

Mathematica で見る数学の世界

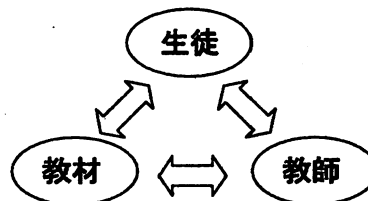
Interactive な授業・講習を目指す

北海道札幌北高等学校 松本睦郎

Interactive という英単語は 5 年前の英和辞典には存在せず、近年のコンピュータ技術の向上により、Inter と Active が合成されて作られた合成語である。最近辞書には、

1. お互いに作用しあうさま。双方向の。対話型の。
2. 情報処理・通信などの用語で、双方向の。対話型の。

Interactive な授業・講習とは「生徒」と「教師」が対話型の授業形式をとる。個別の指導法としては、コーチングの理論をとる。「生徒」と「教材」の関係は、従来は、教科書、



問題集、宿題等の紙を媒体とした教材により理解してきた。これは素晴らしいことである。時代が進みコンピュータ技術が進歩した現在、手で触れると動き反応する CG 教材等を活用すると、より深い理解が得られる。現在、多くの数学ソフトが存在するが、やはり Mathematica は最強なソフトであると確信する。

昨年 11 月に Mathematica 8.0 日本語版がリリースされた。Mathematica で作成されたファイル `〇〇〇.nb` を CDF 形式でエクスポートして `〇〇〇.cdf` ファイル形式で保存する。事前に Wolfram のサイトから CDF - Player を無料でダウンロードしておく、Mathematica をインストールしていないパソコンにおいても、`〇〇〇.cdf` 形式のファイルを実行することができる。

更に、「Wolfram Demonstration Project」<http://demonstrations.wolfram.com/>

には、7231 のファイルがあり、多くの数学的現象等を CDF - Player で見たり、触れたりすることができる。今回の講演内容は、Mathematica によって作成した

0 部「Mathematica とは？」

Manipulate の機能について

I 部「大学入試問題」

大学入試問題から一立体図形問題へのアプローチ

II 部「微分積分の世界を見る」

ガリレオ→ホイヘンス→ライプニッツ→ベルヌイ兄弟→Brachistochrone の発見

カタナリーとトラクトリックス

振り子と共振現象の微分方程式

III 部「数学と画像診断医学との密接な関係」

フーリエ級数展開—世界は三角関数でできている—

単純 X 線断層撮影から CT スキャンと MRI の原理

について、話をしたいと思う。

目 次

第0部「Mathematica とは？」

◇Manipulate のいろいろ

第I部「大学入試問題」

— 立体図形問題へのアプローチ

- ◇札幌医科大学 2011 年 P 1～P11
- ◇東京大学 2010 年 P12～P14
- ◇断面を分析する技術 P15～P23
- ◇バウムクーヘン型～トンガリハット型の体積 P24～P28
- ◇くりぬき立体図形の体積 P29～P36
- ◇空間認識の技術 P37～P44

第II部「微分積分の世界を見る」

— Brachistochrone の発見

- ◇ガリレオ→ホイヘンス→ライプニッツ→ベルヌイ兄弟 P45～P56
- ◇カテナリーとトラクトリックス P57～P67
- ◇振り子と共振現象の微分方程式 P68～P71

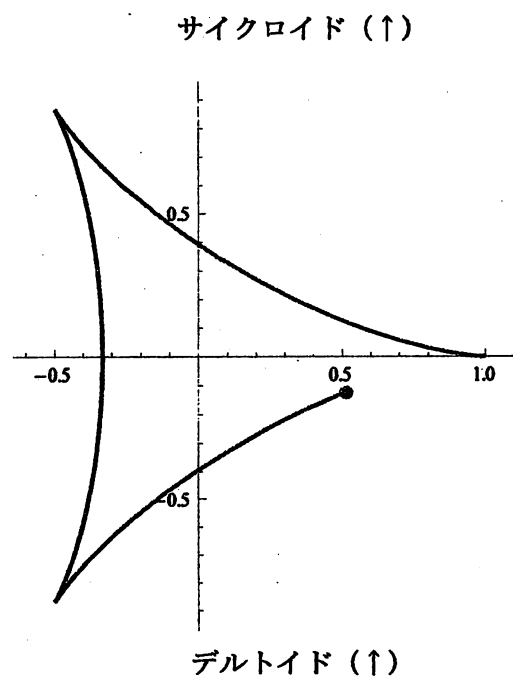
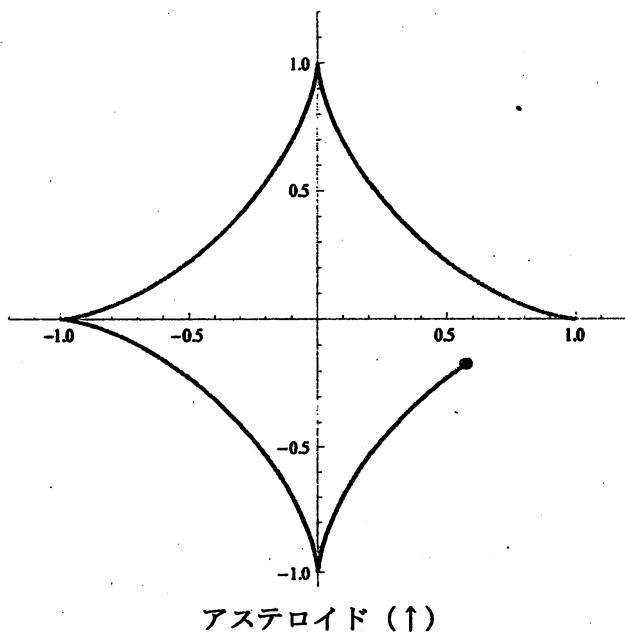
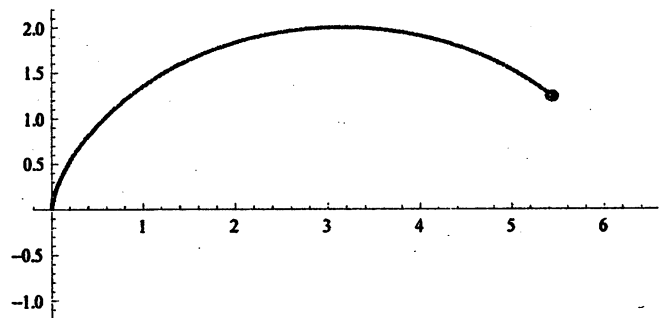
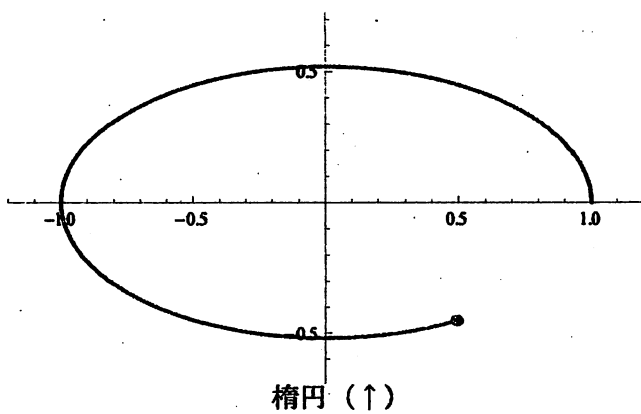
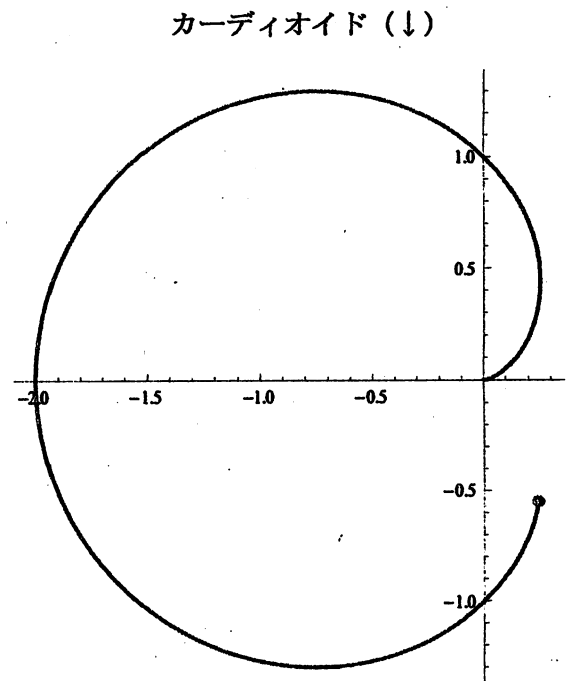
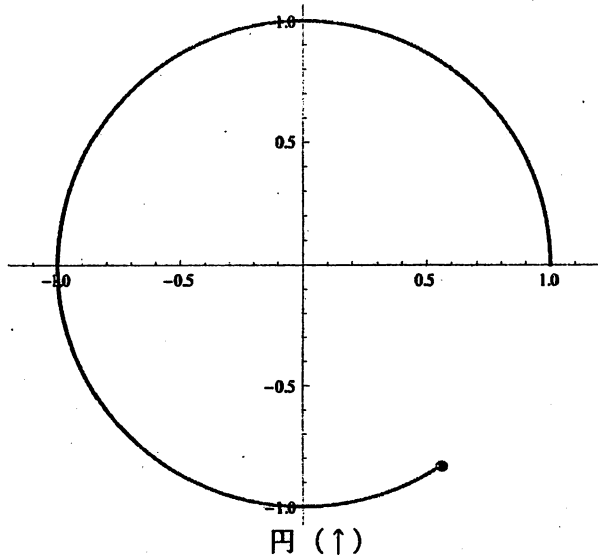
第III部「数学と画像診断医学との密接な関係」

— 医学の進歩に数学はどのようにして関わってきたのか

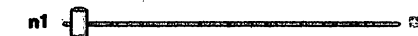
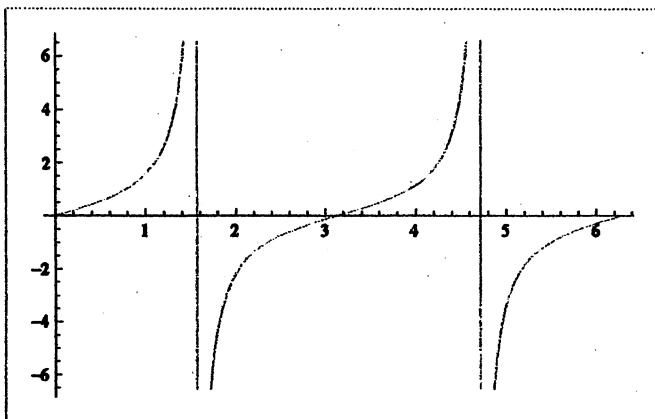
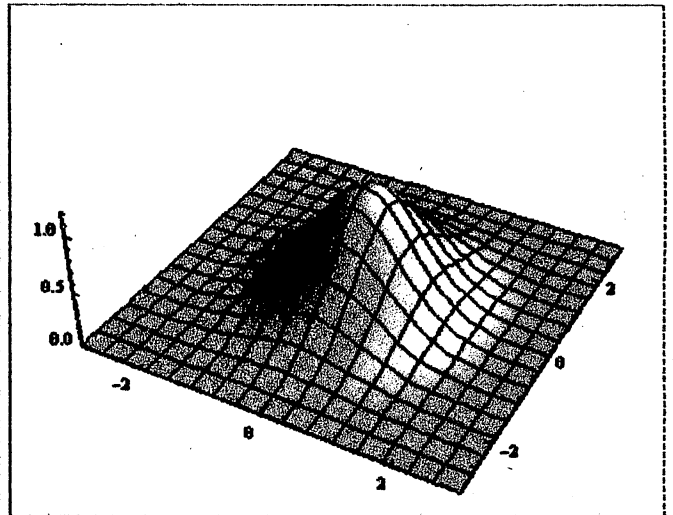
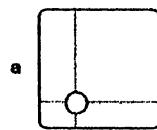
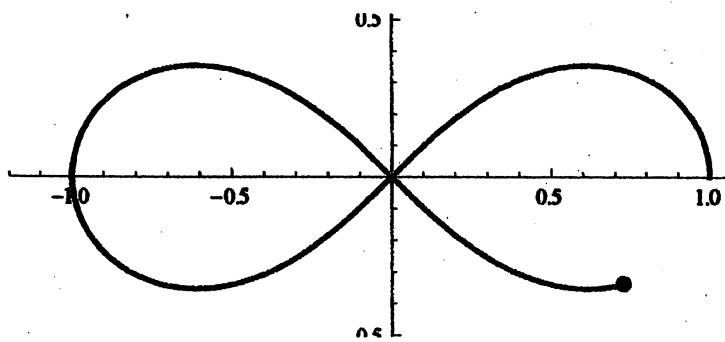
- ◇フーリエ級数展開—世界は三角関数でできている P72～P81
- ◇単純 X 線断層撮影から CT スキャンと MRI の原理 P82～P86

Manipulate のいろいろ

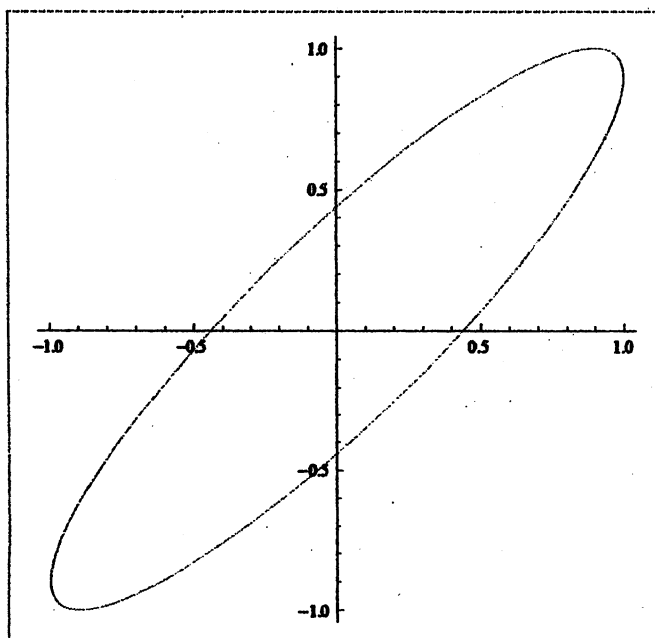
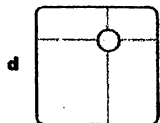
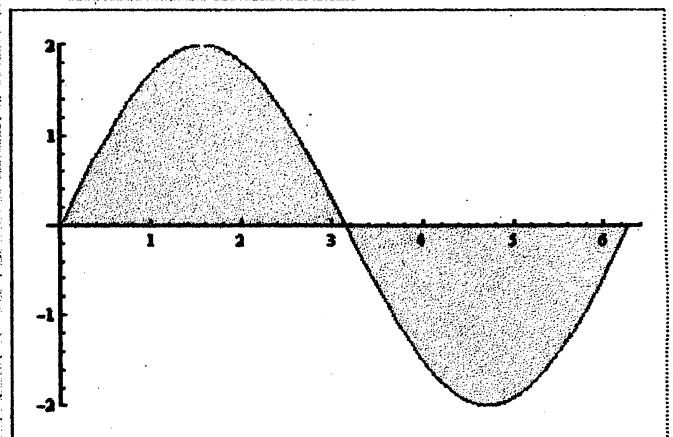
Manipulate を利用すると、様々な点の動きを見ることができる。いくつかの例をあげてみよう。



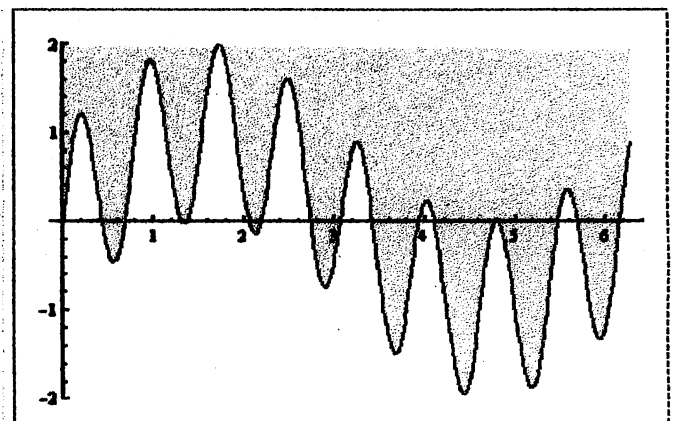
レムニスケード (↓)

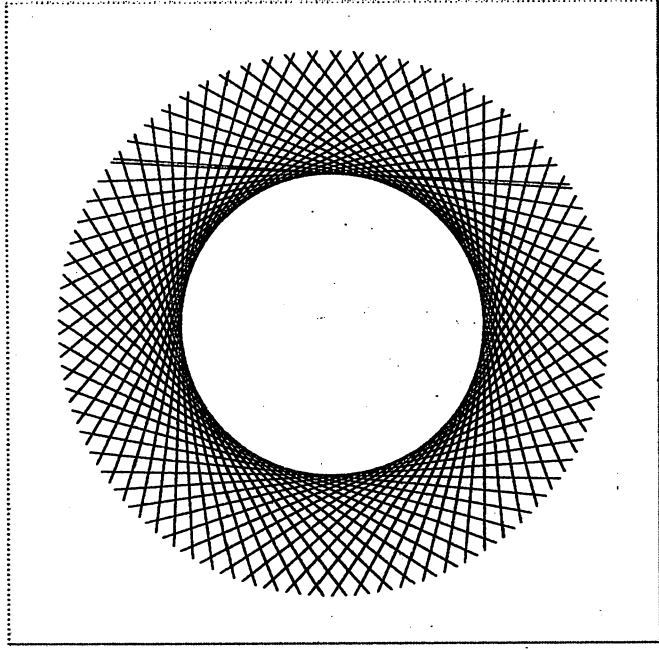
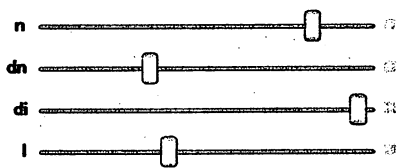
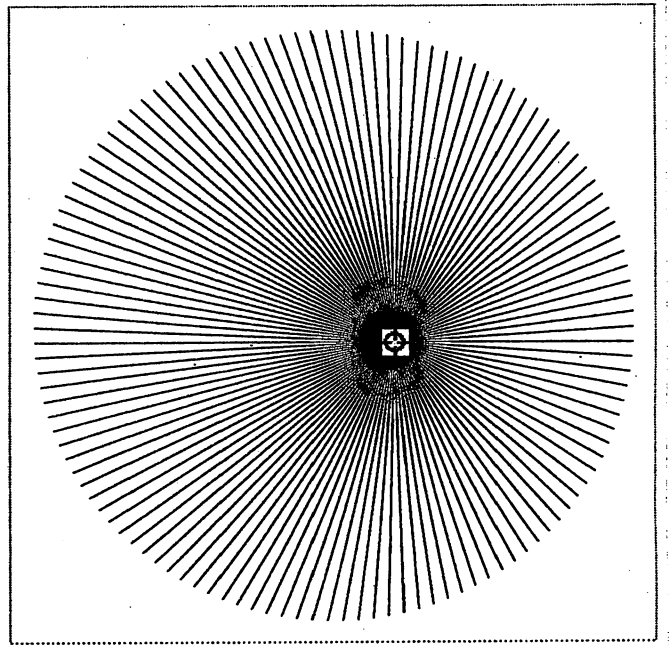
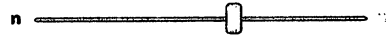
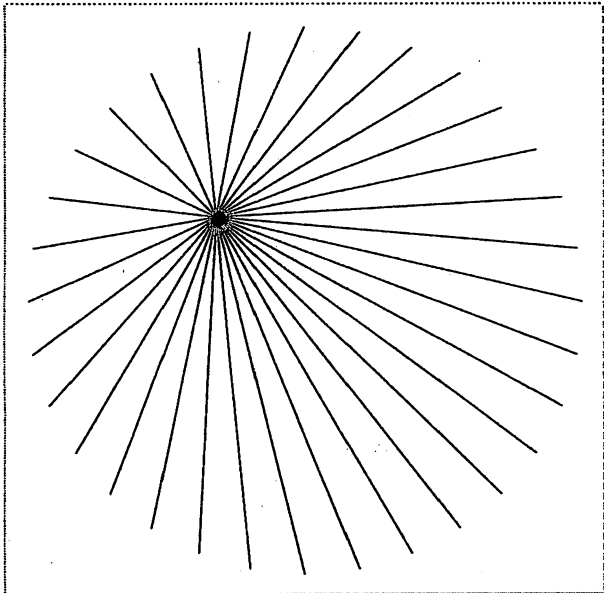
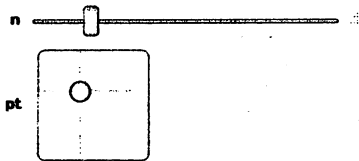


filling ☐ None ☐ Axis ☐ Top ☐ Bottom ☐ Automatic

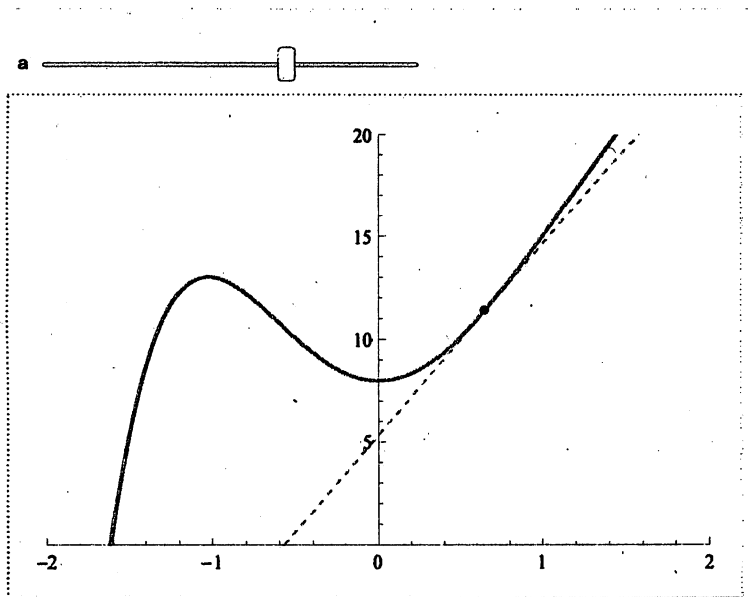


filling Top ☒

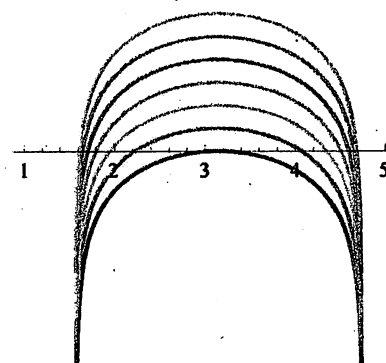
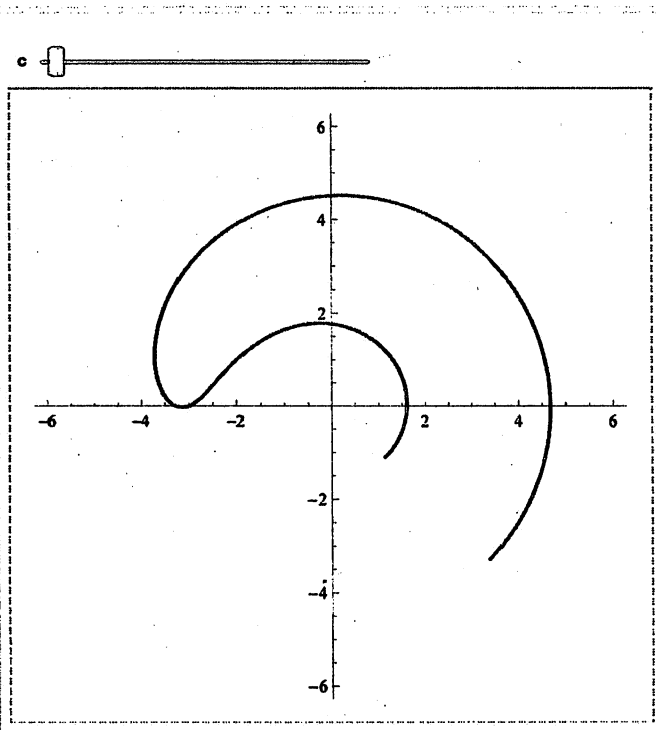




Out[27]=

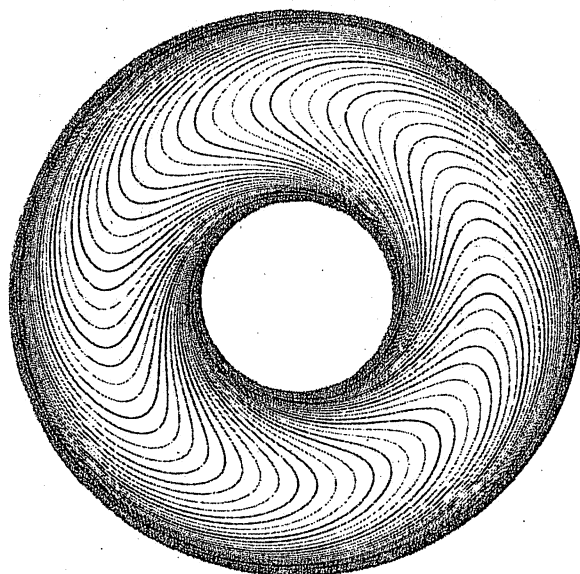


Out[33]=



$y = \log(\cos(r - \pi)) + c$ (↑)
をドーナツツへ座標変換 (←)

