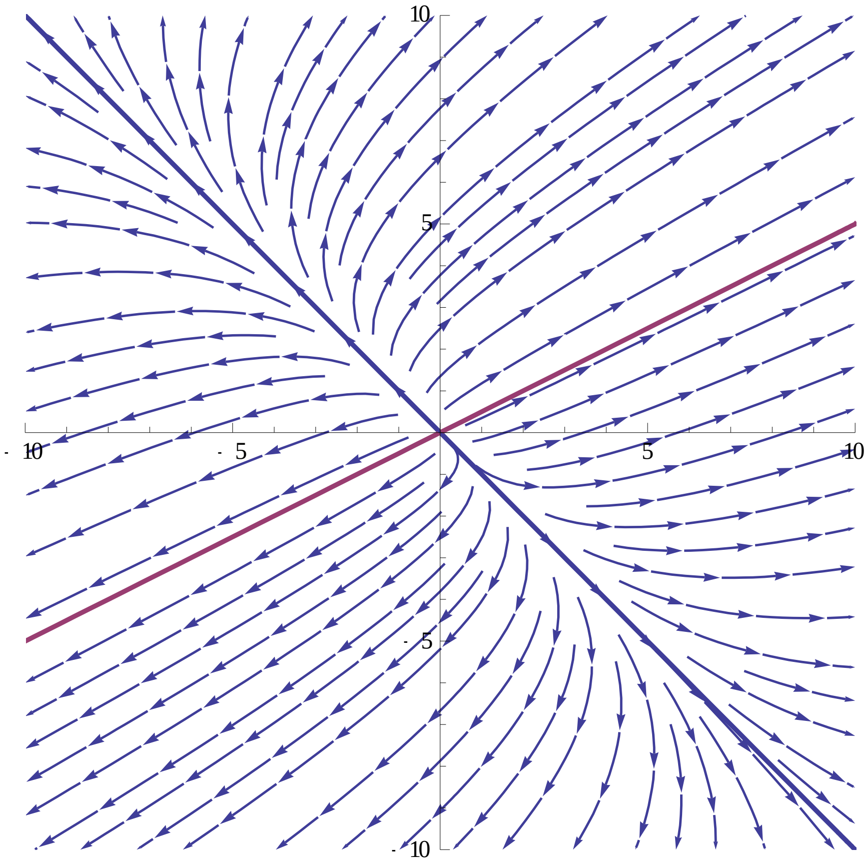
$$C\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},C\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow C\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&2\end{pmatrix}$$

（4）　A=αB+βC より

$$\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}=\frac{\alpha}{3}\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}+\frac{\beta}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$\alpha=5,\beta=2$$



〔補題〕

$$B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix},C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&2\end{pmatrix}$$

は交換可能であることを確認しよう。

$$BC=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$CB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$BC=CB$$

松本睦郎（札幌北高等学校）