フオリエーションの完成





札幌医科大学 2011 年

1

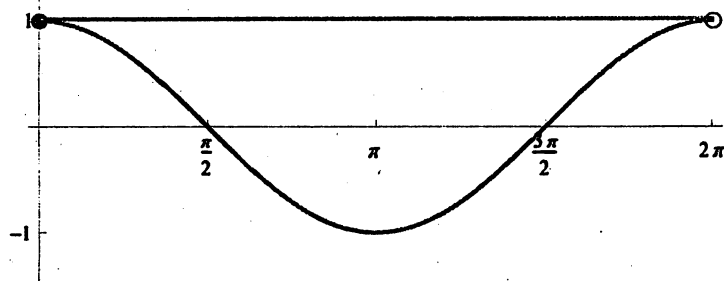
a, b を実数とし、 x に関する方程式

$$\cos 2x + a \cos x + b = 0$$

を考える。この方程式が $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、2 個の異なる実数解を持つための a, b に関する条件を求めよ。

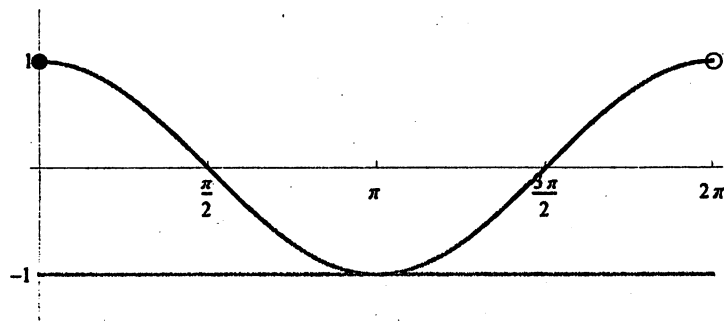
【解答例】

2 倍角の公式より、 $2\cos^2 x + a\cos x + b - 1 = 0$ $t = \cos x$ とおくと、 $0 \leq x < 2\pi$ より $-1 \leq t \leq 1$
 $t = 1$ のとき $\cos x = 1 \therefore x = 0$ (下図↓)



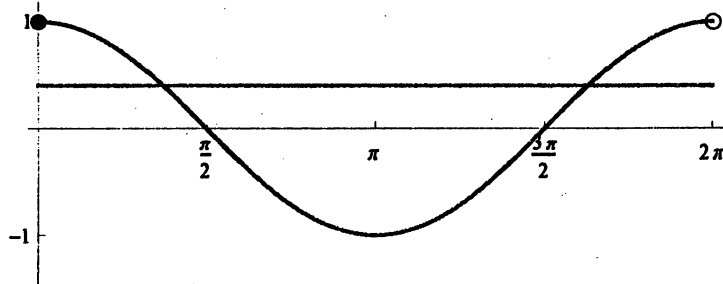
$t = 1$ において、解は 1 個存在

$t = -1$ のとき $\cos x = -1 \therefore x = \pi$ (下図↓)



$t = -1$ において、解は 1 個存在

$t = \pm 1$ のときは、解は 1 個持つ。それ以外の時は、 $-1 < t < 1$ の範囲で異なる解を持つ。

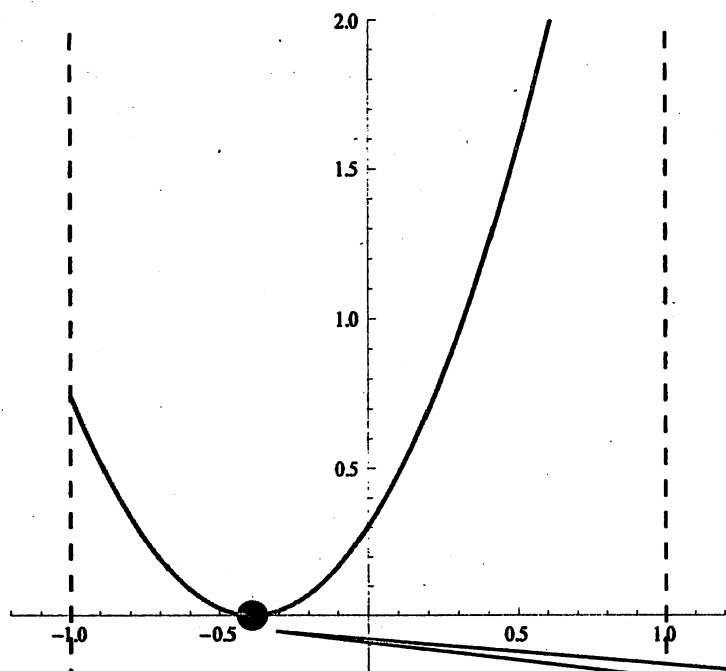


$-1 < t < 1$ において、解は異なる 2 個存在することを、確認する

$2t^2 + at + b - 1 = 0 \cdots (*)$ $-1 \leq t \leq 1$ の解について調べる。

(i) 判別式 $D=0$ の時

つまり、(*) が重複解を持つとき $a^2 - 8(b-1) = 0 \therefore b = \frac{1}{8}a^2 + 1$ の時



$$f(t) = 2t^2 + at + b - 1 \text{ とおく}$$

$$f(t) = 2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a}{8} + b - 1$$

頂点 $\left(-\frac{a}{4}, 0\right)$ より、

x が異なる 2 実解を持つためには、
 $-1 < t < 1$ の範囲で重複解を持つ。

$$-1 < \frac{a}{4} < 1 \text{ より、} \therefore -4 < a < 4$$

このとき、 $2t^2 + at + b - 1 = 0$ は
 $-1 < t < 1$ の範囲で重複解を持つ、

$$\therefore b = \frac{1}{8}a^2 + 1, -4 < a < 4 \cdots (\text{答 1})$$

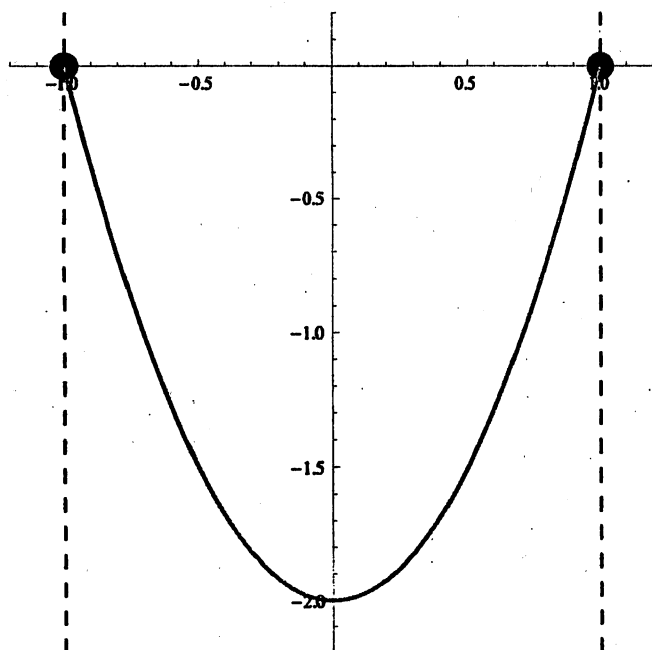
重複解の動く範囲に注意

(ii) 判別式 $D > 0$ の時

つまり、 $2t^2 + at + b - 1 = 0 \cdots (*)$ $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で異なる 2 つの実数解を持つとき、

$$a^2 - 8(b-1) > 0 \therefore b < \frac{1}{8}a^2 + 1 \text{ の時}$$

【TypeA】 $f(1)=0, f(-1)=0$ のケースについて

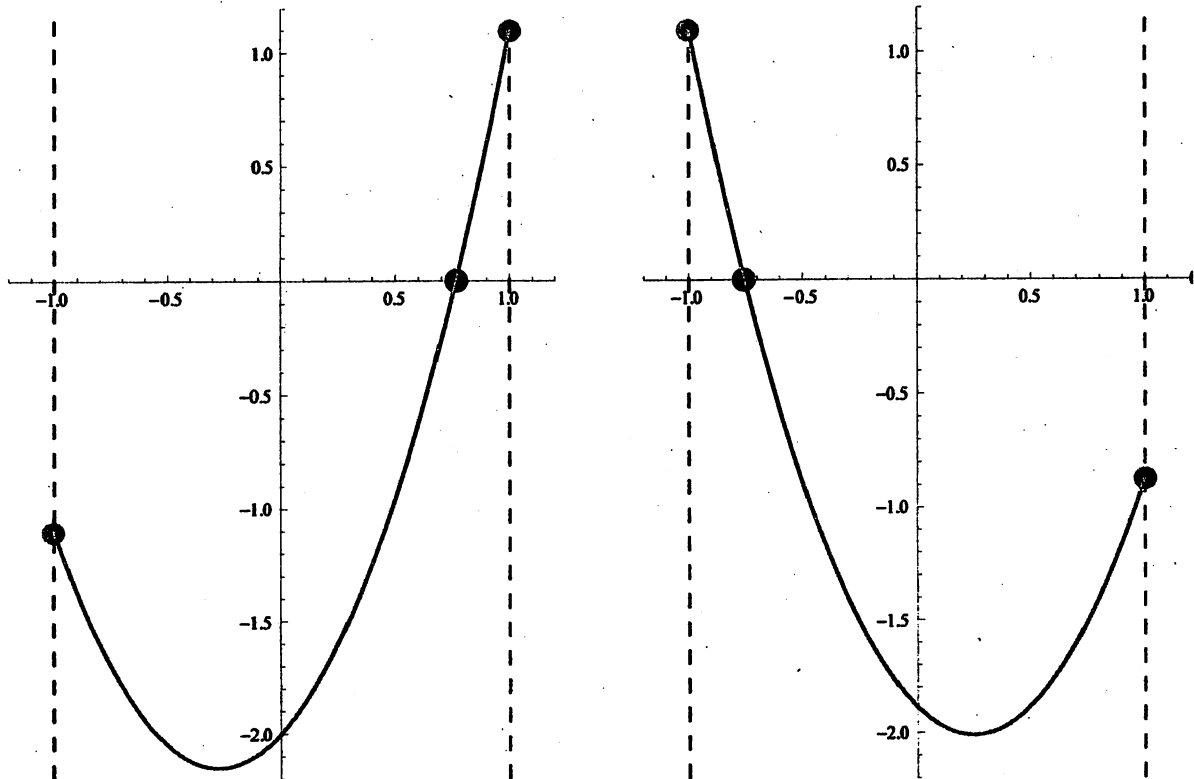


$$2 + a + b - 1 = 0 \text{ かつ } 2 - a + b - 1 = 0$$

$$\text{つまり、} b = -a - 1 \text{ かつ } b = a - 1$$

$$a = 0, b = -1 \text{ となり点を表す。}$$

【TypeB】 $-1 < t < 1$ で解 1 個を持つケースについて



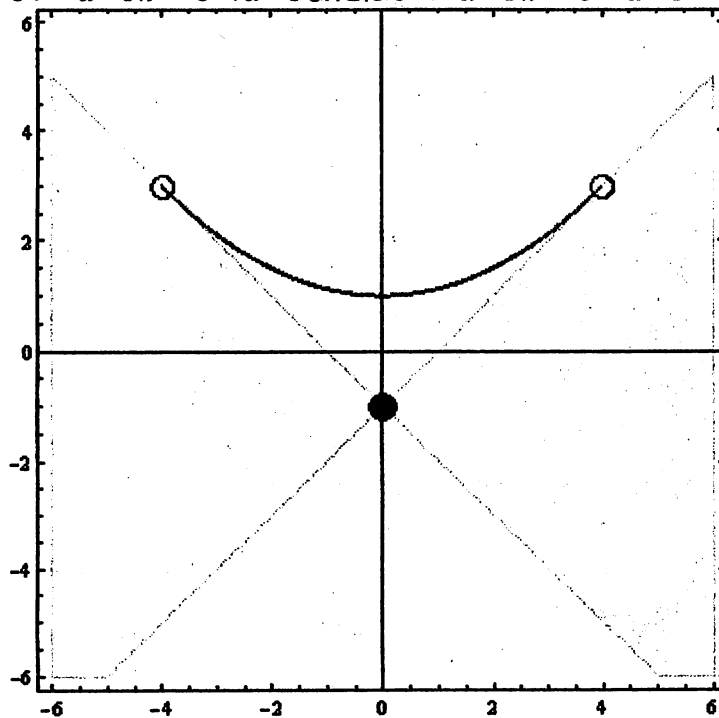
$$f(1)f(-1) < 0$$

$$(b+a+1)(b-a+1) < 0$$

$$\therefore b > -a-1 \text{ かつ } b < a-1 \text{ または } b < -a-1 \text{ かつ } b > a-1$$

$$b = \frac{1}{8}a^2 + 1, -4 < a < 4 \quad a=0, b=-1 \text{ となり点を表す}$$

$$b > -a-1 \text{ かつ } b < a-1 \text{ または } b < -a-1 \text{ かつ } b > a-1$$



2

1から n までの番号が書かれた n 個の箱があり、各々の箱には $2n$ 本のくじが入っている。番号が l の箱には l 本の当たりが入っているとす。この条件で次の(1), (2)を試行する。

(1) 無作為に箱を1つ選ぶ。

(2) (1)で選んだ箱を用いて、くじを1本引いては戻すことを m 回繰り返す。

この試行で k 回当たりくじを引く確率を $p_n(m, k)$ とする。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(2, 0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(2, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(2, 2)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(m, 1)$ を m を用いて表せ。

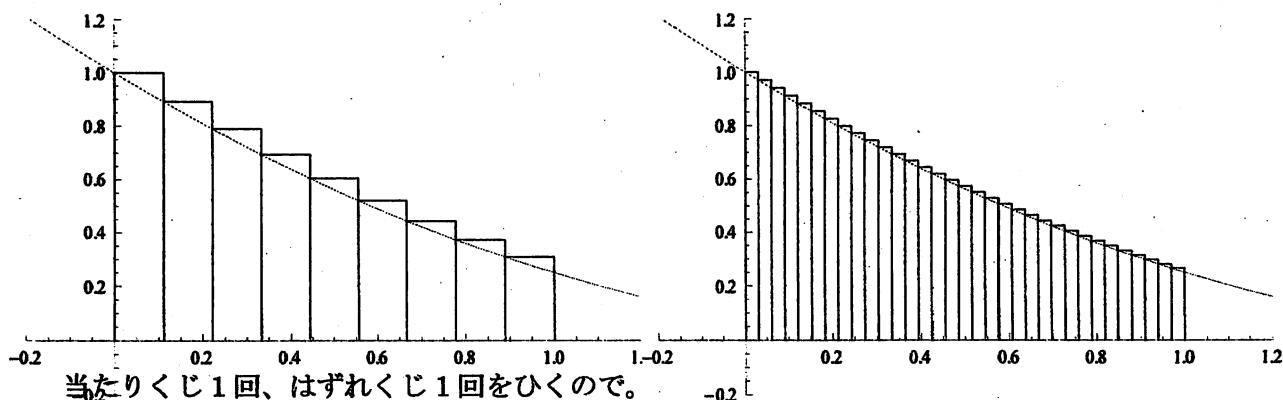
【解答例】

(1) 1から n までの番号が書かれた n 個の箱から、無作為に1つを選ぶ確率は、 $\frac{1}{n}$

番号 l の箱を選ぶ時、箱 l から、当たりくじを引く確率は、 $\frac{l}{2n}$

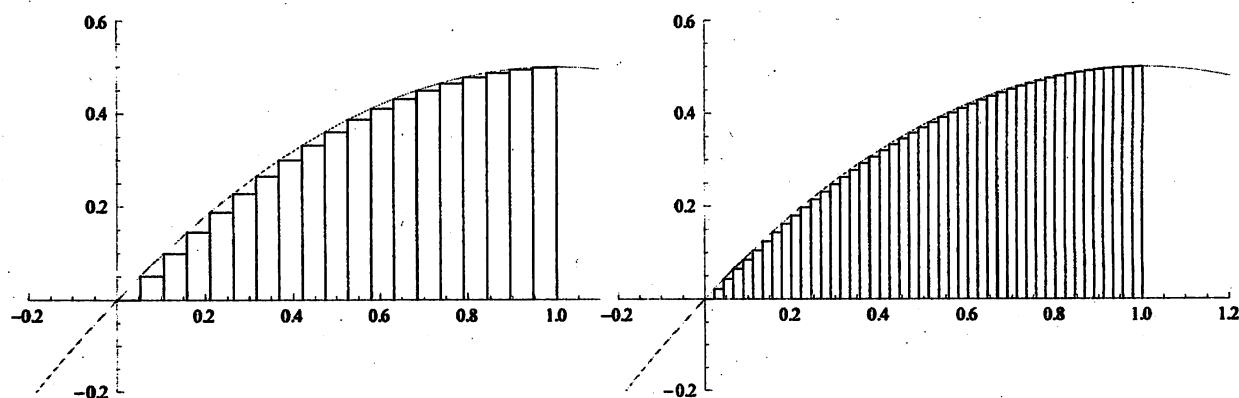
$$p_n(2, 0) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left(1 - \frac{l}{2n}\right)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(2, 0) = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (x-2)^2 dx = \frac{7}{12}$$



$$p_n(2, 1) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n {}_2C_1 \left(1 - \frac{l}{2n}\right) \left(\frac{l}{2n}\right)$$

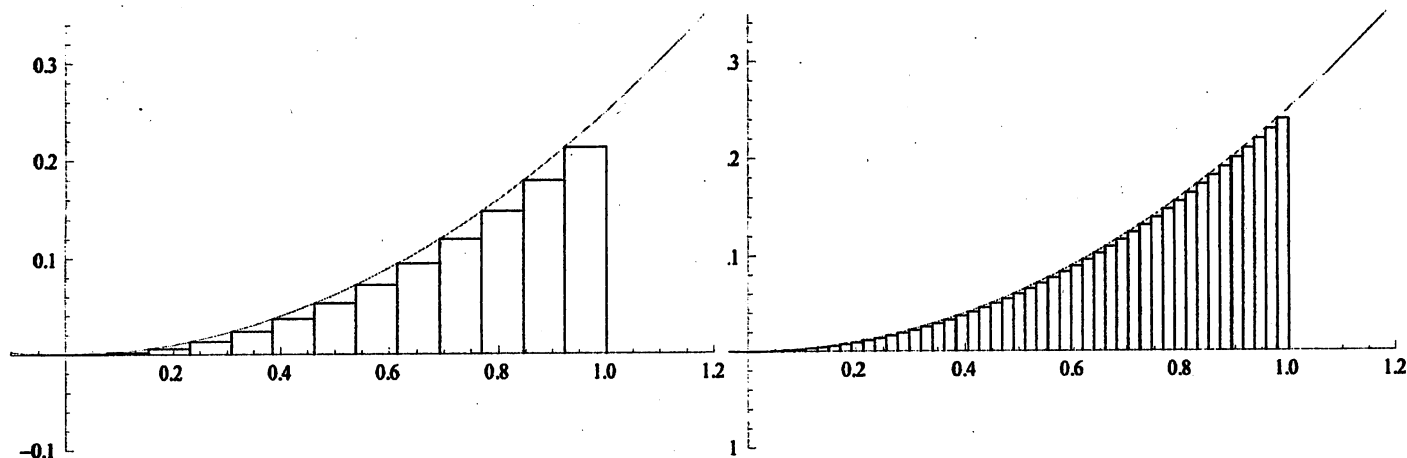
$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(2, 1) = 2 \int_0^1 \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{3}$$



当たりくじ 2 回をひくので。

$$p_n(2,2) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n {}_2C_1 \left(\frac{l}{2n} \right)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(2,2) = \int_0^1 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{12}$$



(2) 1 から n までの番号が書かれた n 個の箱から、無作為に 1 つを選ぶ確率は、 $\frac{1}{n}$

番号 l の箱を選ぶ時

箱 l から、当たりくじを引く確率は、 $\frac{l}{2n}$

$$p_n(m,1) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n {}_mC_1 \left(1 - \frac{l}{2n} \right)^{m-1} \left(\frac{l}{2n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(m,1) = m \int_0^1 \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x}{2} \right)^{m-1} dx$$

$$t = x - \frac{x}{2} \text{ とおくと } dt = -\frac{1}{2} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(m,1) = m \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) t^{m-1} (-2) dt$$

$$= 2m \int_{\frac{1}{2}}^1 (t^{m-1} - t^m) dt = 2m \left[\frac{t^m}{m} - \frac{t^{m+1}}{m+1} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{2^{m+1} - m - 2}{(m+1)2^m}$$

3

a を正の定数, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とし、行列 $X_{a,\theta}$ を

$$X_{a,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

で定義する。また、 E を 2 次の単位行列とする。

- (1) 2 次の正方行列 X が、 $X^2 = E$ を満たし、行列 X の表す 1 次変換は、点 $(1, 0)$ を第 1 象限内に、点 $(1, 0)$ を第 4 象限内に移すとする。このとき行列 X は $X_{a,\theta}$ の形になることを示せ。

- (2) a_1 と a_2 を正の定数、 θ_1 と θ_2 を第 1 象限の角とする。

$A = X_{a_1,\theta_1}$, $B = X_{a_2,\theta_2}$ とするとき $(AB)^2 = E$ となるための条件を $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ を用いて表せ。

【解答例】

(1)

$$X_{a,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ を展開すると、}$$

$$X_{a,\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & a \sin \theta \\ \frac{1}{a} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \cdots (\text{条件 I})$$

$$X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{ とおく}$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} \text{ は、第 1 象限なので、} p > 0, r > 0$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} \text{ は、第 4 象限なので、} q > 0, s > 0$$

$$\text{Hamilton-Cayley の定理より、} X^2 - (p+s)X + (ps-rq)E = 0$$

条件 $X^2 = E$ を代入して、

$$(1+ps-rq)E = (p+s)X$$

(A) $p+s \neq 0$ の場合

$$X = \frac{1+ps-rq}{p+s} E$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+ps-rq}{p+s} & 0 \\ 0 & \frac{1+ps-rq}{p+s} \end{pmatrix}$$

$q=0, r=0$ となるので不適。

(B) $p+s=0$ の場合

$$1+ps-rq=0$$

$$\text{連立方程式} \begin{cases} p+q=0 \\ 1+ps-rq=0 \end{cases} \text{について}$$

$$s=-p$$

$$rq=1-p^2$$

$$r>0, q>0 \text{ より、 } 1-p^2>0$$

$$-1<p<1, p>0 \text{ から } \therefore 0<p<1$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より、 $0<\cos\theta<1$ なので、 $p=\cos\theta$ とおくことができる。

$$p=\cos\theta, s=-\cos\theta$$

$$rq=1-p^2 \text{ より、 } rq=\sin^2\theta$$

$$q=a\sin\theta, r=\frac{1}{a}\sin\theta \text{ とおくことができる。 } X=\begin{pmatrix} \cos\theta & a\sin\theta \\ \frac{1}{a}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ と表示できる。}$$

(2)

$$X_{a,\theta}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ を展開すると、}$$

$$X_{a,\theta}=\begin{pmatrix} \cos\theta & a\sin\theta \\ \frac{1}{a}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \cdots (\text{条件 I}) \text{ より}$$

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & a_1\sin\theta_1 \\ \frac{1}{a_1}\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & a_2\sin\theta_2 \\ \frac{1}{a_2}\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

$$AB=\begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2+\frac{a_1}{a_1}\sin\theta_1\sin\theta_2 & a_2\sin\theta_2\cos\theta_1-a_1\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \frac{1}{a_1}\sin\theta_1\cos\theta_2-\frac{1}{a_2}\sin\theta_2\cos\theta_1 & \frac{a_2}{a_1}\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

Hamilton-Cayley の定理より、

$$(AB)^2-(trAB)AB+\det(AB)E=0$$

$$(AB)^2=E \text{ より、}$$

$$(trAB)AB=(1+\det(AB))E \text{ と表示できる。}$$

$$trAB=2\cos\theta_1\cos\theta_2+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$\det(AB)=1 \text{ から、}$$

$$(trAB)AB=2E$$

$$(trAB)=0 \text{ とすると、 } 2E=0 \text{ となり、不適。 } (trAB)\neq 0$$

AB は対角行列となるので、

$$a_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 - a_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 = 0 \text{ かつ } \frac{1}{a_1} \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \frac{1}{a_2} \sin \theta_2 \cos \theta_1 = 0$$

$$a_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 = a_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 = a_1 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \cdots \textcircled{2}$$

$$a_1 > 0, a_2 > 0, 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}, 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2}$$

$$\tan^2 \theta_1 = \tan^2 \theta_2$$

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2$$

$$\theta_1 = \theta_2 \textcircled{1} \text{へ代入すると、} a_1 = a_2$$

逆に $a_1 = a_2$, $\theta_1 = \theta_2$ のとき

$$trAB = 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right) \sin \theta_1 \sin \theta_2 = 2 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta = 2$$

$$2AB = 2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} = 2E \text{ を満たす。}$$

$$\therefore a_1 = a_2, \theta_1 = \theta_2$$

【補足】この問題の変換行列はどんな変換をするのか？

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{の表す一次変換は、どんな変換をするのか？}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{について}$$

$$a = \frac{7}{10} \text{ の時 (右図} \rightarrow \text{)}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$X = x$$

$$Y = \frac{1}{a} y$$

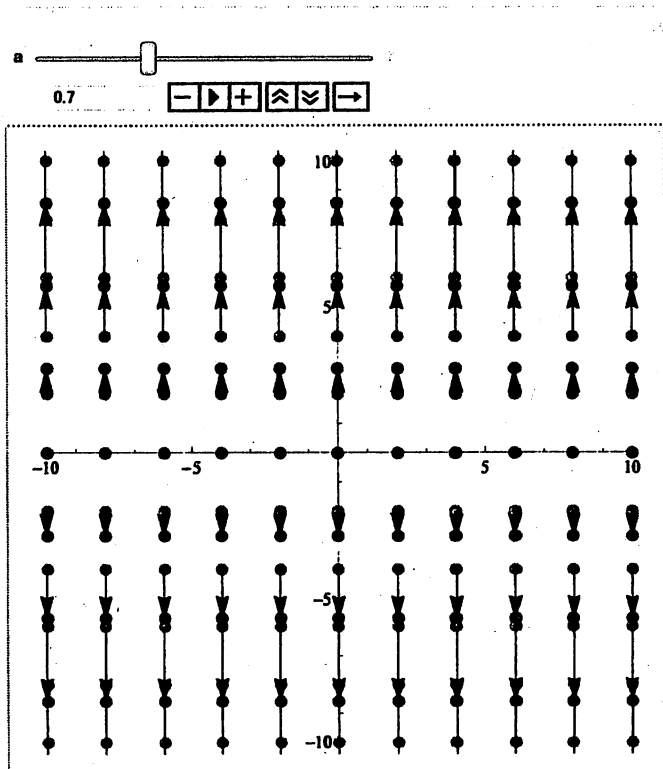
x 成分は変化しないが、
 y 成分は、 a の値の変化
により、変化する。

$a < 1$ のとき右図のように
拡大する。

$a > 1$ のときは縮小する。

$a = 1$ のとき変化なし。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{について}$$



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ から}$$

$$X = x$$

$$Y = \frac{1}{a}y$$

x 成分は変化しないが、 y 成分は、 a の値の変化によ

り、変化する。 $a < 1$ のとき縮小し、 $a > 1$ のときは拡大する。

$a = 1$ のとき変化なし。

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

この変換は原点 O を通り偏角

$$\frac{\theta}{2} \text{ の直線 } y = \tan \frac{\theta}{2} x$$

に関して対称移動する一次変換

P'

である。(右図→)

証明は色々な方法がある。

最も簡単な証明を行う。

$$P(x, y) \text{ を直線 } y = \tan \frac{\theta}{2} x$$

に関して対称移動した点

$$P'(x', y')$$

とすると、 OP, OP' の偏角を

$$\alpha, \beta \text{ とすると、} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\theta}{2}$$

$$\beta = \theta - \alpha$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \beta \\ r \sin \beta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\theta - \alpha) \\ \sin(\theta - \alpha) \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix}$$

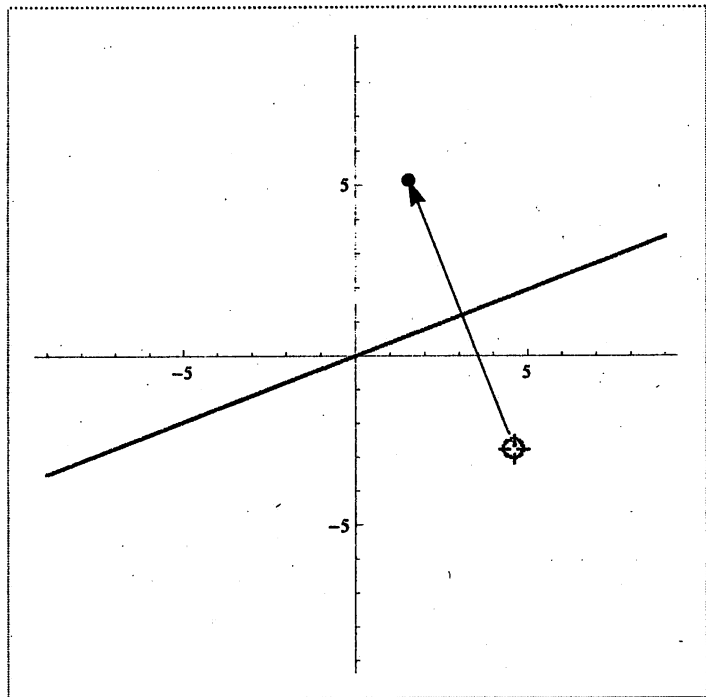
$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

これらの3つの変換を合成した変換

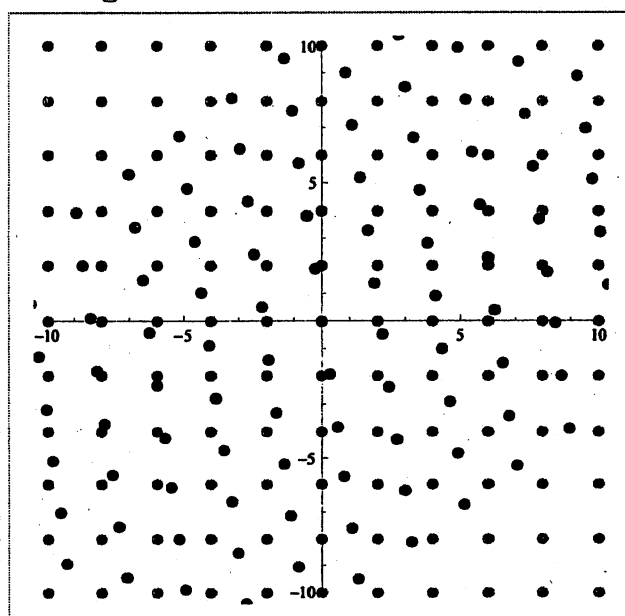
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

は、右図 (→) のような奇妙な
変換を表す。

回転角 $\frac{\theta}{2}$



a θ



4

$0 \leq x \leq a$ で定義された 2 つの関数

$$f(x) = (a-x)e^x$$

$$g(x) = bx^2$$

を考える。ただし、 a, b は定数とし、 a は $1 < a \leq 2$ を満たすとする。さらに 2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $f(x)$ の最大値をとる点で交わるとする。

(1) 曲線 $y = f(x)$ の概形を描け。

(2) b を a を用いて表せ。

(3) 不定積分 $\int xe^{2x} dx$ を求めよ。

(4) 2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ および x 軸で囲まれる図形を x 軸の周りに一回転させてできる回転体の体積を a を用いて表せ。

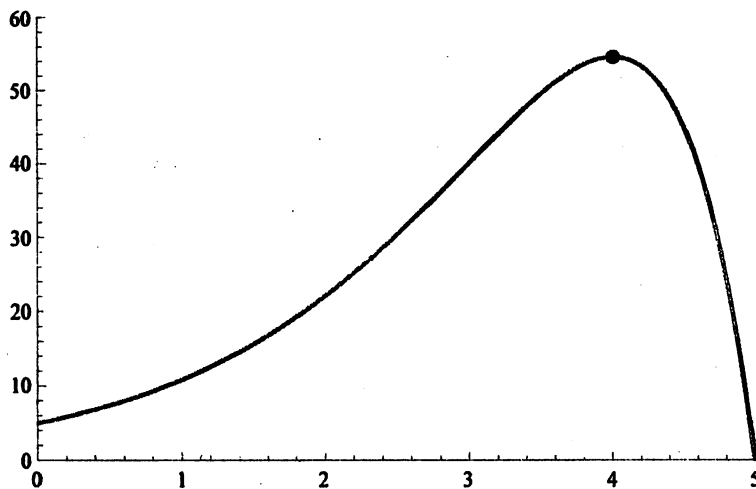
【解答例】

(1) $0 \leq x \leq a$ で定義された関数 $f(x) = (a-x)e^x$, $1 < a \leq 2$

$f'(x) = -(x+1-a)e^x$ $f'(x) = 0$ のとき、 $x = a-1$ で極大値 e^{a-1} をとる。

$f''(x) = 0$ のとき、 $x = a-2$

x	0	...	$a-2$	...	$a-1$	...	a
$f'(x)$		+	+	+	0	-	
$f''(x)$		+	0	-	-	-	
$f(x)$	a	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	e^{a-1}	$\searrow$	0



(2)

$g(x) = bx^2$ が点 $(a-1, e^{a-1})$ を通るので、 $e^{a-1} = b(a-1)^2$

$$b = \frac{e^{a-1}}{(a-1)^2}$$

(3)

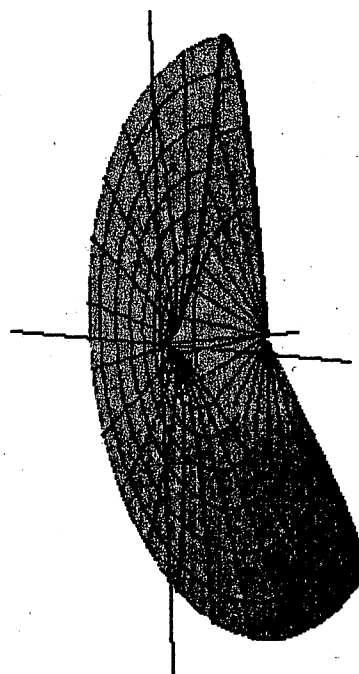
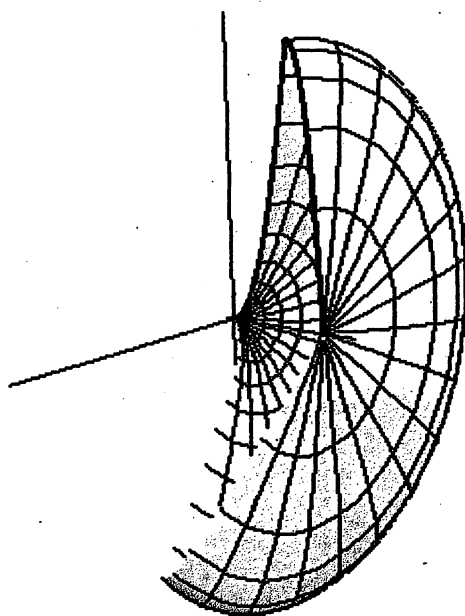
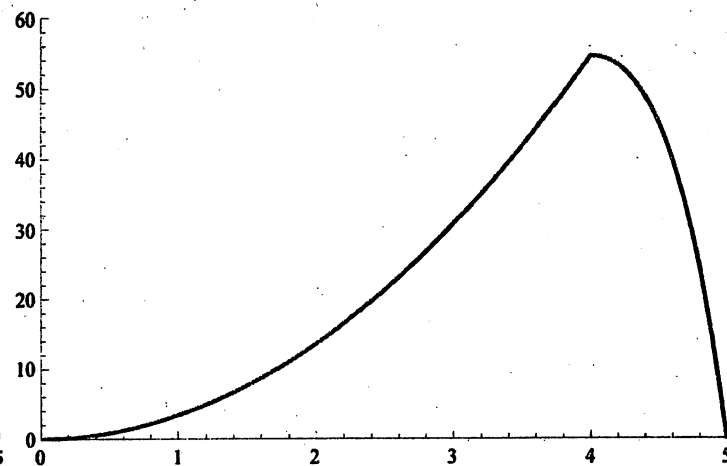
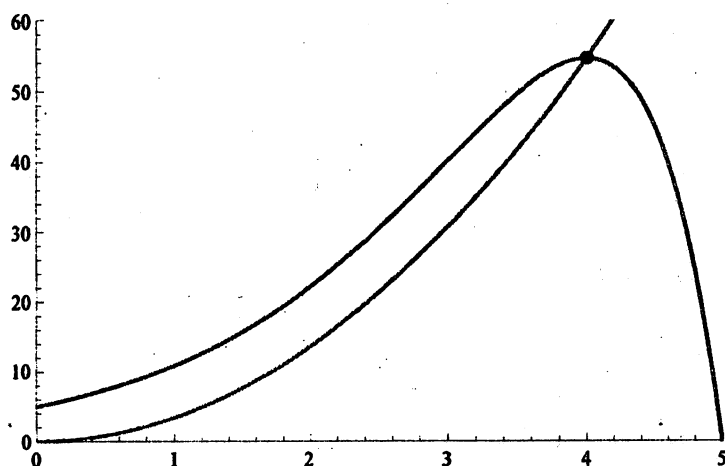
部分積分法により

$$\int x e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{2x} + C \quad C \text{ は積分定数}$$

(4)

回転体の体積を求める $\pi \int_0^{a-1} b^2 x^4 dx + \pi \int_{a-1}^a (a-x)^2 e^{2x} dx \quad b = \frac{e^{a-1}}{(a-1)^2} \text{ より}$

$$= \frac{1}{20} e^{2a-2} (5e^2 + 4a - 29) \pi$$



6

四面体OABCにおいて、4つの面はすべて合同であり、 $OA=3$, $OB=\sqrt{7}$, $AB=2$ であるとする。また、3点O, A, Bを含む平面をLとする。

(1) 点Cから平面Lにおろした垂線の足をHとおく。 $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(2) $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して、線分OA, OB各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P, Q とおく。2点 P, Q を通り、平面Lに垂直な平面をMとすると、平面Mによる四面体OABCの切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $S(t)$ の最大値を求めよ。

【解答例】

(1)

$$BC=3, AC=\sqrt{7}, OC=2$$

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c} \text{ とおくと、}$$

$$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=\sqrt{7}, |\vec{c}|=2$$

$$AB=2 \text{ より } |\vec{AB}|^2=4$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=4$$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 4$$

$$7 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 9 = 4$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = 6$$

4つの面はすべて合同であるので、 $BC=3$, $CA=7$, となるので以下同様にして

$$BC=3 \text{ より } |\vec{BC}|^2=9$$

$$|\vec{c}-\vec{b}|^2=9$$

$$|\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2 = 9$$

$$4 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 7 = 9$$

$$\therefore \vec{b}\cdot\vec{c} = 1$$

$$AC=\sqrt{7} \text{ より } |\vec{CA}|^2=7$$

$$|\vec{a}-\vec{c}|^2=7$$

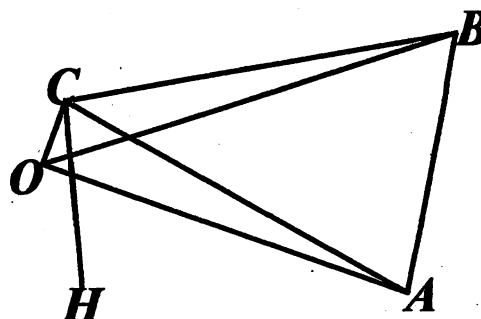
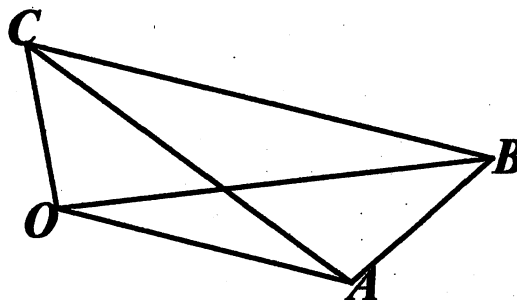
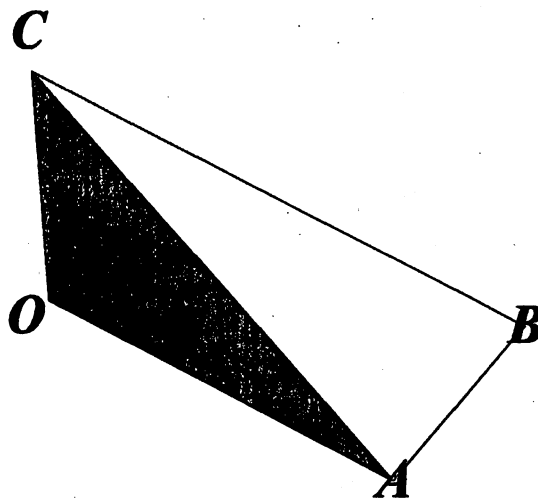
$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} + |\vec{c}|^2 = 7$$

$$9 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} + 4 = 7$$

$$\therefore \vec{c}\cdot\vec{a} = 3$$

$$\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b} \text{ とおくと}$$

$$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{a}=0 \text{ かつ } \overrightarrow{CH}\cdot\vec{b}=0 \text{ から連立方程式}$$



$$(s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0$$

$$(s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0$$

$$\begin{cases} 9s + 6t = 3 \\ 6s + 7t = 1 \end{cases}$$

$$s = \frac{5}{9}, t = -\frac{1}{3}$$

$$\vec{OH} = \frac{5}{9}\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB}$$

(2)

直線 P_1Q_1 上の点を X とすると

$$\vec{OX} = \alpha\vec{OP_1} + (1-\alpha)\vec{OQ_1} \quad (0 < \alpha < 1) \text{ と}$$

$$\vec{OX} = \alpha t\vec{OA} + (t - \alpha t)\vec{OB}$$

前問 (1) より $\vec{OH} = \frac{5}{9}\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB}$ なので

点 H が直線 P_1Q_1 上に存在するとき、 X と H が一致するとき H

$$\alpha t\vec{OA} + (t - \alpha t)\vec{OB} = \frac{5}{9}\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB} = \vec{OH}$$

$\vec{OA}, \vec{OB}$ は一次独立なので、

$$\alpha t = \frac{5}{9}, t - \alpha t = -\frac{1}{3}$$

$$t = \frac{2}{9}$$

(i) $0 < t \leq \frac{2}{9}$ のとき

切断面は、 $\triangle CP_2Q_2$ と相似な三角形で、相似比は $t: \frac{2}{9}$

$$S(t) = \left(\frac{9t}{2}\right)^2 \times S\left(\frac{2}{9}\right)$$

$$\vec{CH} = \vec{OH} - \vec{OC}$$

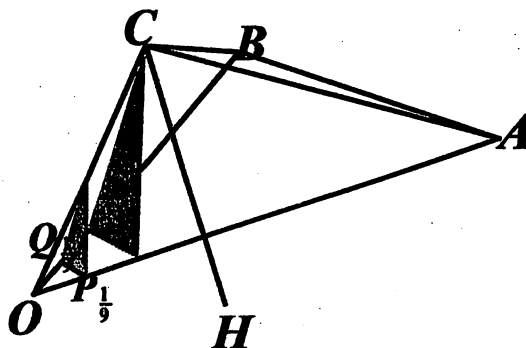
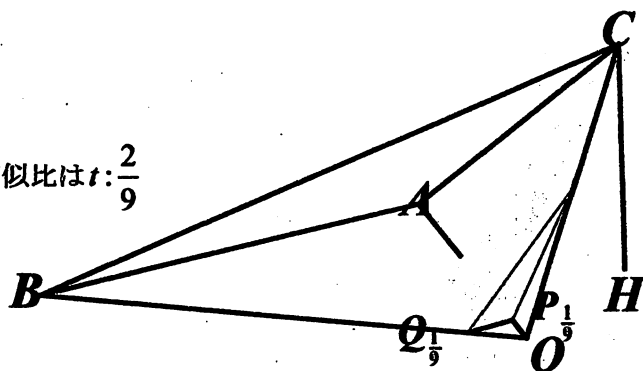
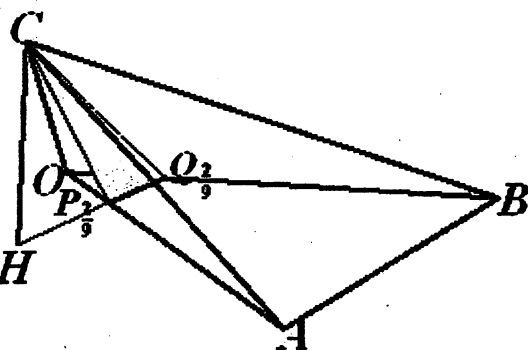
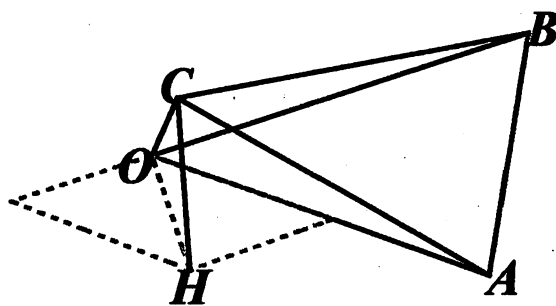
$$|\vec{CH}|^2 = \left|\frac{5}{9}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right|^2 = \frac{8}{3}$$

$$|\vec{CH}| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$P_2Q_2 = \frac{2}{9}AB = \frac{4}{9}$$

$$S\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{2}P_2Q_2 \times |\vec{CH}| = 2 \times \frac{4}{9} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$S(t) = 3\sqrt{6}t^2$$



(ii) $\frac{2}{9} \leq t < 1$ のとき

切断面は台形 $P_i Q_i R_i S_i$

$$P_i Q_i = tAB = 2t$$

$\triangle ABC$ において

$S_i R_i$ と AB は平行なので

$$S_i R_i : AB = CS_i : CA = \frac{P_2 P_i}{\frac{2}{9}} : \frac{P_2 A}{\frac{2}{9}}$$

$$= t - \frac{2}{9} : \frac{7}{9} = 9t - 2 : 7$$

$$S_i R_i = 2 \times \frac{9t - 2}{7}$$

高さを h とすると、

$$h : CH = AU_i : AH = AP_i : AP_2 = 1 - t : \frac{7}{9}$$

$$h = \frac{9}{7}(1 - t)CH = \frac{6\sqrt{6}}{7}(1 - t)$$

$$S(t) = \frac{1}{2} \left(2t + \frac{9t - 2}{7} \times 2 \right) \times \frac{6\sqrt{6}}{7} \times (1 - t)$$

$$S(t) = \frac{12\sqrt{6}}{49}(8t - 1)(1 - t)$$

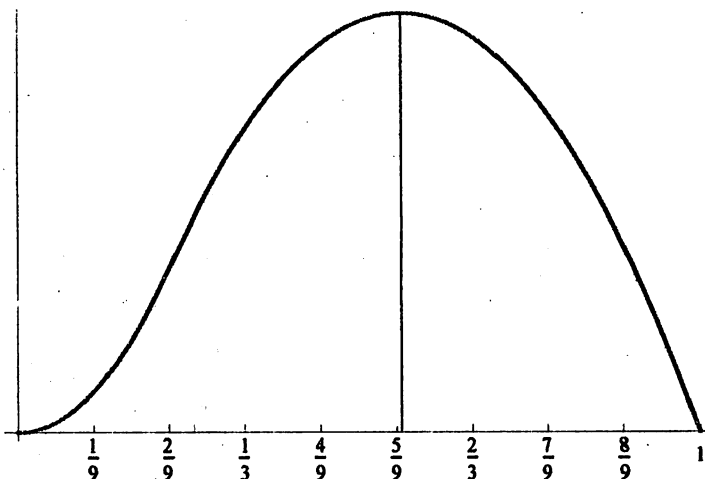
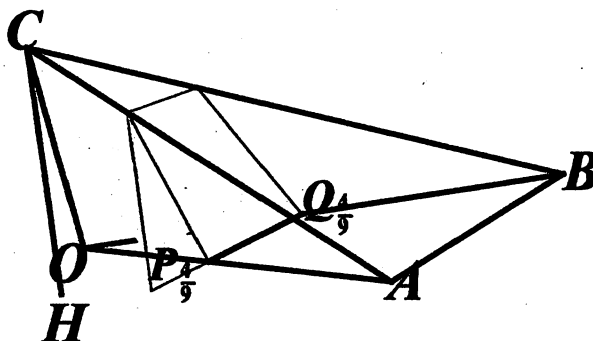
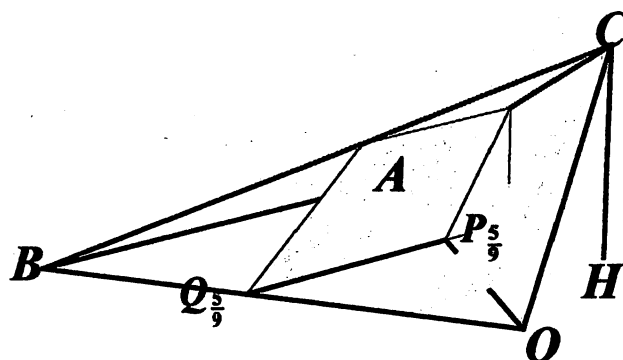
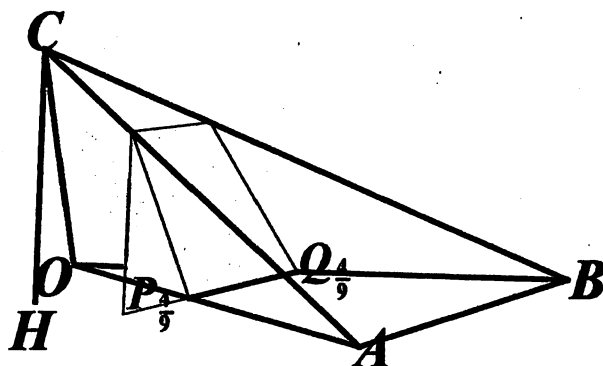
(3)

$$0 < t \leq \frac{2}{9} \text{ のとき } S(t) = 3\sqrt{6}t^2$$

$$\frac{2}{9} \leq t < 1 \text{ のとき } S(t) = \frac{12\sqrt{6}}{49}(8t - 1)(1 - t)$$

右図より

$$t = \frac{9}{16} \text{ のとき最大値 } \frac{3}{8}\sqrt{6}$$



第1話 断面を分析する技術

Exercise 1 2003 年信州大学・工学部

xy 平面内の放物線 $y = x^2 - 2x - 1$ と直線 $y = -x + 1$ で囲まれた部分を底面とし、 x 軸に垂直な平面で切り口がつねに正三角形であるような右図の概形をもつ立体の体積を求めよ。

[解答例]

Step 1 ; 断面積を求める。

$$y = x^2 - 2x - 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -x + 1 \cdots \textcircled{2} \quad \text{の交点を求める。}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 1 - x \text{ を解くと } x = -1, 2$$

$$P(x, x^2 - 2x - 1)$$

$$Q(x, 1 - x)$$

PQ を 1 辺とする正三角形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3}}{4} PQ^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \{x^2 - 2x - 1 - (1 - x)\}^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \{(x+1)(x-2)\}^2 \end{aligned}$$

Step 2 ; 断面積を積分すると体積を求めることができる。

ベータ関数

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (b-a)^{m+n+1}$$

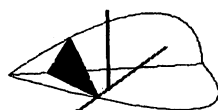
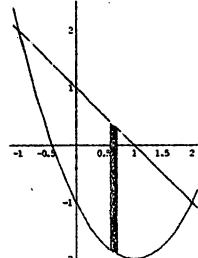
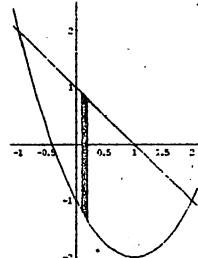
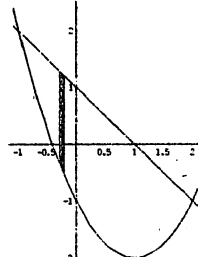
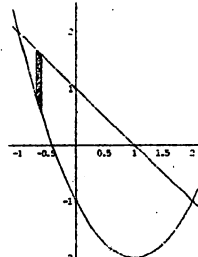
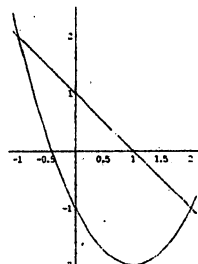
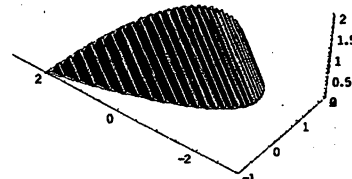
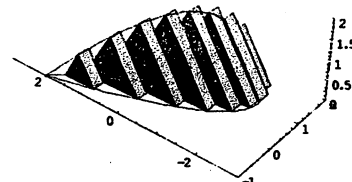
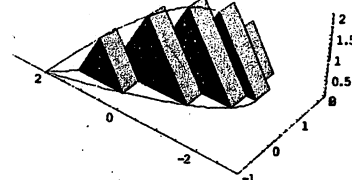
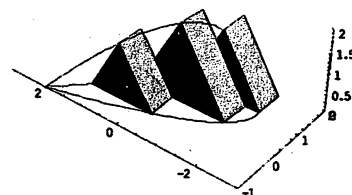
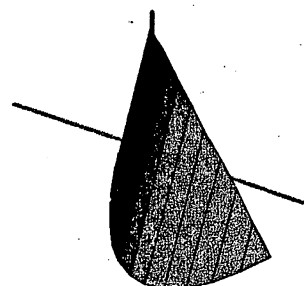
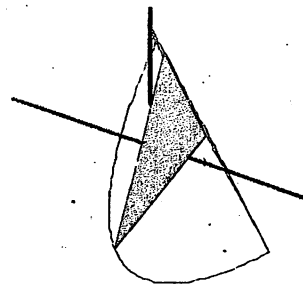
$$V = \int_{-1}^2 S dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{-1}^2 (x+1)^2 (x-2)^2 dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{2!2!}{(2+2+1)!} (2+1)^{2+2+1}$$

$$= \frac{81\sqrt{3}}{40} \cdots (\text{答})$$

断面積を積分すると体積になる。



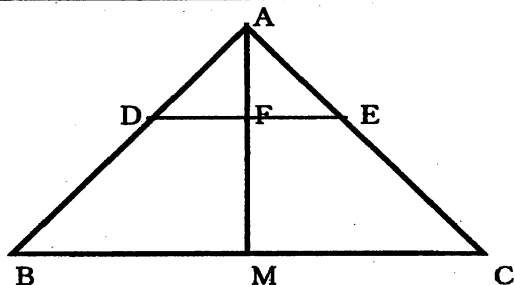
Exercise 2 2004 年札幌医科大学

次のような直円柱Kと三角形ABCを考える。

直円柱Kは底面の円の半径1、高さが2である。三角形ABCは $AB=AC$ の二等辺三角形であり、辺BCの中点をM、 $AM=MC=2$ とする。また点D,Eはそれぞれ辺AB、AC上を $AD=AE$ を保ちながら動くとする。三角形ABCを直円柱Kの側面に辺AMが母線、辺BCが底面の周の一部となるようにはり、線分DEが通過してできる曲面によりこの直円柱を二つの立体に分ける(下図参照)。このとき、点Mを含むほうの立体の体積を求めよ。

[解答例]

Point 1 ; 右図立体を底面に水平に切断する方法



線分DEと線分AMの交点をFとする。三角形ABCを直円柱に巻きつける。

上図の三角形ADEにおいて、 $DF=\theta$ とおくと

右上図の直円柱を真上から見た切断面(右図)において、弧 $DF=\theta$ となり、扇形ODFの中心角、 $\angle DOF=\theta$

(i) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

扇形ODEの面積 $=\theta$, $\triangle ODE$ の面積 $=\frac{1}{2}\sin 2\theta$

切断面の面積 $S(\theta)=\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$

(ii) $\frac{\pi}{2} < \theta < 2$ のとき

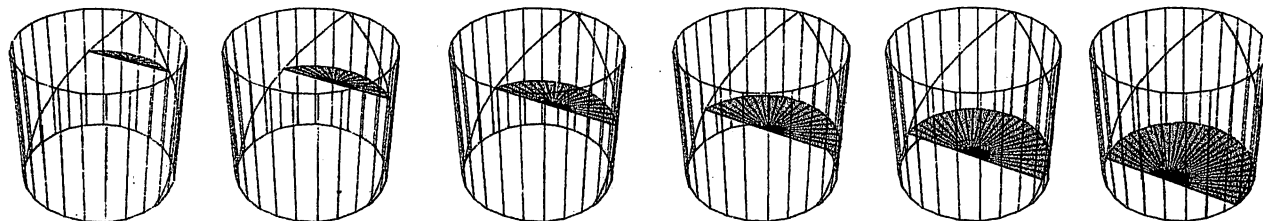
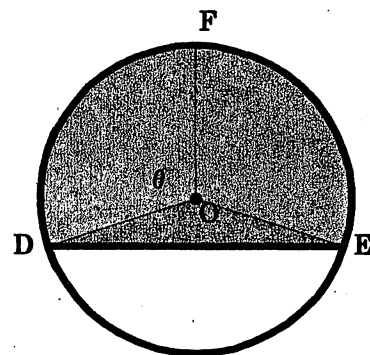
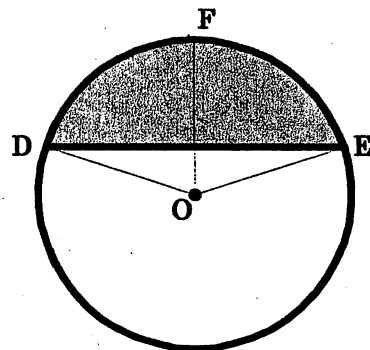
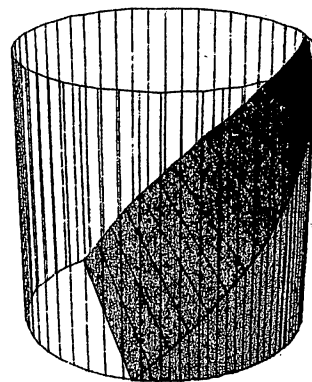
扇形ODEの面積 $=\theta$, $\angle DOE=2\pi-2\theta$

$\triangle ODE$ の面積 $=\frac{1}{2}\sin(2\pi-2\theta)=-\frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\triangle$ 切断面の面積 $S(\theta)=\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$

(i) (ii) の場合も断面積は $S(\theta)=\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \right) d\theta = \left[\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{4}\cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7+\cos 4}{4}$$



Exercise 3 札幌医科大学2003

Oを原点とするxyz座標空間内に $A\left(\frac{2}{3}, 0, 0\right)$ があり、Pは線分OA上の点とする。次の手順で正三角形SQRを作る。

xy平面上において、Pを通りy軸に平行な直線と放物線 $x = \frac{2}{3} - y^2$ との交点をQ, Rとする。

線分QRを一边とする正三角形SQRをxy平面に垂直な平面より 45° だけx軸の負方向へ傾けて作る。ただし、Qのy座標が0以下、Sのz座標が0以上となるようにQ, R, Sは定める。

(1) 正三角形SQRがyz平面と共有点をもつときの、Pのx座標の範囲を $0 \leq x \leq a$ とする。aを求めよ。

(2) PがAからOまで動くとき、正三角形SQRが通過するyz平面上的部分の面積を求めよ。

[解答例] (1)

Step 1 正三角形SQRの1辺の長さを求める。

線分OA上の点 $P(t, 0, 0)$ ($0 \leq t \leq \frac{2}{3}$)とおくと、 $x = \frac{2}{3} - y^2 \sim x = t$ を代

入し、 $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3} - t}$ $P(t, 0, 0), Q\left(t, -\sqrt{\frac{2}{3} - t}, 0\right), R\left(t, \sqrt{\frac{2}{3} - t}, 0\right)$

正三角形SQRの1辺の長さ $QR = 2\sqrt{\frac{2}{3} - t}$ ($0 \leq t \leq \frac{2}{3}$)

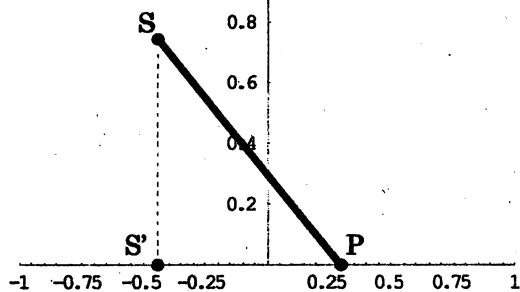
Step 2 正三角形SQRの点Sの座標を求める。

$SP = \sqrt{3}PR \sim PR = \frac{1}{2}QR = \sqrt{\frac{2}{3} - t}$ を代入し $SP = \sqrt{2 - 3t}$

点Sからx軸へ垂線を下ろし点 S' とする。 $\angle SPO = 45^\circ$ より

$S'P = SP \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2 - 3t} = \sqrt{1 - \frac{3}{2}t}$

$OS' = OP - S'P = t - \sqrt{1 - \frac{3}{2}t}$ $S\left(t - \sqrt{1 - \frac{3}{2}t}, 0, \sqrt{1 - \frac{3}{2}t}\right)$



Step 3 点Sのx成分がマイナスになる範囲を求める。

正三角形SQRがyz平面と共有点をもつ

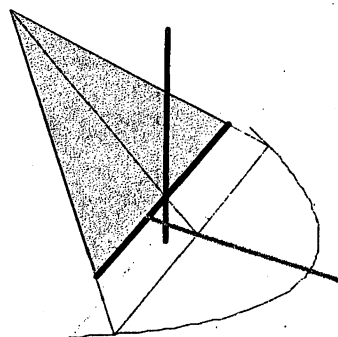
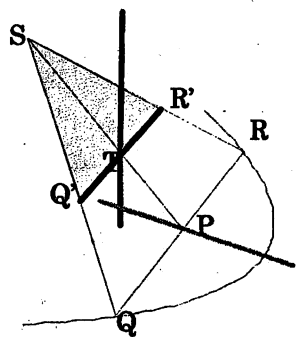
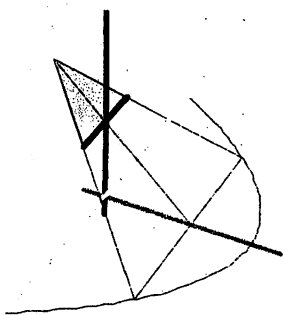
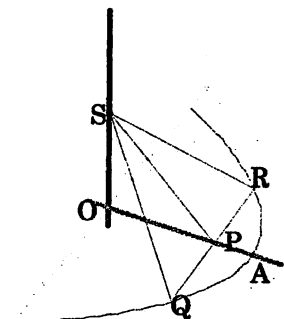


点Sのx成分が負になる

$t - \sqrt{1 - \frac{3}{2}t} \leq 0$, $0 \leq t \leq \frac{2}{3}$ の共通部分の範囲を求める。 $t \leq \sqrt{1 - \frac{3}{2}t}$

$t^2 \leq 1 - \frac{3}{2}t$

$2t^2 + 3t - 2 < 0$

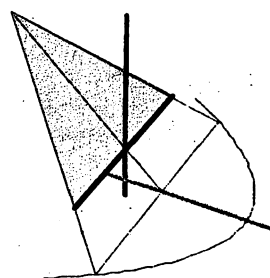
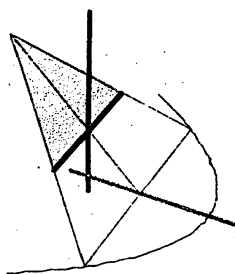
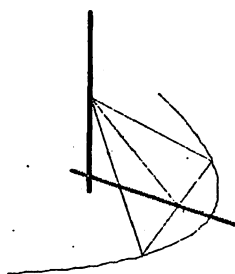
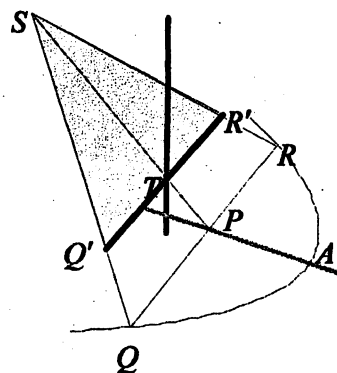
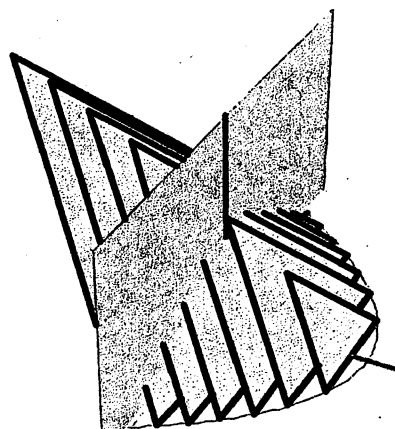
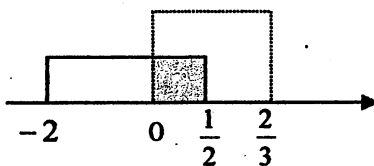


$$(2t-1)(t+2) \leq 0$$

$$-2 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$0 \leq t \leq \frac{2}{3}$ との共通部分を求めると

$$0 \leq t \leq \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad a = \frac{1}{2} \dots (\text{答})$$



(2)

Step 1 線分 $Q'R'$ の長さを t で表示する。

正三角形 SQR において、

$$SP = \sqrt{2-3t}, TP = \sqrt{2}t \text{ より}$$

$$ST = \sqrt{2-3t} - \sqrt{2}t$$

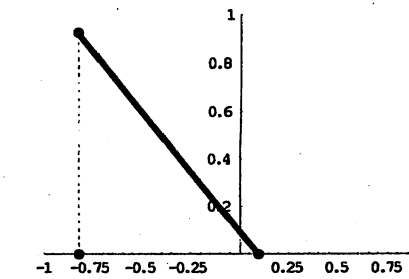
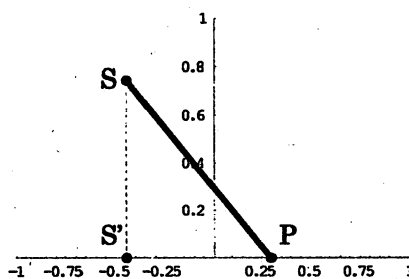
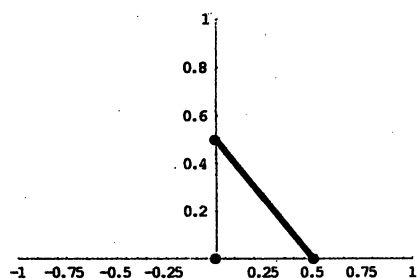
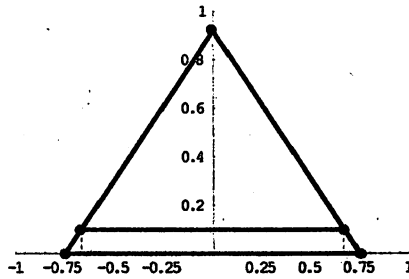
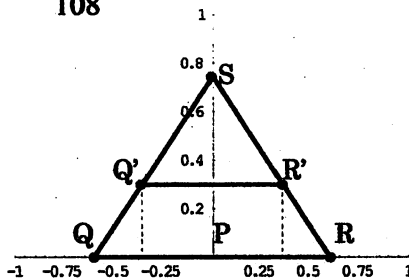
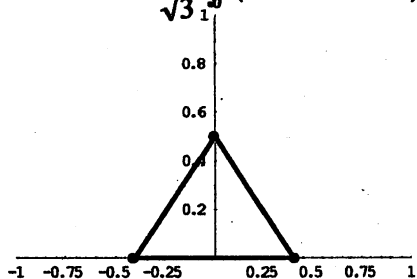
三角形 STR' は直角三角形であるから

$$TR' = ST \times \tan 30^\circ$$

$$TR' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2-3t} - \sqrt{2}t) \quad Q'R' = \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{2-3t} - \sqrt{2}t)$$

Step 2 正三角形 SQR が通過する yz 平面上の部分の面積を求める。

$$\text{求める面積} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2-3t} - \sqrt{2}t) dt = \frac{19\sqrt{6}}{108} \dots (\text{答})$$



Exercise 4 回転体の体積 2003 年中部大学

曲線 $y = e^{-x} \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

[解答例]

回転体の体積の公式

$y = f(x)$ のグラフと $x = a, x = b$ ($a < b$) で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできた立体の体積 V

$$V = \int_a^b \pi \{f(x)\}^2 dx$$

$$V = \int_0^\pi \pi (e^{-x} \sin x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^\pi e^{-2x} \sin^2 x dx$$

$$= \pi \int_0^\pi e^{-2x} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^\pi e^{-2x} dx - \int_0^\pi e^{-2x} \cos 2x dx \right) \dots (A)$$

倍角公式

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \text{ より}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$\int_0^\pi e^{-2x} \cos 2x$ の計算方法

$$(e^{-2x} \cos 2x)' = -2e^{-2x} \cos 2x - 2e^{-2x} \sin 2x \dots ①$$

$$(e^{-2x} \sin 2x)' = -2e^{-2x} \sin 2x + 2e^{-2x} \cos 2x \dots ②$$

②-①

$$4e^{-2x} \cos 2x = (e^{-2x} \sin 2x - e^{-2x} \cos 2x)'$$

$$e^{-2x} \cos 2x = \frac{1}{4} (e^{-2x} \sin 2x - e^{-2x} \cos 2x)'$$

$$\int_0^\pi e^{-2x} \cos 2x dx = \frac{1}{4} \int_0^\pi (e^{-2x} \sin 2x - e^{-2x} \cos 2x) dx$$

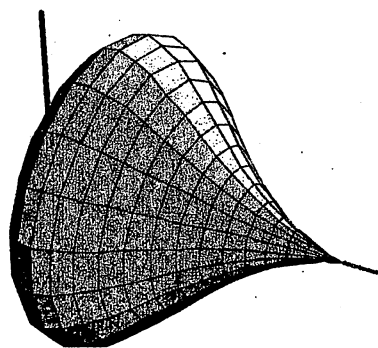
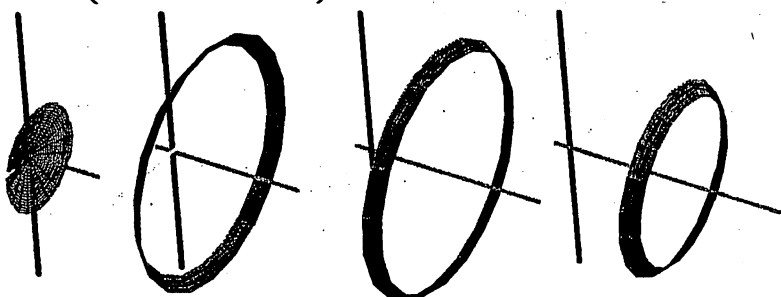
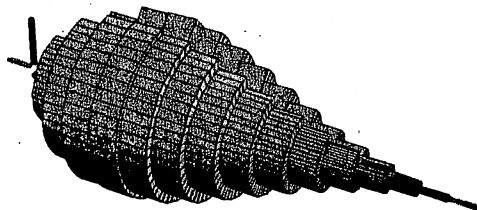
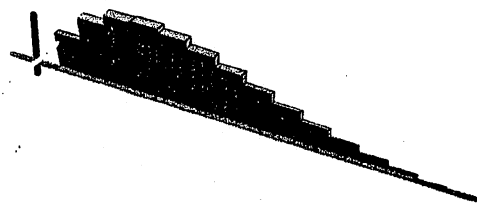
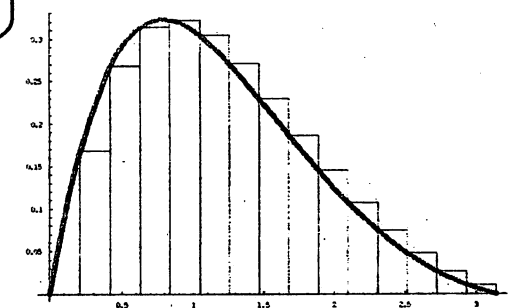
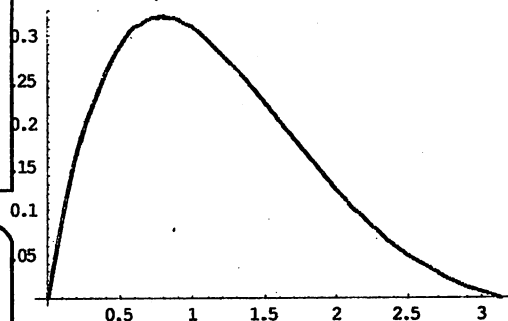
$$= \left[\frac{e^{-2x} \sin 2x - e^{-2x} \cos 2x}{4} \right]_0^\pi = \frac{1 - e^{-2\pi}}{4} \dots ③$$

$$\int_0^\pi e^{-2x} dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^\pi = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2} \dots ④$$

③④を (A) へ代入して

$$(A) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 - e^{-2\pi}}{2} - \frac{1 - e^{-2\pi}}{4} \right) = \frac{1 - e^{-2\pi}}{8} \pi \dots (\text{答})$$

「玉ねぎ」の体積



Exercise 5 回転体の体積 2003 年東京理科大学理工

2つの曲線 $C_1: y = \sin x$, $C_2: y = \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) を考える。

(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ。

(2) C_1 と C_2 で囲まれた図形の $y \geq 0$ にある部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

【解答例】

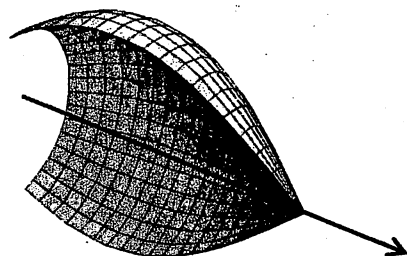
(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標は、 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

(2) 求める立体は右の太線の部分を x 軸のまわりに回転させたものである。

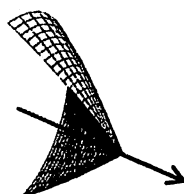
$y = \sin x$ の $\frac{\pi}{4}$ から π までを x 軸のまわりに回転させた立体 Fig - 1

$y = \cos x$ の $\frac{\pi}{4}$ から $\frac{\pi}{2}$ までを x 軸のまわりに回転させた立体 Fig - 2

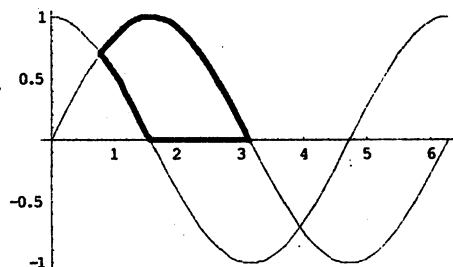
【Fig-1 の体積】 - 【Fig-2 の体積】 = 【求める立体の体積】



【Fig - 1】



【Fig - 2】



$$\text{求める立体の体積} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \pi \sin^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos^2 x dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (1 - \cos 2x) dx - \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

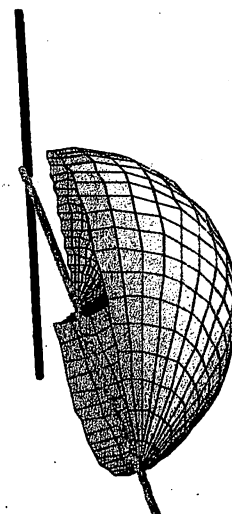
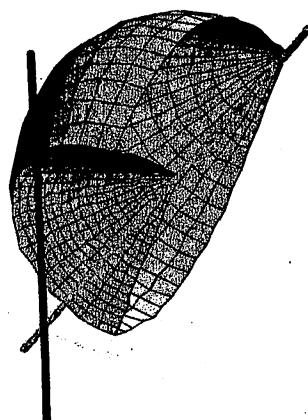
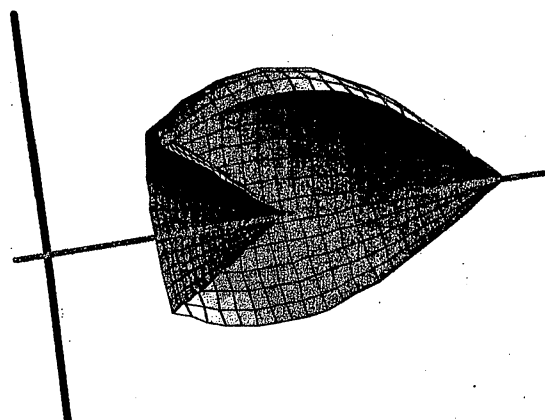
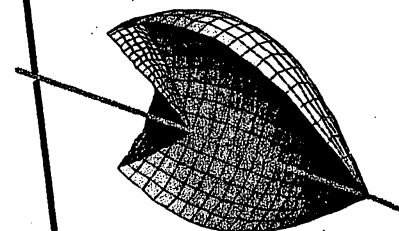
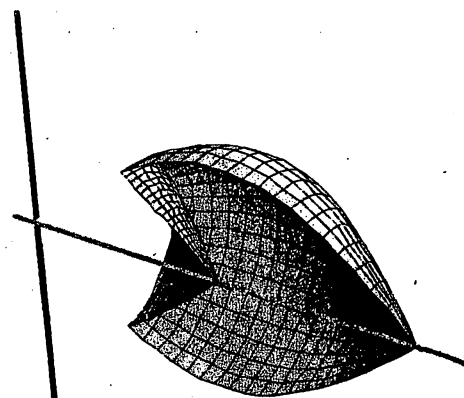
$$= \frac{3}{8} \pi^2 + \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{8} \pi^2 + \frac{1}{4} \pi$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} \dots (\text{答})$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

を活用せよ。

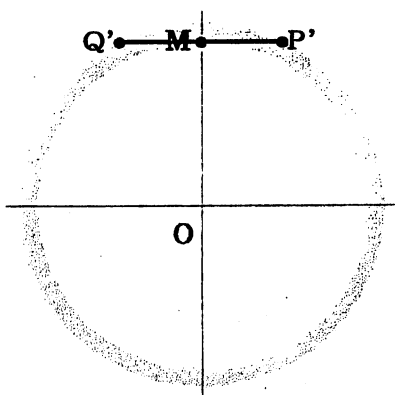
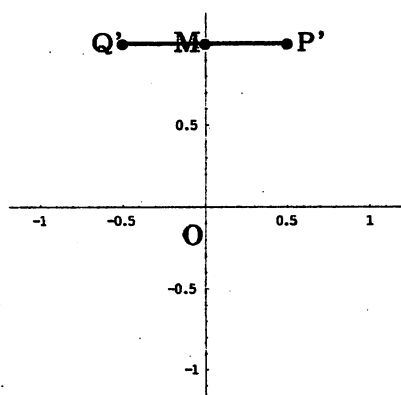


Exercise 6 三角形の回転問題

空間内に、3点 $P\left(1, \frac{1}{2}, 0\right), Q\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right), R\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ を頂点とする正三角形の板 S がある。 S を z 軸のまわりに1回転させたとき、 S が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ。

〔解答例〕

z 軸に垂直な平面 $z=t \left(0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ で正三角形 S を切断し切断面を考える。線分 $P'Q'$ を z 軸の回りに回転すると、ドーナツ状の断面が完成する。



$$\text{ドーナツ状断面積} = \pi OP'^2 - \pi OM'^2 = \pi (OP'^2 - OM'^2)$$

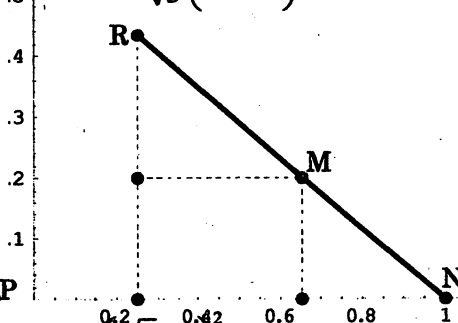
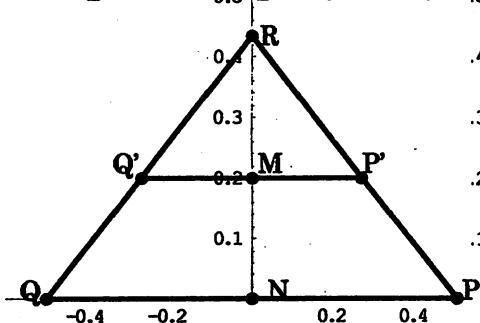
ピタゴラスの定理 $OP'^2 = OM'^2 + MP'^2$ により

$$\text{ドーナツ状断面積} = \pi MP'^2 \dots \textcircled{1}$$

三角形の相似比を利用する $MP':NP = RM:RN = \frac{\sqrt{3}}{4} - t : \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$NP = \frac{1}{2} \text{ より } MP' : \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - t : \frac{\sqrt{3}}{4}$$

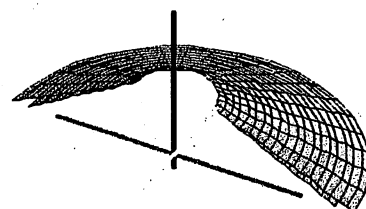
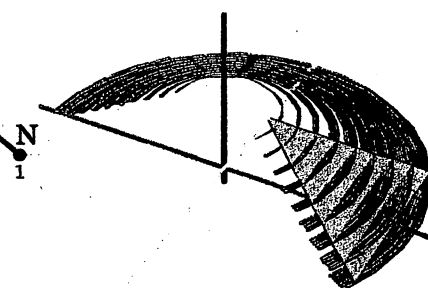
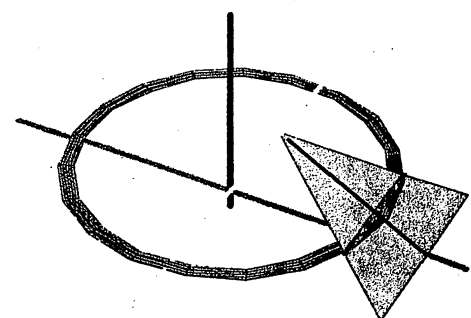
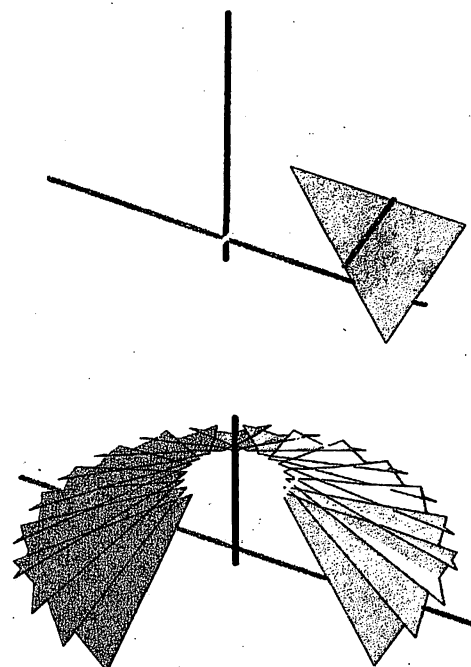
$$MP' = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - t \right)$$



$$\text{ドーナツ状の断面積 } S(t) \text{ とすると } S(t) = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - t \right)^2$$

t の動く範囲が $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$ より、求める体積 V は

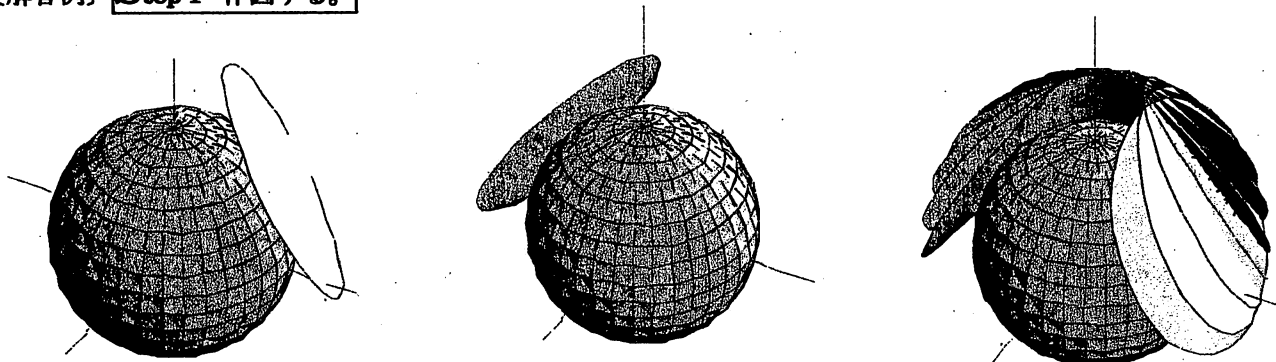
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} S(t) dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - t \right)^2 dt = \frac{4}{3} \pi \left[\frac{1}{3} \left(t - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{48} \pi \dots (\text{答}) \end{aligned}$$



Exercise 7 円盤の回転に関する問題

z 軸上の点 $A(0,0,2)$ を通る平面 α が、原点 O を中心とする半径 1 の球面に接しながら 1 周する (接点を P とすると $OP \perp \alpha$)。このとき、接点 P を中心とする平面 α 上の半径 1 の円盤が通過する部分を F とする。 F の体積を求めよ。

[解答例] Step 1 作図する。



Step 2 回転軸に垂直な平面 $z=t$ による円盤を切断する。

断面積を $S(t)$ とする。

$$S(t) = \pi(TB^2 - TC^2) \dots \textcircled{1}$$

Step 3 TC と TB を求める。

$$OT = t$$

$$AT = 2 - t, \tan 30^\circ = \frac{TC}{AT} \text{ より}$$

$$TC = (2 - t) \frac{1}{\sqrt{3}} \dots \textcircled{2}$$

$\triangle OTB$ は直角三角形より

$$TB^2 + OT^2 = OB^2$$

$$TB^2 = OB^2 - OT^2 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \textcircled{4} \text{ より } TB^2 = 2 - t^2 \dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{2} \textcircled{5}$ より

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi(TB^2 - TC^2) \\ &= \pi \left(-\frac{4}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + \frac{2}{3} \right) \\ &= -\frac{4}{3}\pi \left(t^2 - t - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

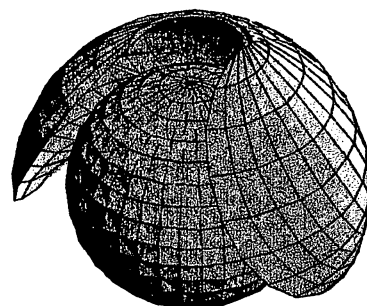
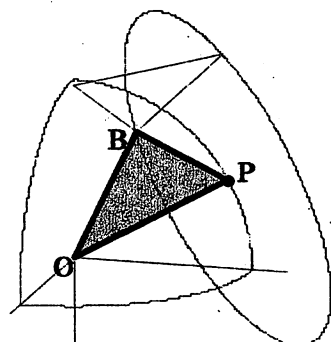
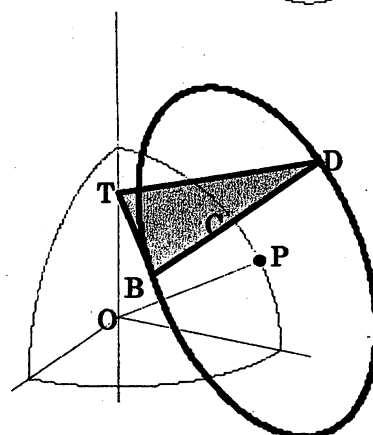
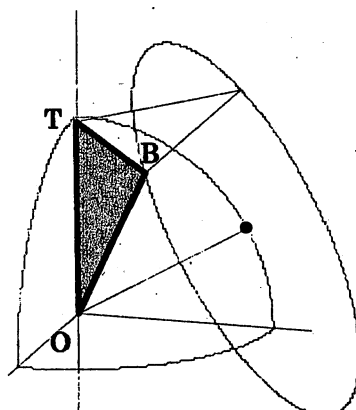
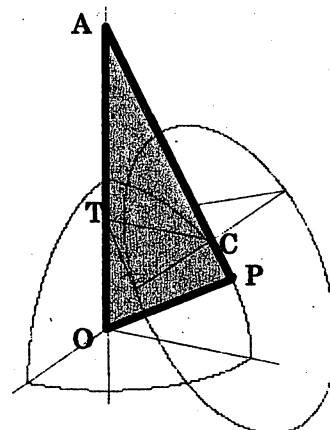
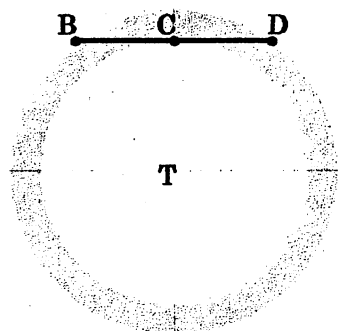
$\triangle OPB$ は直角三角形より

$$OB^2 = BP^2 + OP^2$$

$$OP = 1, BP = 1 \dots \textcircled{4}$$

$$OB^2 = 2$$

$$OB = \sqrt{2}$$



Step 4 図より t の範囲を求める。

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Step 5 断面積より体積を求める。

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} S(t) dt \\ &= \int_{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{4}{3} \pi \left(t^2 - t - \frac{1}{2} \right) dt \end{aligned}$$

Point $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ を活用する。

$$t^2 - t - \frac{1}{2} = 0 \text{ とおく } 2t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)(t - \beta) dt = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3$$

$$= -\frac{1}{6}(\sqrt{3})^3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

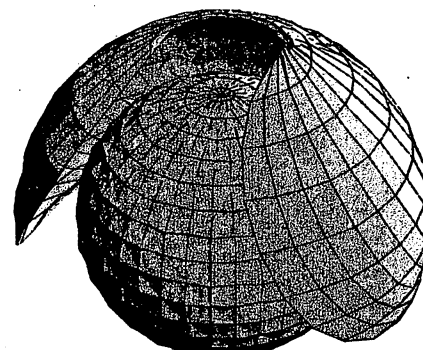
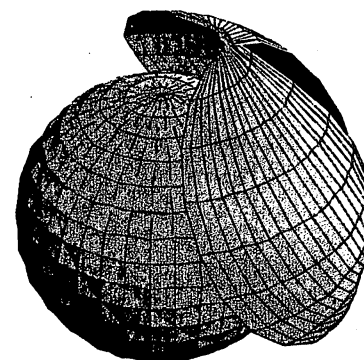
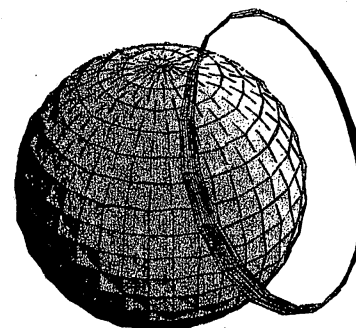
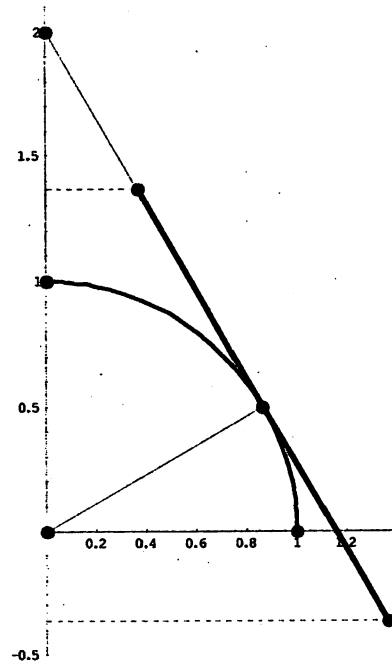
$$V = \frac{4}{3} \pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$

外側の形

内側の形

外側と内側の合体形

海栗の形みたい



第3話 バウムクーヘン型体積

Exercise 8 2003 年信州大学

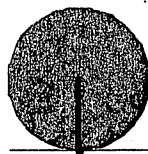
媒介変数 θ で表されたサイクロイド $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) と x 軸とで囲まれた図形を、 y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。ただし、 a は正の定数とする。

〔解答例その1〕教科書とおり、体積を求め正面突破を試みる。

(i) $\pi a \leq x$ のとき (大きい回転体の体積 V_1)

$$V_1 = \int_0^{2a} \pi x^2 dy = \int_{2\pi}^{\pi} \pi x^2 \frac{dy}{d\theta} d\theta$$

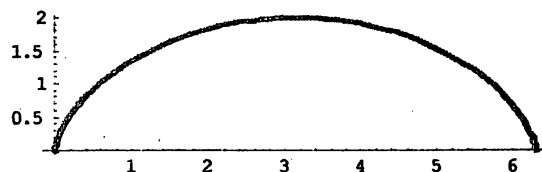
x	$0 \rightarrow 2a$
θ	$2\pi \rightarrow \pi$



(ii) $x \leq \pi a$ のとき (小さい回転体の体積 V_2)

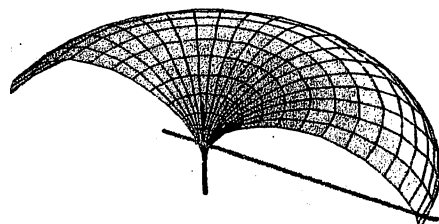
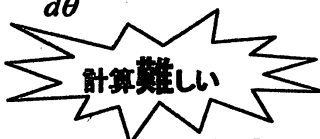
$$V_2 = \int_0^{2a} \pi x^2 dy = \int_0^{\pi} \pi x^2 \frac{dy}{d\theta} d\theta$$

x	$0 \rightarrow 2a$
θ	$0 \rightarrow \pi$



求める立体の体積 V とすると

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \int_{2\pi}^{\pi} \pi x^2 \frac{dy}{d\theta} d\theta - \int_0^{\pi} \pi x^2 \frac{dy}{d\theta} d\theta \\ &= - \int_{2\pi}^{\pi} \pi x^2 \frac{dy}{d\theta} d\theta - \int_0^{\pi} \pi x^2 \frac{dy}{d\theta} d\theta = - \int_0^{2\pi} \pi x^2 \frac{dy}{d\theta} d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \pi a^3 (\theta - \sin \theta)^2 \sin \theta d\theta \end{aligned}$$



パップス・ギュルダンの定理 (Pappus - Guldin)

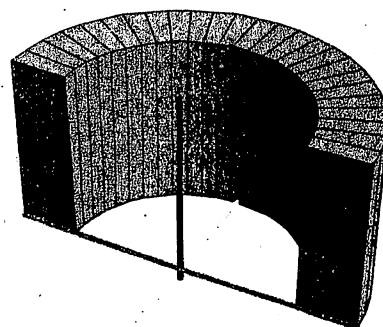
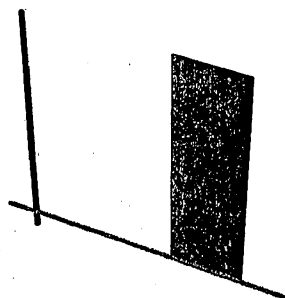
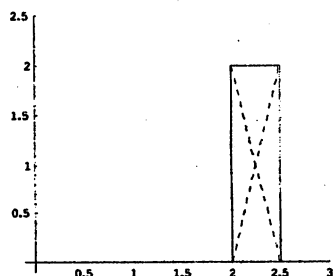
平面上に面積 S の図形 D と直線 l がある。 D の重心 G と l との距離を L とする。 l が D の内部を通らないとき、 D を l のまわりに1回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi L \times S$$

バウムクーヘン型立体の体積

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

長方形 $ABCD$ を y 軸のまわりに回転してできるパイプ状の立体〔右下図〕の体積 δV とする。



パップス・ギュルダンの定理より

$$\delta V = 2\pi \left(x + \frac{\delta x}{2} \right) \times \delta x \times f(x) = 2\pi x f(x) \delta x + \pi f(x) \delta x^2$$

$$\frac{\delta V}{\delta x} = 2\pi x f(x) + \pi f(x) \delta x \quad \text{分割を細かくすると } \delta x \rightarrow 0$$

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

バウムクーヘン型
立体の体積

【解答例その2】

このバウムクーヘン型の公式を利用してみよう。

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} x y dx = 2\pi \int_0^{2\pi} a(\theta - \sin \theta) a(1 - \cos \theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

$$= 2a^3 \pi \int_0^{2\pi} (\theta - \sin \theta)(1 - \cos \theta)^2 d\theta$$

この計算も難しい

【解答例その3】

パップス・ギュルダンの定理を利用する方法。

断面積 $S = (x_2 - x_1) dy$ ，サイクロイドの対称性より $\frac{x_2 + x_1}{2} = \pi a$

重心 G と回転軸である y 軸との距離 L は、 $L = \pi a$

長方形 $ABCD$ を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 δV とする。

パップス・ギュルダンの定理より、

$$\delta V = 2\pi L \times S = 2\pi^2 a S = 2\pi^2 a (x_2 - x_1) dy \dots \textcircled{1}$$

$$V = 2\pi^2 a S = 2\pi^2 a \int_0^{2\pi} y dx$$

$$= 2\pi^2 a \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

$$= 2\pi^2 a \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos \theta)^2 d\theta$$

$$= 2\pi^2 a^3 \left[\frac{3}{2} \theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi}$$

$$= 6\pi^3 a^3 \dots (\text{答})$$

①以降の別解 左右対象性に注目して、 $x_2 - x_1 = 2\pi a - 2x_1$

$\delta V = 2\pi^2 a \{2\pi a - 2x_1\} dy$ ， $x_1 = a(\theta - \sin \theta)$ を代入して

$$= 4\pi^2 a^2 (\pi - \theta + \sin \theta) dy$$
， $y = a(1 - \cos \theta)$ より $dy = a \sin \theta d\theta$

$$= 4\pi^2 a^3 (\pi - \theta + \sin \theta) \sin \theta d\theta$$

$$= 4\pi^2 a^3 (\pi \sin \theta - \theta \sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta \dots \textcircled{2}$$

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta = [-\cos \theta]_0^\pi = 2$$

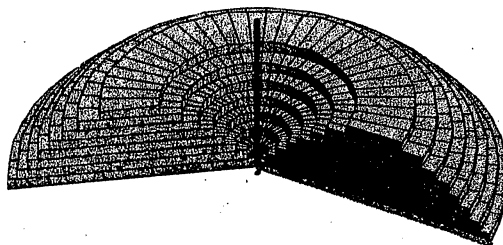
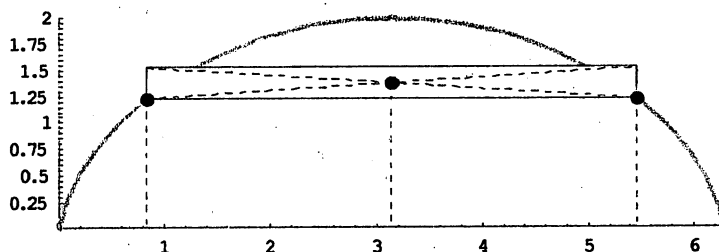
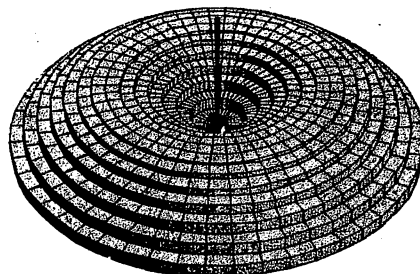
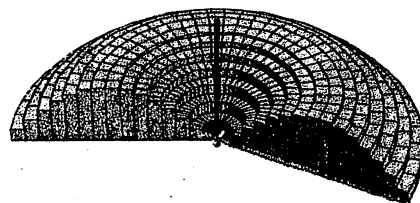
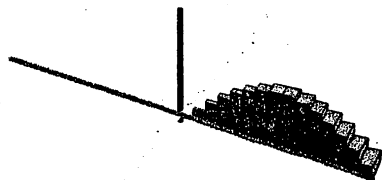
$$\int_0^\pi \theta \sin \theta d\theta = [-\theta \cos \theta]_0^\pi + \int_0^\pi \cos \theta d\theta = \pi$$

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

②へ代入して

$$V = \int_0^\pi 4\pi^2 a^3 (\pi \sin \theta - \theta \sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta = 4\pi^2 a^3 \times \frac{3\pi}{2}$$

$$= 6\pi^3 a^3 \dots (\text{答})$$



Exercise 9 x 軸 y 軸以外の回転軸の回転体 聖マリアンナ医科大学2003

円 $x^2 + y^2 = 1$ の $y \geq -\frac{1}{2}$ なる部分を、直線 $y = -\frac{1}{2}$ を回転軸として 1 回転させたとき、囲まれる立体の体積 V を求めよ。

〔解答例〕

円 $x^2 + y^2 = 1$ より $x = \sqrt{1 - y^2}$ 円を右図のように分割してグレーの長方形部分を $y = -\frac{1}{2}$ を軸として回転したパイプ状の立体の体積 δV とする。パップス・ギュルダンの定理より

パップス・ギュルダンの定理 (Pappus - Guldin)

平面上に面積 S の図形 D と直線 l がある。 D の重心 G と l との距離を L とする。 l が D の内部を通らないとき、 D を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi L \times S$$

$$\delta V = 2\pi \left(y + \frac{1}{2} \right) \delta y S \quad S : \text{長方形の面積 } S = 2\sqrt{1 - y^2} \delta y$$

$$\begin{aligned} \delta V &= 2\pi \left(y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \delta y \right) 2\sqrt{1 - y^2} \delta y \\ &= 4\pi \left(y + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 - y^2} \delta y + 2\pi \sqrt{1 - y^2} (\delta y)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\delta V}{\delta y} = 4\pi \left(y + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 - y^2} + 2\pi \sqrt{1 - y^2} \delta y$$

$$\delta y \rightarrow 0$$

$$V = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(4\pi y \sqrt{1 - y^2} + 2\pi \sqrt{1 - y^2} \right) dy \cdots \textcircled{1}$$

$\int_{-\frac{1}{2}}^1 y \sqrt{1 - y^2} dy$ を置換積分で求める。

$$t = 1 - y^2 \text{ とおく } \frac{dt}{dy} = -2y$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 y \sqrt{1 - y^2} dy = \int_{\frac{3}{4}}^0 y \sqrt{t} \frac{dy}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{t} dt = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - y^2} dy$ の部分を置換積分で求める。

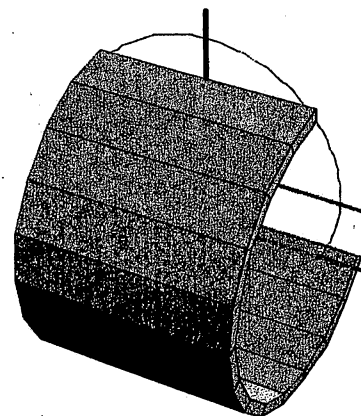
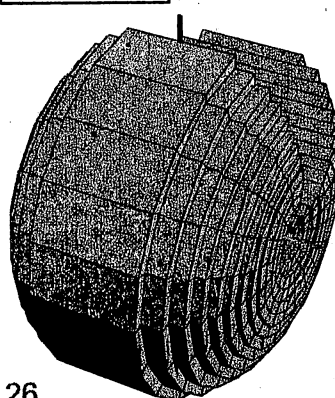
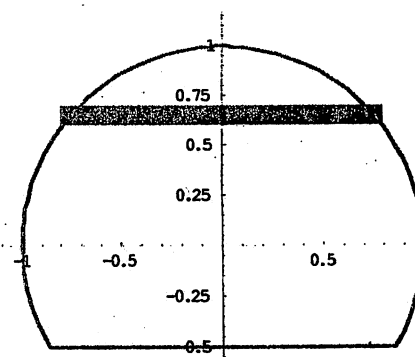
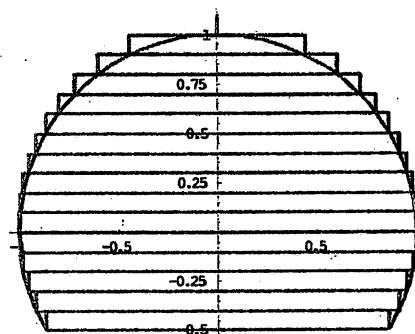
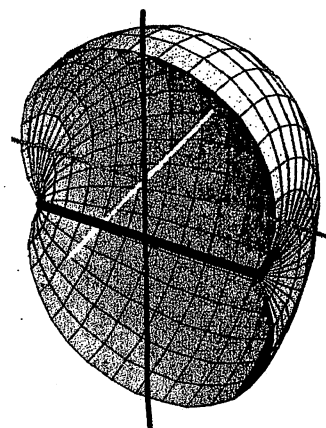
$$y = \sin \theta \text{ とおく } \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - y^2} dy = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \textcircled{1} \sim \text{代入すると}$$

$$V = 4\pi \times \frac{\sqrt{3}}{8} + 2\pi \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \pi + \frac{2}{3} \pi^2$$



Exercise10 任意の直線を回転軸とする回転体の体積 2003年岡山県立大学

a を正の定数とする。O を原点とする座標平面上に、曲線 $C: y = x^3 - ax$ と直線 $l: y = \frac{x}{a}$ を考える。

C と l の交点のうち x 座標が正であるものを A とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 原点 O から点 A までの距離を求めよ。
- (2) C 上の点 $P(t, t^3 - at)$ ($t \geq 0$) を通り、 l に垂直な直線が l と交わる点を Q とする。線分 PQ の長さを t を用いて表せ。また線分 OQ の長さを s とするとき、 s を t を用いて表せ。
- (3) $x \geq 0$ の領域において、曲線 C と直線 l で囲まれた図形を、直線 l を軸として回転してできる回転体の体積を求めよ。

〔解答例〕連立方程式

$$(1) \begin{cases} y = x^3 - ax \\ y = \frac{x}{a} \end{cases} \text{ を解く。 } x^3 - ax = \frac{x}{a} \quad ax^3 - (a^2 + 1)x = 0$$

$$x\{ax^2 - (a^2 + 1)\} = 0 \quad x = 0, \quad x^2 = \frac{a^2 + 1}{a} \quad x = \sqrt{\frac{a^2 + 1}{a}} \text{ より}$$

$$A\left(\sqrt{\frac{a^2 + 1}{a}}, \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2 + 1}{a}}\right)$$

$$OA = \sqrt{\frac{a^2 + 1}{a} + \frac{1}{a^2} \frac{a^2 + 1}{a}} = \frac{(a^2 + 1)\sqrt{a}}{a^2} \dots (\text{答})$$

(2)

点 $P(t, t^3 - at)$ と直線 $l: x - ay = 0$

$$PQ = \frac{|t - a(t^3 - at)|}{\sqrt{1 + a^2}} \\ = \frac{|(1 + a^2)t - at^3|}{\sqrt{1 + a^2}} \dots (\text{答})$$

点と直線との距離公式

点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

点 $P(t, t^3 - at)$ を通って $l: y = \frac{x}{a}$ に垂直な直線を求める。

傾き $-a$ より、 $y = -a(x - t) + t^3 - at$

この直線 $PQ: ax + y - t^3 = 0$ と原点 O との距離 s は

$$s = \frac{|-t^3|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{t^3}{\sqrt{a^2 + 1}} \dots (\text{答})$$

(3)

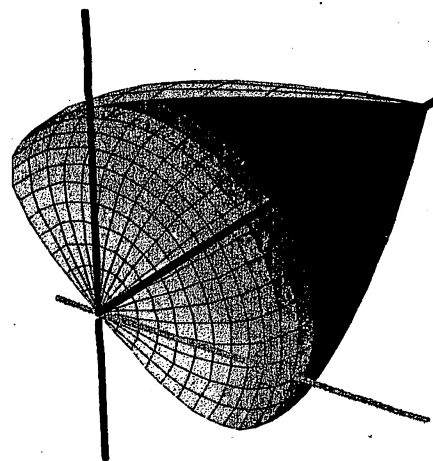
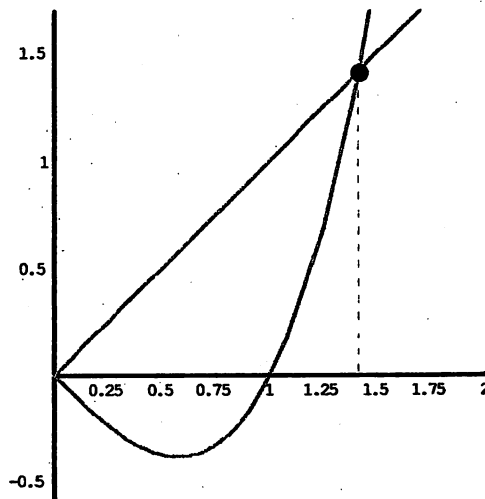
〔回転体の求積の基本〕 回転軸に垂直に分割する。

$$dV = \pi PQ^2 ds = \pi PQ^2 \frac{ds}{dt} dt = \frac{\pi \{(1 + a^2)t - at^3\}^2}{1 + a^2} \frac{3t^2}{\sqrt{1 + a^2}} dt$$

曲線 C と直線 l との交点 A の x 座標を α とすると、 $\alpha^2 = \frac{a^2 + 1}{a}$

$1 + a^2 = a\alpha^2$ に置き換えることができる。

$$dV = 3\pi \frac{a^2(\alpha^2 t - t^3)^2 t^2}{(1 + a^2)\sqrt{1 + a^2}} dt = 3a^2 \pi \frac{\alpha^4 t^4 - 2\alpha^2 t^6 + t^8}{(1 + a^2)\sqrt{1 + a^2}} dt$$



$$V = \int_0^a \pi PQ^2 \frac{ds}{dt} dt = \frac{3a^2\pi}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}} \left[\frac{\alpha^4 t^5}{5} - \frac{2\alpha^2 t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \right]_0^a$$

$$= \frac{3a^2\pi}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}} \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \right) \alpha^9 = \frac{8(1+a^2)^3}{105a^2\sqrt{a}} \dots (\text{答})$$

トンガリハット・コーンスライス法

$$V = \pi \cos \theta \int_a^b \{g(x) - f(x)\}^2 dx$$

$$\tan \theta = \frac{1}{a}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \quad \text{より} \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$V = \pi \cos \theta \int_0^a \left(\frac{x}{a} - x^3 + ax \right)^2 dx$$

$$= \frac{a\pi}{\sqrt{1+a^2}} \int_0^a \left\{ \left(\frac{1}{a} + a \right) x^2 - 2 \left(\frac{1}{a} + a \right) x^4 + x^6 \right\} dx$$

$$= \frac{a\pi}{\sqrt{1+a^2}} \left[\left(\frac{1+a^2}{a} \right)^2 \times \frac{x^3}{3} - 2 \left(\frac{1+a^2}{a} \right) \times \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \right]_0^a$$

$$= \frac{8a\pi}{105\sqrt{1+a^2}} \alpha^7 = \frac{8(1+a^2)^3}{105a^2\sqrt{a}} \dots (\text{答})$$

トンガリハット・コーンスライス法とは？

右図の様に、回転軸に平行な平行四辺形に分割する。
 平行四辺形を l のまわりに回転してできる回転体は
 トンガリハットの形をしている。

このトンガリハットの微小体積を δV とする。

δV = 『長方形 EFDC の回転体の体積』

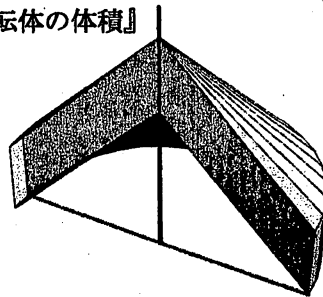
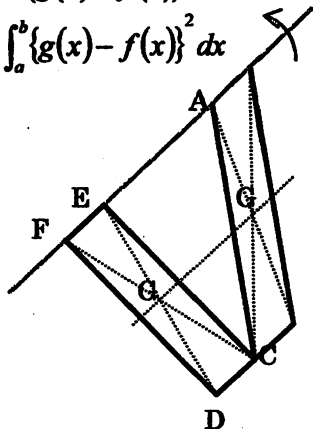
$$\delta V = \pi \times EC^2 \times CD$$

$$= \pi \times (AC \cos \theta)^2 \times \frac{\delta x}{\cos \theta}$$

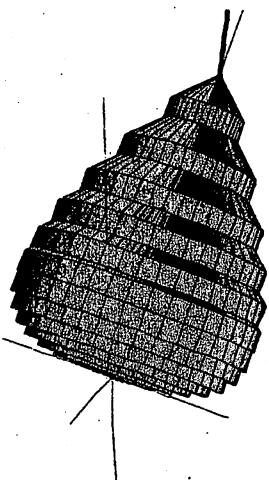
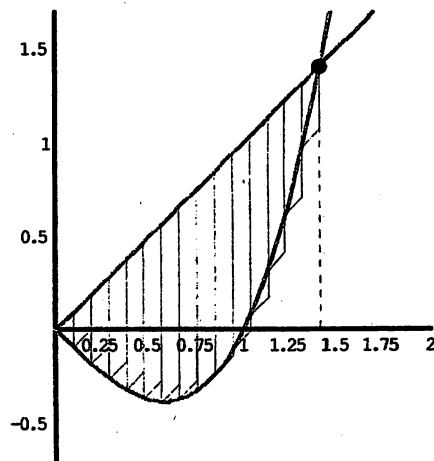
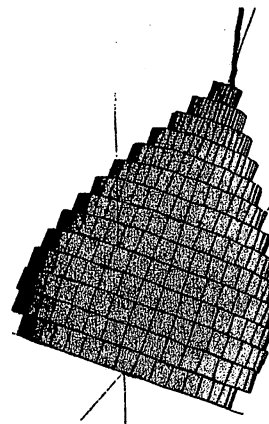
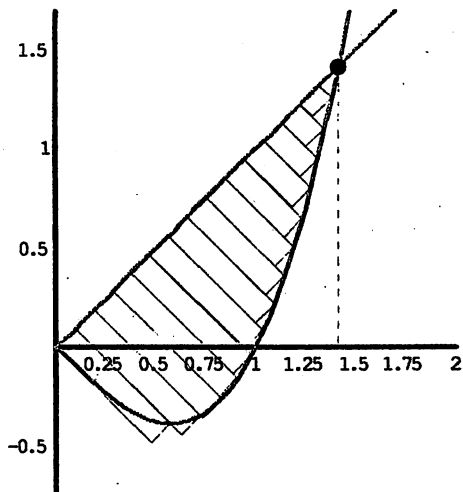
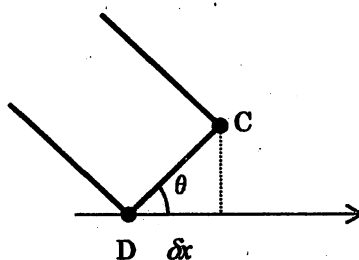
$$= \pi \cos \theta AC^2 \delta x$$

$$= \pi \cos \theta (g(x) - f(x))^2 \delta x$$

$$V = \pi \cos \theta \int_a^b \{g(x) - f(x)\}^2 dx$$



【トンガリハット】



第4話　くりぬき立体図形の体積

Exercise 11 2003年武蔵工業大学

底面積 3π 、高さ3の直円錐がある。その頂点Oを中心とする半径1の球が直円錐から切り取る部分の体積を求めよ。

〔解答例〕

底面の半径 r とすると、 $r^2\pi=3\pi$ より $AB=r=\sqrt{3}$

$OA=3$ とピタゴラスの定理 $OA^2+AB^2=OB^2$ より

$OB=2\sqrt{3}$

$\triangle OBA \sim \triangle OQP$ より

$OQ:OB=1:2\sqrt{3}$

$PQ:AB=1:2\sqrt{3}$

$PQ:\sqrt{3}=1:2\sqrt{3}$

$PQ=\frac{1}{2}$

$OP:OA=1:2\sqrt{3}$

$OA=3$ より

$OP=\frac{\sqrt{3}}{2}$

円錐部分の体積 V_1

$$V_1 = \frac{1}{2}PQ^2\pi OP = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi$$

球面による切り取り部分の体積 V_2

$OQ=2PQ=1$ ，中心O半径1の円 $x^2+y^2=1$ より

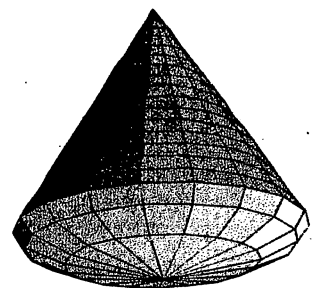
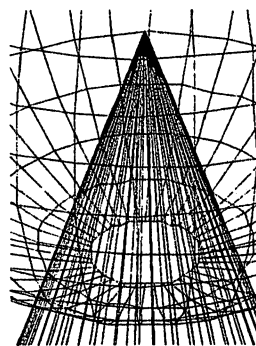
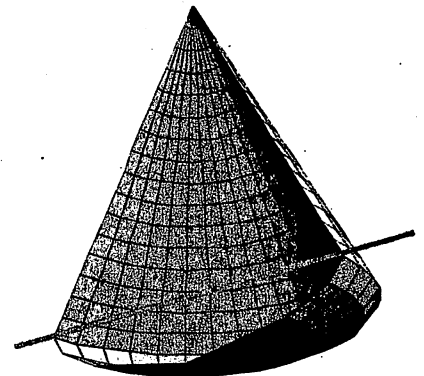
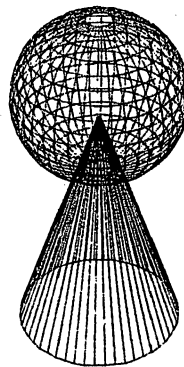
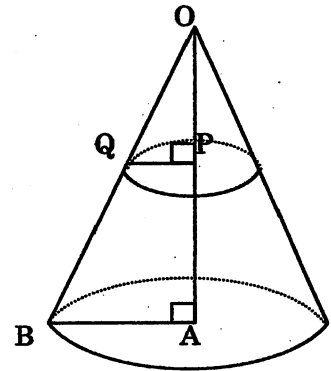
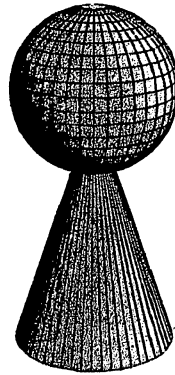
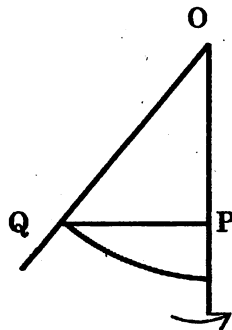
$$V_2 = \pi \int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 dy$$

$$= \pi \int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1-y^2) dy$$

$$= \pi \left[y - \frac{1}{2}y^3 \right]_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \pi$$

$$\text{求める立体の体積 } V_1 + V_2 = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$



バウムクーヘンの面積定理

$0 \leq y \leq f(x)$ ， $a \leq x \leq b$ を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

極表示の面積定理

曲線 C 上の点 P が極方程式 $r = f(\theta)$ ， $\alpha \leq \theta \leq \beta$ で囲まれる面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(\theta)\}^2 d\theta$$

Exercise12 半球面の体積

原点中心、半径1のxy平面にのる半球面において、極座標の領域 $a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ と真上の曲面によって囲まれた部分の体積 V を求めよ。

半球面は $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ と表される。

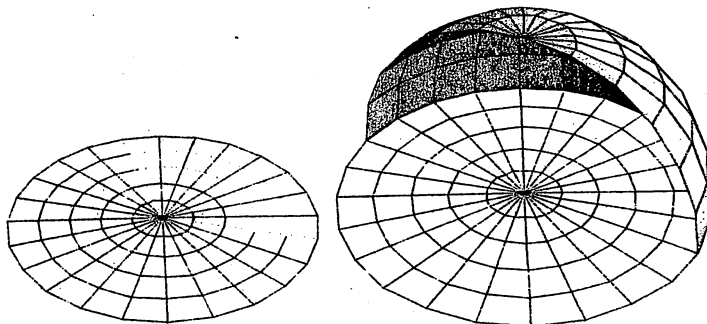
xy 平面上の極座標の点 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - r^2}$$

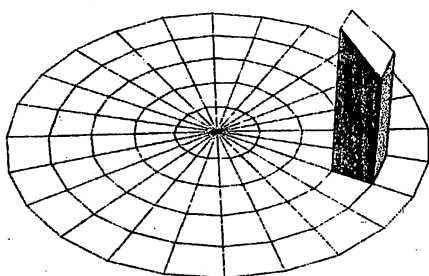
曲座標の点 (r, θ) に対応する曲面上の高さ $f(r, \theta)$

極座標の領域 $\Delta : a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$

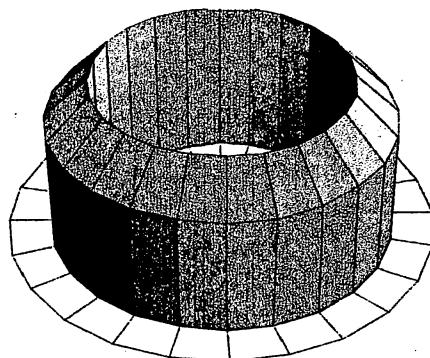
と真上の曲面によって囲まれた部分の体積 V を求めよう。



Step1 ; 下図の微少体積 δV を求めよう。



回転すると

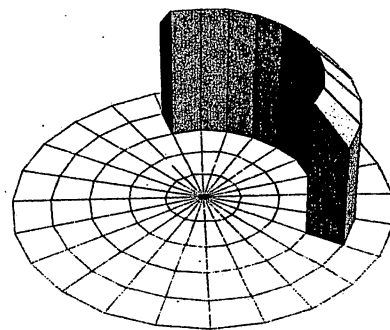


この微少立体を1回転した立体の体積は、**パウムクーヘンの面積定理**

を利用して θ を固定して $2\pi \int_a^b r f(r, \theta) dr \dots ①$

微少立体の回転角は、1回転 2π ではなく $d\theta$ でしか回転しないので、

$\delta V = \left(\int_a^b r f(r, \theta) dr \right) d\theta$ と表す。



Step2 ; 右図領域 $\Delta : a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ と真上の曲面によって囲まれた部分の体積 V を求めよう。

$v(\theta) = \int_a^b r f(r, \theta) dr$ とおくと

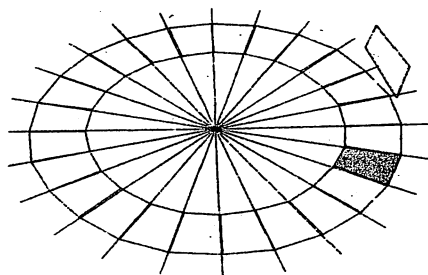
$$V = \int_{\alpha}^{\beta} v(\theta) d\theta$$

$$= \iint_{\Delta} r f(r, \theta) d\theta dr$$

これは **2重積分** の概念です

極表示の体積公式

$$V = \iint_{\Delta} r f(r, \theta) d\theta dr$$

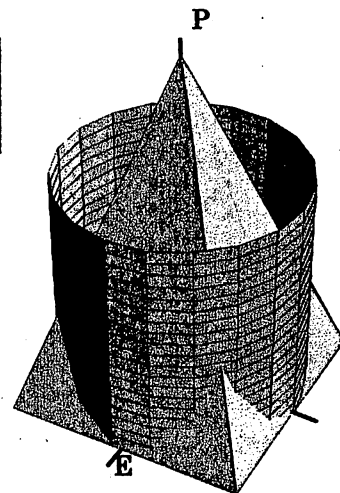


Exercise13 1998 年 東京大学前期・理科

xyz 空間に 5 点 $A(1,1,0), B(-1,1,0), C(-1,-1,0), D(1,-1,0), P(0,0,3)$ をとる。四角錐 $PABCD$ の $x^2 + y^2 \geq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。

[解答例]

Point ; 対称性に注目して四角錐の 8 等分の 1 つと円柱との共通部分の体積を求める。



四角錐の側面上の線分 PE の方程式 ; $x + \frac{z}{3} = 1 \dots \textcircled{1}$

これは側面の方程式でもある。

極座標で表示すると、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を $\textcircled{1}$ へ代入して

$$r \cos \theta + \frac{z}{3} = 1 \text{ より } z = 3(1 - r \cos \theta)$$

従って、曲面の方程式を $f(r, \theta) = 3(1 - r \cos \theta)$ として、

領域 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ での体積を求める。

$$\begin{aligned} v(\theta) &= \int_0^1 r f(r, \theta) dr \\ &= \int_0^1 3r(1 - r \cos \theta) dr \\ &= \left[\frac{3}{2} r^2 - r^3 \cos \theta \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} - \cos \theta \end{aligned}$$

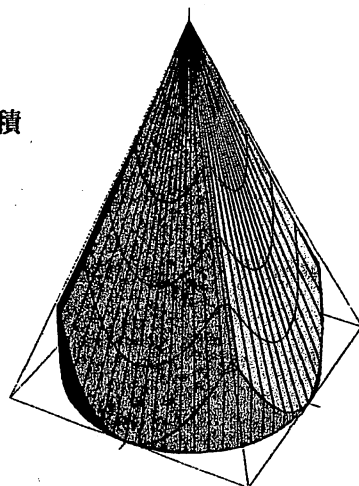
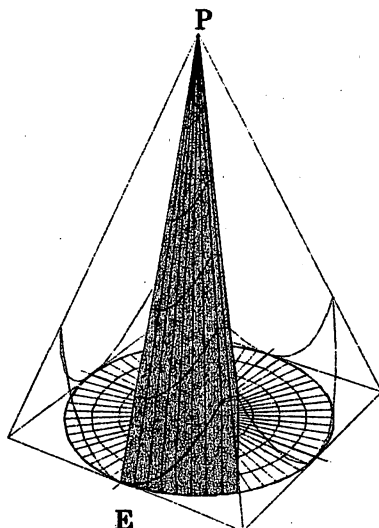
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} v(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} - \cos \theta \right) d\theta \\ &= \left[\frac{3}{2} \theta - \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{3\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

V を 8 倍して四角錐と円柱の共通部分の体積 T をもとめると、

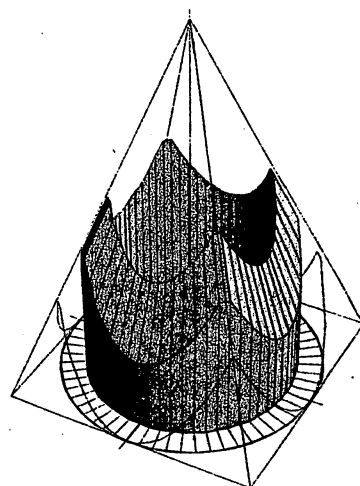
$$T = 8V = 3\pi - 4\sqrt{2}$$

これ四角錐の体積から引くと求める体積が出る。

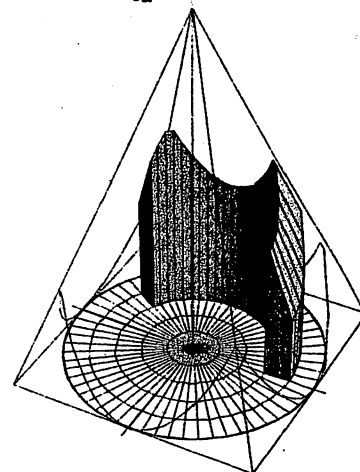
$$\begin{aligned} \text{求める体積} &= \frac{1}{3} \times 2^2 \times 3 - (3\pi - 4\sqrt{2}) \\ &= 4 + 4\sqrt{2} - 3\pi \dots (\text{答}) \end{aligned}$$



$$2\pi \int_0^1 r f(r, \theta) dr$$



$$\begin{aligned} v(\theta) &= \int_a^b r f(r, \theta) dr \\ V &= \int_a^b v(\theta) d\theta \end{aligned}$$



Exercise14 2003 年 東京大学前期・理科

xyz 空間において、平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし、点 $(0,0,1)$ を頂点とする円錐を A とする。

次に、平面 $z=0$ 上の点 $(1,0,0)$ を中心とする半径 1 の円を H 、平面 $z=1$ 上の点 $(1,0,1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。 H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

$0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対し、平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1) $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ とする。 $t=1-\cos \theta$ のとき、 $S(t)$ を θ で表せ。

(2) C の体積 $\int_0^1 S(t) dt$ を求めよ。

〔解答例〕 Point ; 導入に従って解法する

(1)

題意の立体の等高線を作成すると右図の様に円と円の重なった図になる。

xy 平面に平行な平面 $z=t$ による切り口は、右中央図の円と円の重なった部分となり、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \{2(1-t)\}^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$t=1-\cos \theta$ より

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4\cos^2 \theta \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

交点の x 座標を α とすると $\alpha = 2\cos^2 \theta$

交点の y 座標 β とすると $\beta = 2\cos \theta \sin \theta$

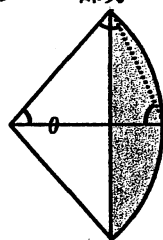
$$\frac{\beta}{\alpha} = \tan \theta$$

扇形の中心角 $= 2\pi - 4\theta$

扇形の面積 $= \pi - 2\theta$

$$\begin{aligned} \text{三角形の面積} &= \frac{1}{2} \sin(2\pi - 4\theta) \\ &= -\sin 2\theta \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$\text{グレー部分} = \pi - 2\theta + \sin 2\theta \cos 2\theta \cdots \textcircled{1}$$



半径 $2\cos \theta$ 、中心角 2θ の扇形について

$$\text{扇形の面積} = 4\theta \cos^2 \theta$$

$$\text{三角形の面積} = 4\sin \theta \cos^3 \theta$$

$$\text{グレー部分} = 4\theta \cos^2 \theta - 4\sin \theta \cos^3 \theta \cdots \textcircled{2}$$

①+②により断面積 $S(t)$ を求めることができる。

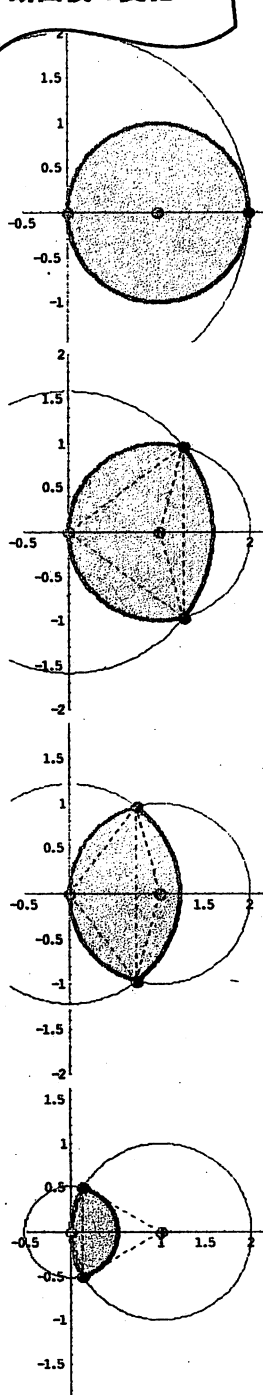
$$S(t) = 2\theta \cos 2\theta + \pi - \sin 2\theta$$

(2)

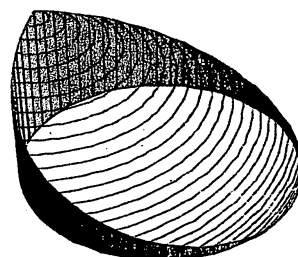
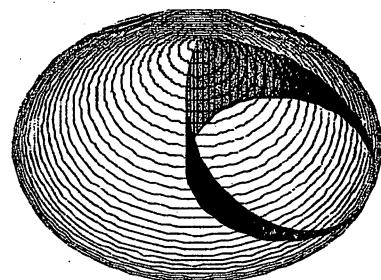
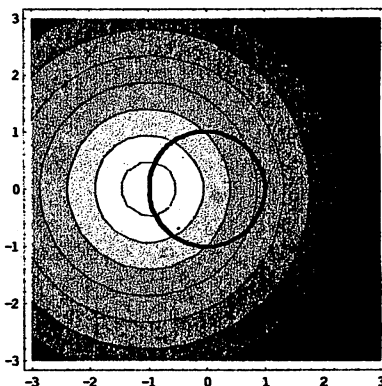
$$\int_0^1 S(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) \frac{dt}{d\theta} d\theta \quad t=1-\cos \theta \text{ とおく}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta \cos 2\theta \sin \theta + \pi \sin \theta - \sin 2\theta \sin \theta) d\theta \cdots \textcircled{3}$$

断面積の変化



等高線を作成する



第1項 = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta \cos 2\theta \sin \theta d\theta$ 積を和に変換する公式より

= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(\sin 3\theta - \sin \theta) d\theta$ 部分積分法を利用して

$$= \left[\theta \left(-\frac{1}{3} \cos 3\theta + \cos \theta \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3} \cos 3\theta + \cos \theta \right) d\theta = -\frac{10}{9}$$

第2項 = $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \pi$

第3項 = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin 2\theta \sin \theta) d\theta = \left[-\frac{2}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}$

③ = 第1項 + 第2項 + 第3項 = $\pi - \frac{16}{9} \dots$ (答)

[解答例その2]

Step 1 ; 側曲面の方程式を求める。

曲面上の点 (x, y) は z 軸上の点を中心として、半径 $2(1-t)$ の円を描く。

$$\begin{cases} x = 2(1-t)\cos \theta \\ y = 2(1-t)\sin \theta \\ z = t \end{cases} \quad \text{より、パラメーター } t, \theta \text{ を消去すると、}$$

$$x^2 + y^2 = 4(1-t)^2, \quad t = z \quad \text{曲面の方程式 ; } z = 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$$

Step 2 ; 2重積分を利用する。

求める立体の体積 = $\iint_{(x-1)^2 + y^2 \leq 1} \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \right) dx dy \dots \textcircled{4}$

ヤコビ行列
に注意

直交座標から極座標への変換公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |r| dr d\theta$$

中心 $(1, 0, 0)$ 半径 1 の円を極座標表示すると、右図より $r = 2 \cos \theta$

④へ $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を代入して変数変換すると

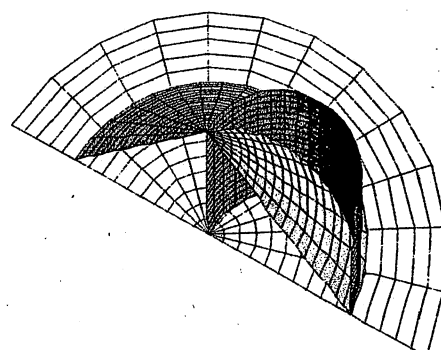
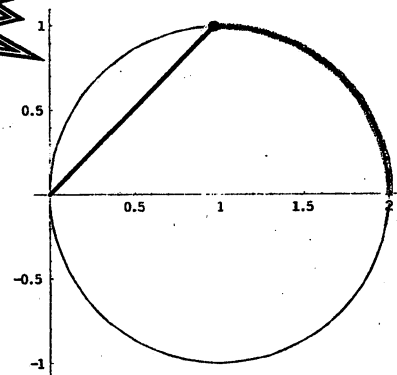
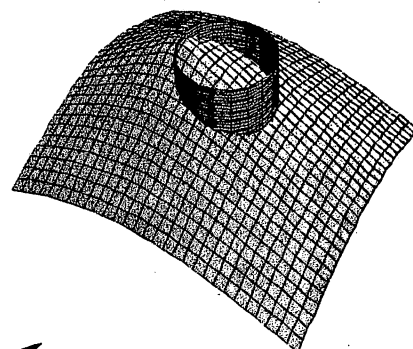
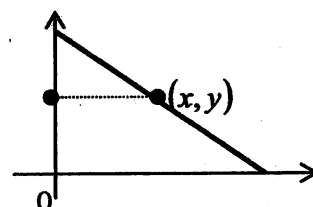
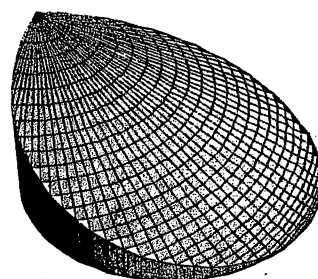
$$\textcircled{4} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \left(1 - \frac{r}{2} \right) r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{6} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \cos^3 \theta \right) d\theta \quad \text{2倍角 3倍角の定理より}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 2\theta + 1 - \frac{1}{3} \cos 3\theta - \cos \theta \right) d\theta$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta - \frac{1}{9} \sin 3\theta - \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \sin \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{9} \right) = \pi - \frac{16}{9} \dots \text{ (答)}$$



Exercise15 立体を座標で分析

直交する半径1の2本の円柱の共通部分の体積を求めよ。

〔解答例〕

直交する2本の円柱 Fig1 と Fig2 を合成すると、Fig3 になる。
この共通部分の体積を求める問題である。

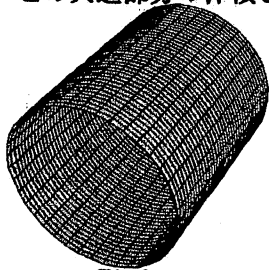


Fig1

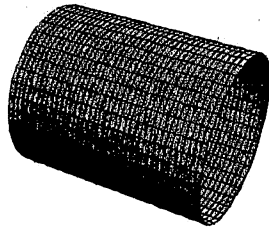


Fig2

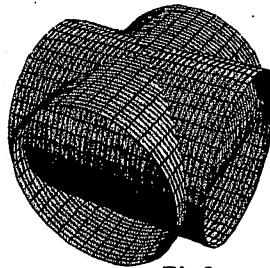
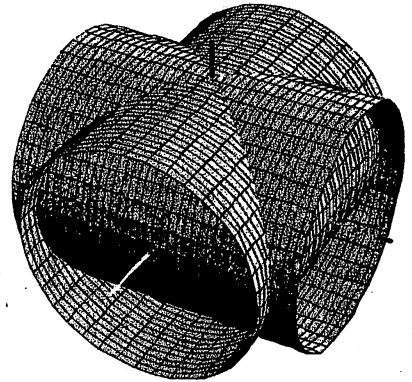


Fig3



更に、x 軸、y 軸、z 軸と座標を導入して作図する。
この共通部分の立体は、どうなるのだろうか？
この共通部分を xy - 平面に平行な平面でスライスする。

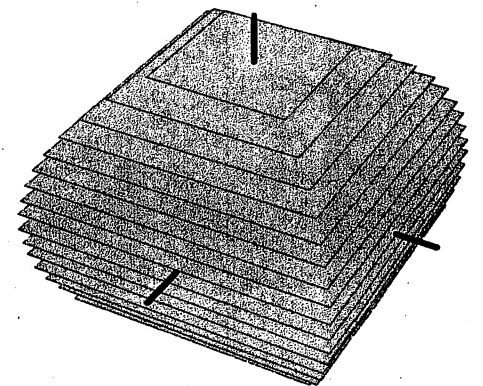
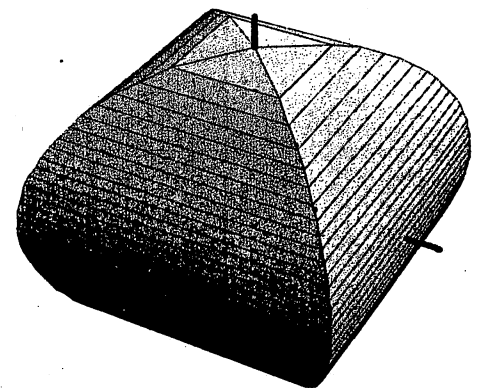
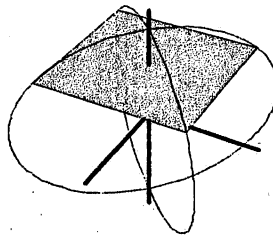
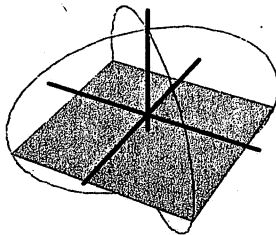
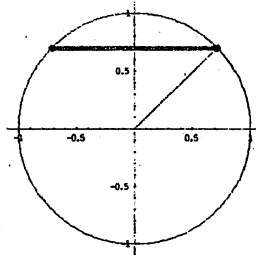
z 成分を t とすると、1 辺が $2\sqrt{1-t^2}$
の正方形が断面となる立体である。

断面積 $S=4(1-t^2)$

$$V = \int_{-1}^1 S dt = 2 \int_0^1 S dt$$

$$= \left[4 \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \right]_0^1$$

$$= \frac{16}{3}$$



〔解答例 2〕

Point 重積分を利用する方法

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$$

xy 平面上において $x \geq 0, y = x$ と $y = -x$ で囲まれた部分の領域における

曲面の方程式 $x^2 + z^2 = 1$ より $z = \sqrt{1-x^2}$

立体の対称性に注意して重積分 $\int_0^x \int_x^x \sqrt{1-x^2} dy dx$ を計算する。

$$\int_0^x \int_x^x \sqrt{1-x^2} dy dx = 2 \int_0^x dx \int_0^x \sqrt{1-x^2} dy \dots \textcircled{1}$$

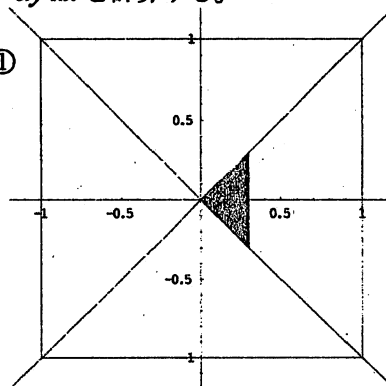
$$\int_0^x \sqrt{1-x^2} dy = \left[y \sqrt{1-x^2} \right]_0^x = x \sqrt{1-x^2}$$

①へ代入して

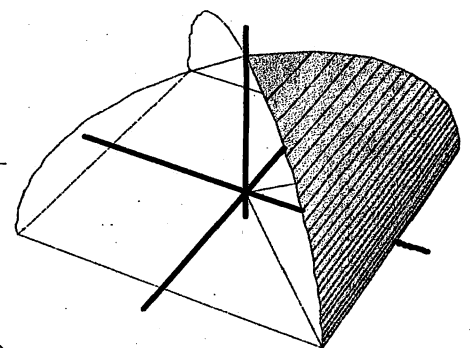
$$2 \int_0^x x \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{として置換積分}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} \quad \text{求める立体の体積は、}$$

この立体が 8 個集まったものだから $\frac{16}{3}$



曲面 $z = \sqrt{1-x^2}$



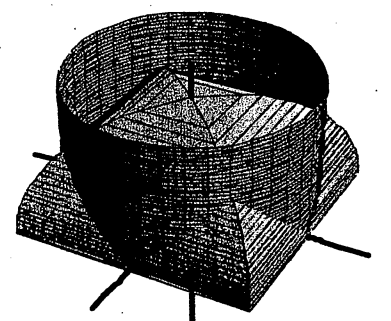
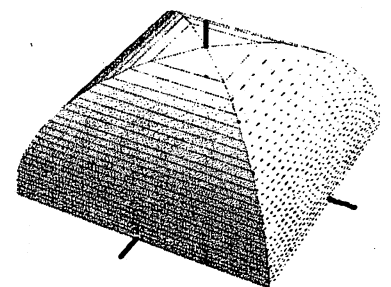
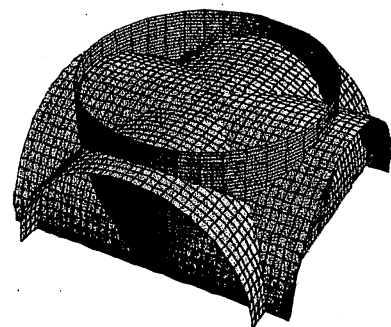
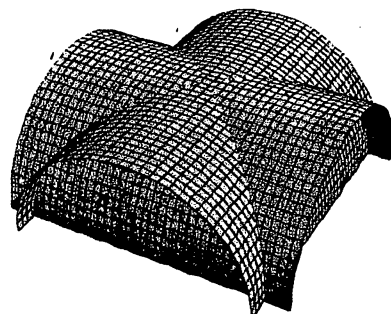
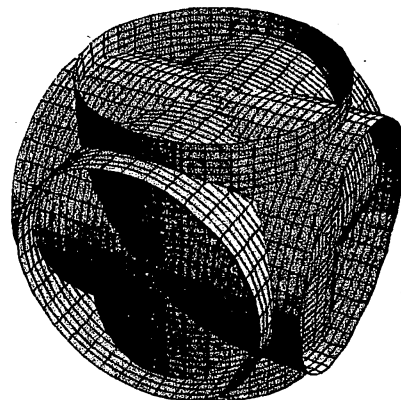
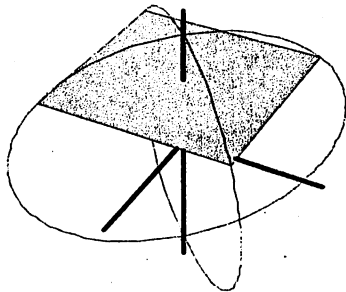
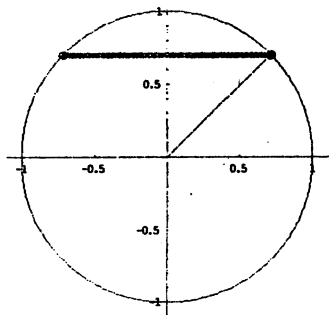
Exercise16 交わる3本の円柱の共通部

半径1の円柱が3本ある。どの2つをとっても中心軸が互いに直交するとき、3本の円柱の共通分の体積 V を求めよ。

[解答例1]

前問同様に z 成分を t とすると、

1辺が $2\sqrt{1-t^2}$ の正方形が断面となる立体である。



〔i〕正方形の断面が単位円の内部に存在する時

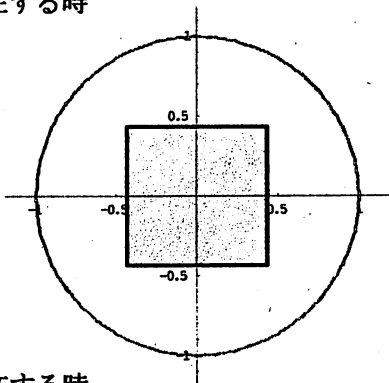
$$\sqrt{1-t^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}$$

$$\text{つまり } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq t < 1 \text{ のとき}$$

このとき1辺が $2\sqrt{1-t^2}$ の正方形である。

$$\text{断面積 } S(t) = 4(1-t^2)$$

$$\text{体積 } V_1 = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 4(1-t^2) dt = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}\sqrt{2}$$



〔ii〕正方形の断面が単位円の外部に存在する時

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{1-t^2} < 1 \text{ のとき}$$

$$\text{つまり } 0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}$$

$$\sin \theta = t, \cos \theta = \sqrt{1-t^2},$$

$$\text{扇形の面積} = \theta$$

$$\text{三日月形の面積} = \text{扇形の面積} - \text{三角形の面積}$$

$$= \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta = \theta - \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{断面積 } S$$

$$= \text{円の面積} - 4 \times \text{三日月形の面積}$$

$$= \pi - 4\theta + 4 \sin \theta \cos \theta$$

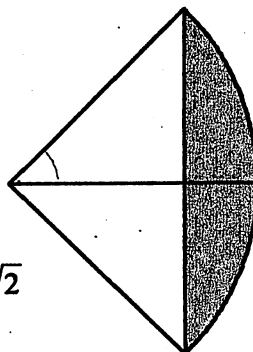
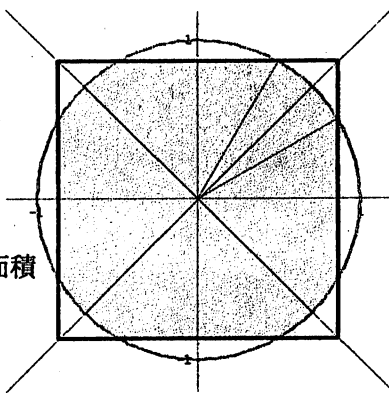
$$t = \sin \theta \text{ において置換積分すると}$$

$$V_2 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} S dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} S \frac{dt}{d\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} S \cos \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{4 \cos^2 \theta \sin \theta + (\pi - 4\theta) \cos \theta\} d\theta = \frac{16}{3} - \frac{7}{3}\sqrt{2}$$

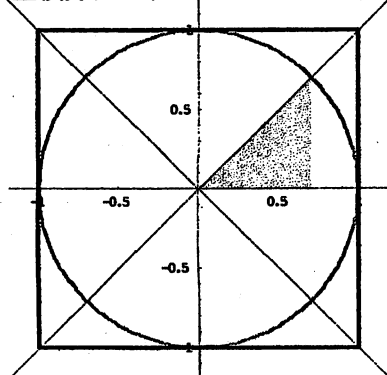
$$\text{求める体積} = 16 - 8\sqrt{2} \dots (\text{答})$$



〔解答例2〕 **重積分を利用する方法**

くりぬいた立体を xy -平面で切断した上の部分は、右図のような立体になる。

2重積分法を利用して2つの部分に分割して



$$V_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_0^x \sqrt{1-x^2} dy$$

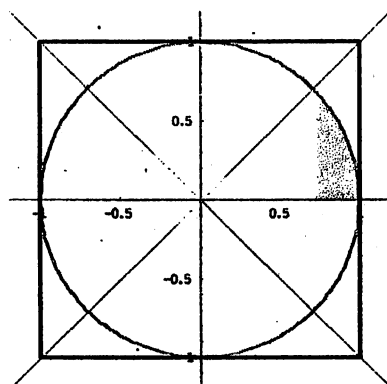
$$\int_0^x \sqrt{1-x^2} dy = \left[\sqrt{1-x^2} y \right]_0^x$$

$$= x\sqrt{1-x^2}$$

$$V_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\sqrt{1-x^2} dx$$

$t=1-x^2$ と置換積分すると

$$= \frac{1}{3} \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12} \dots \textcircled{1}$$



$$V_2 = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy$$

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy = \left[\sqrt{1-x^2} y \right]_0^{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 1-x^2$$

$$V_2 = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (1-x^2) dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12} \dots \textcircled{2}$$

①+②を実施する

$$V_1 + V_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8倍して下半分の体積を求めるために更に2倍すると

$$\text{求める立体の体積は } 8 \times 2 \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 16 - 8\sqrt{2} \dots (\text{答})$$

〔解答例3〕 **極座標を利用する方法**

2直線 $y=-x, y=x$ とで囲まれる領域における曲面の方程式は

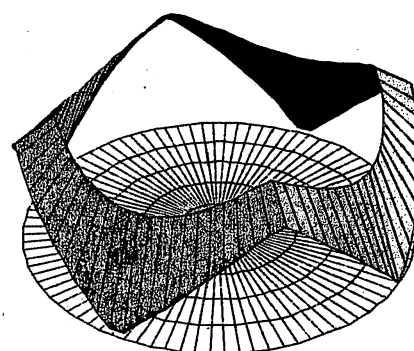
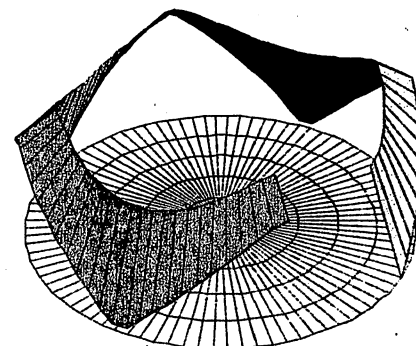
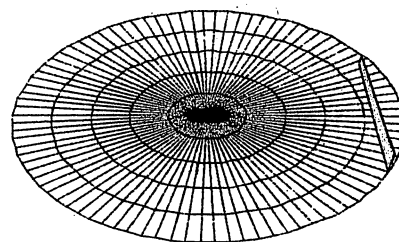
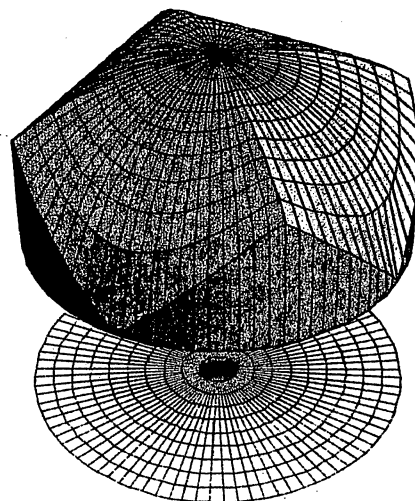
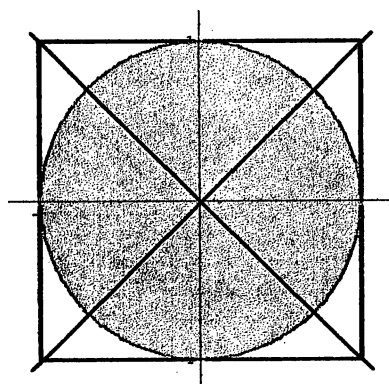
$z = \sqrt{1-x^2}$ を極座標表示すると

$x = r \cos \theta$ を代入して $z = \sqrt{1-r^2 \cos^2 \theta}$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1$ の範囲で積分する。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r \sqrt{1-r^2 \cos^2 \theta} dr$$

を計算すると良い。



第 I 部大学入試問題

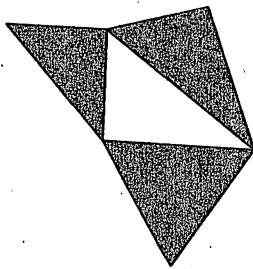
空間認識の技術

—立体図形問題への感覚的アプローチ—

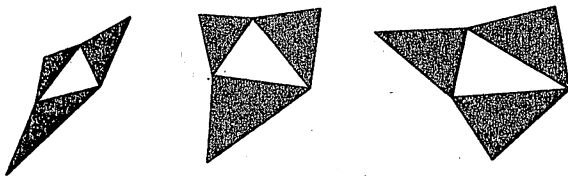
高等学校数学科教職員にとって、欠くことができない仕事の一つとして「大学入試問題の解説」がある。立体図形の入試問題は、多くの大学で出題されている。多様な CG を見ることによって、イメージから大切な情報を読み取り、「普遍性」を発見することが大切である。自らの発見がモチベーションを高めることになる。数年後の「電子書籍・電子黒板時代」を意識して Mathematica で教材を作成してみた。

北海道大学 2009 年

図はある三角錐 V の展開図である。ここで、 $AB=4$, $AC=3$, $BC=5$, $\angle ACD=90^\circ$ で $\triangle ABE$ は正三角形である。このとき、 V の体積を求めよ。



立体図形の効果的指導方法として視覚に訴えて数学的空間イメージを育成することが必要である。Mathematica6.0 から立体をあらゆる視点から見る機能が標準装備された。マウスを動かすことによって自由に視点を変化させることができる。



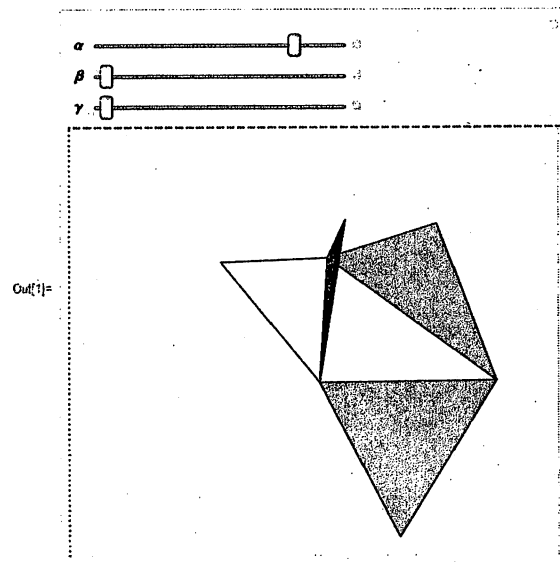
iPad では指を触れるだけで動かすことができるであろう。

グラフィックの動的インタラクティブを作成

Manipulate 機能も新しく加わり、それぞれの平面のスライダーを動かすことによって独立して

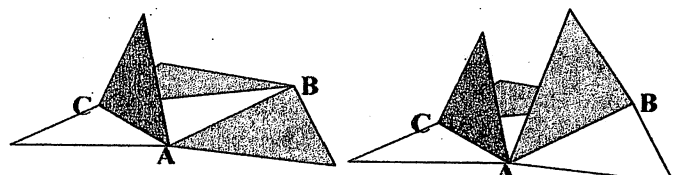
かすことができる。立体図形を仮想体験することができる。

日本語機能も強化され、プレゼンテーションも可能となった。



Step1 図形的イメージを体験する。

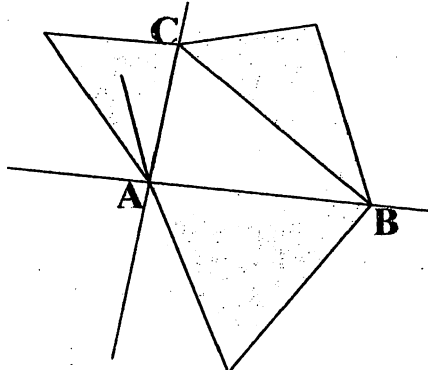
各平面のスライダーを動かし、図形変化や視点を変えることにより 3D 図形を見ることができる。



観察することにより、個々の空間イメージを育成

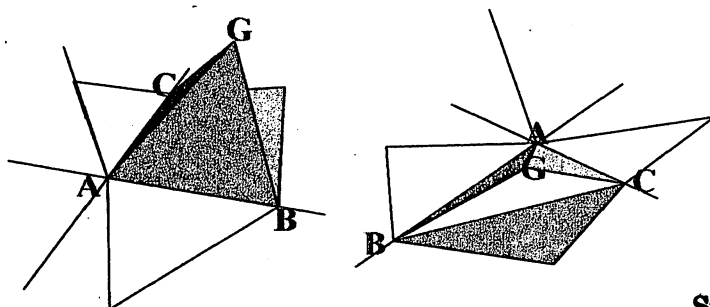
することがで、図形のイメージから「ひらめき」を引き出す。この「ひらめき」がモチベーションをたかめる

Step2 座標を導入する。



$$CB^2 = CA^2 + AB^2 \text{ より}$$

$\angle ACB = 90^\circ$ となるので、 $\triangle ABC$ は直角三角形となるので、AB を x 軸、AC を y 軸にとって座標を導入すると良い。



$\triangle ABE$ は正三角形なので、この三角錐の頂点 G の x 成分は 2 である。

$\triangle ACD$ は $\angle C$ は直角とする直角三角形なので三角錐の頂点 G の y 成分は 3 である。

$G(2, 3, z)$ と表示できる。

Step3 高さを求める。

$AG = 4$ より

$$2^2 + 3^2 + z^2 = 4^2$$

$$z^2 = 3$$

$$z = \sqrt{3}$$

Step4 体積を求める。

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sqrt{3}$$

$$V = 2\sqrt{3}$$

札幌医科大学 2010 年

a, h を正の定数とし、 $0^\circ < \theta < 120^\circ$ とする。空

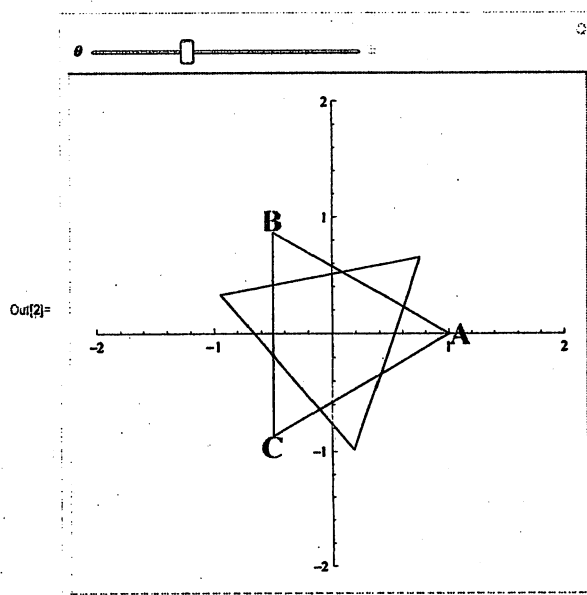
間に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right)$,

$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right)$ がある。xy 平面上で、3 点

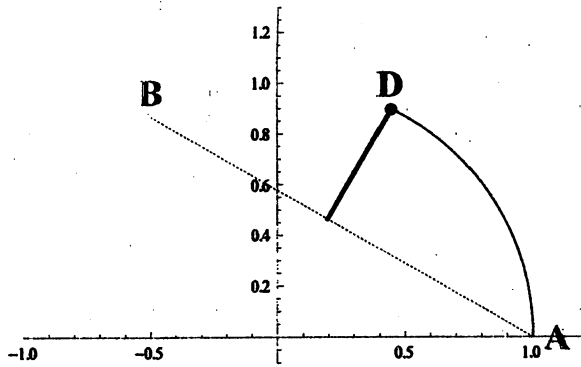
A, B, C を原点中心に θ だけ回転させた点をそれぞれ D, E, F とする。さらに 3 点 D, E, F を z 軸方向に h だけ平行移動した点をそれぞれ X, Y, Z とする。

- (1) 点 D と、直線 AB の距離を a と θ を用いて表せ。
- (2) 三角形 ABX の面積が最大となるときの θ を求め、そのときの面積を a と h を用いて表せ。
- (3) 下面が三角形 ABC、上面が三角形 XYZ、側面が 6 つの三角形 AXZ, BYX, CZY, XAB, YBC, ZCA であるような立体を考える。(2) で求めた θ に対して、この立体の体積を a と h を用いて表せ。

Step1 問題のイメージを把握する。



Manipulate 機能を使ってスライダーを動かして問題の状況を把握する。



Step 2 必要な部分を Close Up する。

必要なものを明確にしておく。

点 D の座標を求める。xy 平面上において、

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}$$

直線 AB の方程式； $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-a)$

$$AB ; \sqrt{3}x + 3y - a\sqrt{3} = 0 \dots \textcircled{2}$$

点 $(a \cos \theta, a \sin \theta)$ と直線②との距離 d とすると、

点と直線の距離公式により

$$d = \frac{|\sqrt{3}a \cos \theta + 3a \sin \theta - a|}{\sqrt{3+9}} \dots (\text{答})$$

$$= \frac{a|\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta - 1|}{2}$$

(2)

Step3 座標を導入する。

$$A(a, 0, 0), B\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right), X(a \cos \theta, a \sin \theta, h)$$

h は一定なので、 $\triangle ABX$ の高さ e とすると

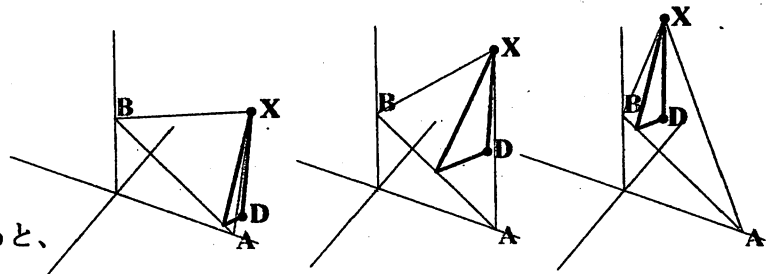
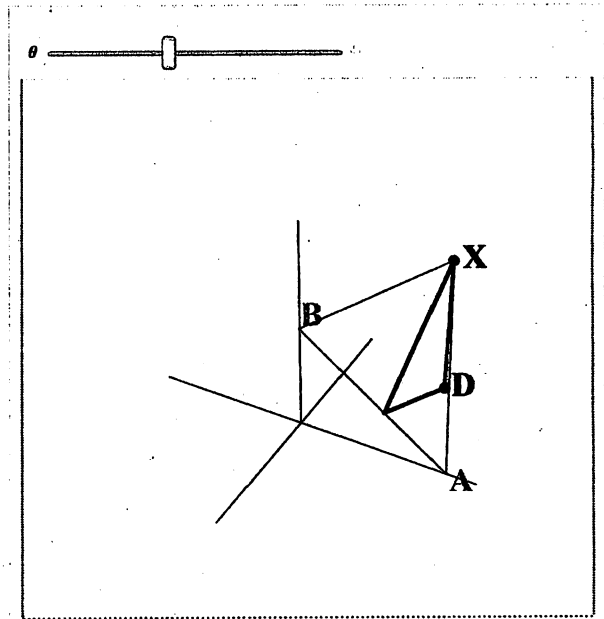
Step4 同値な条件を発見する。

θ の値を変化させ図形から同値な条件を発見する。

e の最大値 $\Leftrightarrow d$ の最大値

三角形 ABX の面積が最大となるときは

d が最大になるときである。前問題 (1) より



$$d = \frac{a|\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta - 1|}{2}$$

$$d = \frac{a\left|2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right|}{2}$$

$$0 < \theta < \frac{2\pi}{3} \text{ より } \frac{\pi}{6} < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \text{ となり、}$$

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき } d \text{ は最大になる。}$$

$$\text{このとき、} d = \frac{a}{2} \left| \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} - 1 \right| = \frac{a}{2}$$

$$e^2 = h^2 + d^2 \text{ より } e = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \dots \textcircled{3}$$

$$AB = \sqrt{\left(a + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}$$

$$AB = \sqrt{3}a \dots \textcircled{4}$$

三角形 ABX の面積の最大値 =

$$\frac{1}{2} \sqrt{3} a \times \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} \dots (\text{答})$$

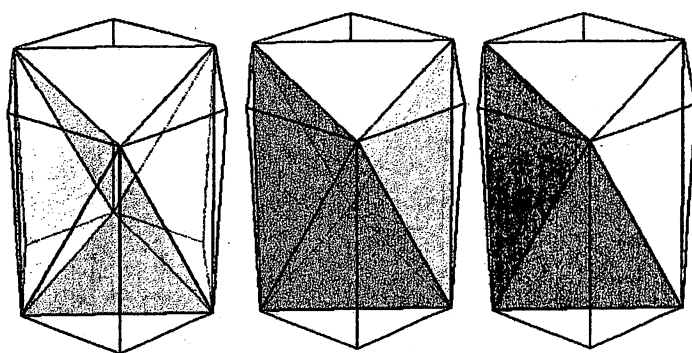
(3)

Opacity—立体図形の透明化

Mathematica6.0 以降 Opacity 機能が加わり立体図形を透明化することができるようになった。

Step5 立体構造を把握する。

条件を変えて立体図形を観察し発見することができる。



前問 (2) より $\theta = \frac{\pi}{3}$ であるので、求める立体

の体積は、高さ h 、1 辺の長さ a の正六角柱の体積から、三角柱 A-PXZ の体積を 6 個分引いた体積に等しい。

$$\text{正六角柱の体積} = \frac{6}{2} a^2 h \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 h$$

三角柱 A-PXZ の体積

$$= \frac{1}{3} a^2 h \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 h$$

求める立体の体積

= 正六角柱の体積 - 6 × 三角柱 A-PXZ の体積

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 h - \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 h \times 6$$

$$= \sqrt{3} a^2 h \dots (\text{答})$$

筑波大学 2009 年

xyz 空間内において、yz 平面上で放物線 $z = y^2$ と直線 $z = 4$ で囲まれる平面図形を D とする。 $(1, 1, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とし、 l のまわりに D を 1 回転させてできる立体を E とする。

(1) D と平面 $z = t$ との交わりを D_t とする。

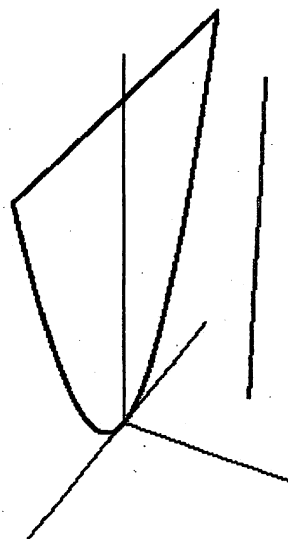
ただし、 $0 \leq t \leq 4$ とする。点 P が D_t 上を動くとき、点 P と点 $(1, 1, t)$ との距離の最大値、最小値を求めよ。

(2) 平面 $z = t$ による E の切り口の面積 $S(t)$ ($0 \leq t \leq 4$) を求めよ。

(3) E の体積 V を求めよ。

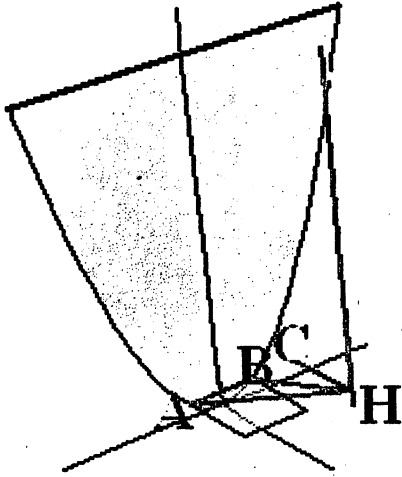
Step 1 初期条件の図形的イメージ

平面図形 D を作成する。



(1)

Step2 動的イメージにより最大値・最小値を発見する。



D は、 $x=0$, $y^2 \leq z \leq 4$ を満たす領域である。

$z=t$ とおくと

$$-\sqrt{t} \leq y \leq \sqrt{t}$$

D_t は $A(0, -\sqrt{t}, t)$, $B(0, \sqrt{t}, t)$ を両端とする線

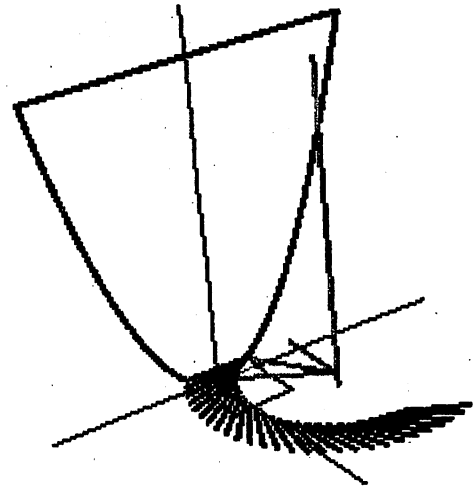
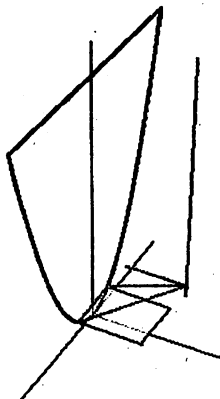
分である。点 H から直線 AB に垂線をひき、交点を C とする。

$H(1, 1, t)$, $C(0, 1, t)$ とする。

Step3 2 つのタイプが存在することを見出す！

PH の最大値を M, 最小値を m とする。

Type I $\sqrt{t} \leq 1$ のとき つまり $0 \leq t \leq 1$ のとき

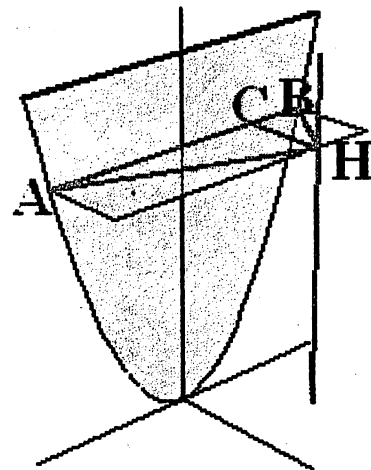


$$M=AH=\sqrt{1+(1+\sqrt{t})^2}$$

$$m=BH=\sqrt{1+(1-\sqrt{t})^2}$$

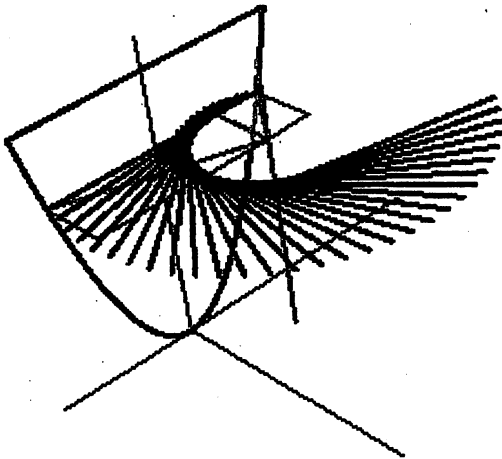
Type II $1 < \sqrt{t} \leq 2$ のとき

つまり $1 < t \leq 4$ のとき



$$M=AH=\sqrt{1+(1+\sqrt{t})^2}$$

$$m=CH=1$$



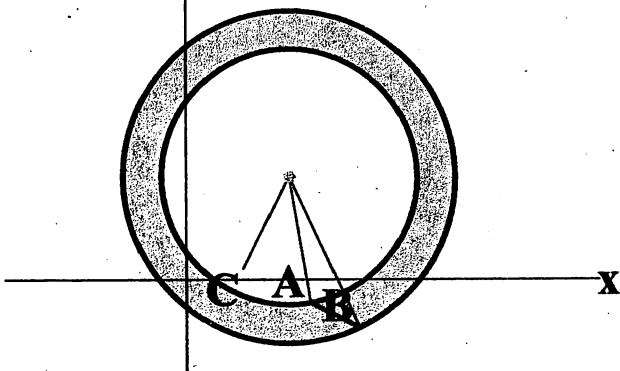
(2) Step4 $z=t$ による断面を見る。

$$S(t) = \pi(M^2 - m^2) \text{ である。}$$

Type I $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$S(t) = \pi \left\{ (2 + 2\sqrt{t} + t) - (2 - 2\sqrt{t} + t) \right\}$$

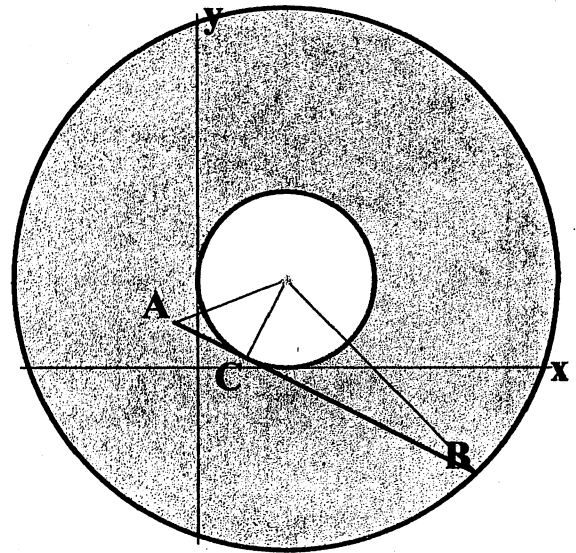
$$= 4\pi\sqrt{t}$$



Type II $1 < t \leq 4$ のとき

$$S(t) = \pi \left\{ (2 + 2\sqrt{t} + t) - 1 \right\}$$

$$= \pi(1 + 2\sqrt{t} + t)$$

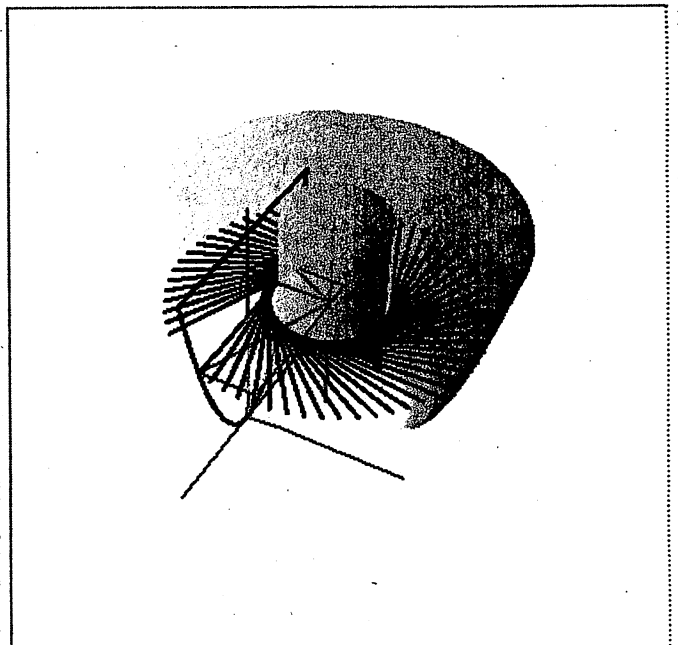


(3) Step5 回転体を見る！

$$V = \int_0^4 S(t) dt$$

$$= 4\pi \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt + \pi \int_1^4 (1 + 2t^{\frac{1}{2}} + t) dt$$

$$= \frac{45}{2} \pi$$

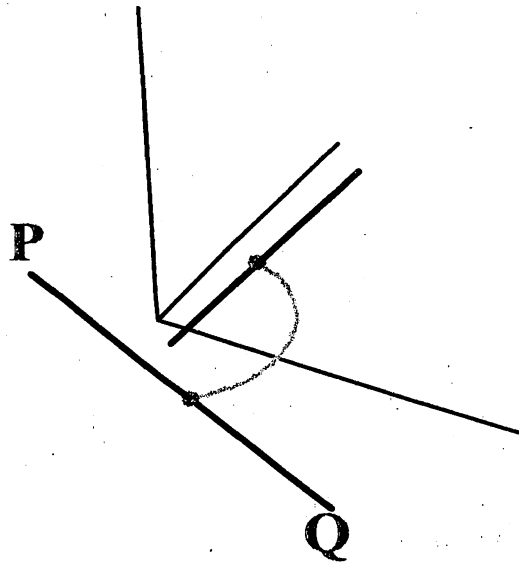


名古屋市立大学・薬学 2009 年

xyz 空間内の 2 点 $P(0, -1, 1)$ と $Q(1, 0, -1)$ を通る直線を l とし、直線 l を z 軸の周りに 1 回転してできる曲面と 2 つの平面 $z=1$ および $z=-1$ で囲まれた立体を A とする。次の問いに答えよ。

- (1) 立体 A を平面 $z=0$ で切った断面 B の面積 S_1 を求めよ。
- (2) 立体の体積 V を求めよ。
- (3) 立体 A を平面 $z=x$ で切った断面 C の面積 S_2 を求めよ。

Step1 初期イメージの作成



- (1) 線分 PQ 上の点を X とおく。

$$\overrightarrow{OX} = s \overrightarrow{OP} + (1-s) \overrightarrow{OQ} \quad 0 \leq s \leq 1$$

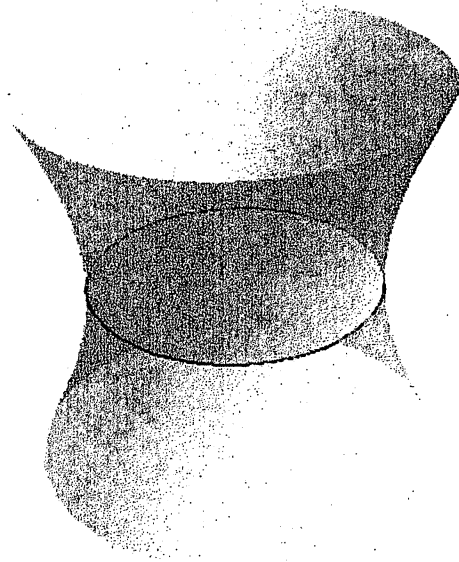
$$= s(0, -1, 1) + (1-s)(1, 0, -1)$$

$$= (1-s, -s, 2s-1)$$

z 軸と垂直な平面 $z=t$ ($-1 \leq t \leq 1$) と線分 PQ の

交点を求める。

$$2s-1=t$$



$$s = \frac{1+t}{2}$$

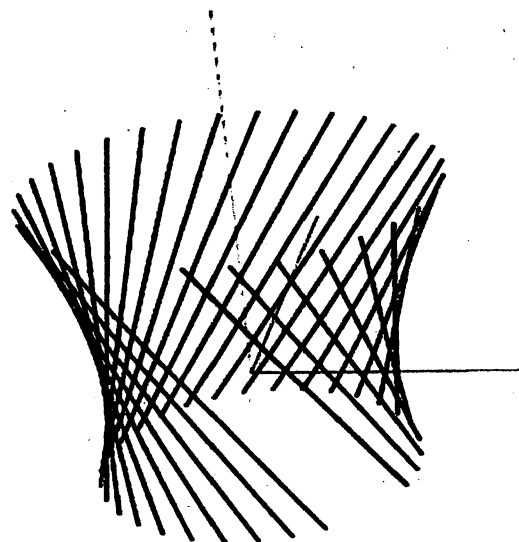
$$X\left(\frac{1-t}{2}, -\frac{1+t}{2}, t\right)$$

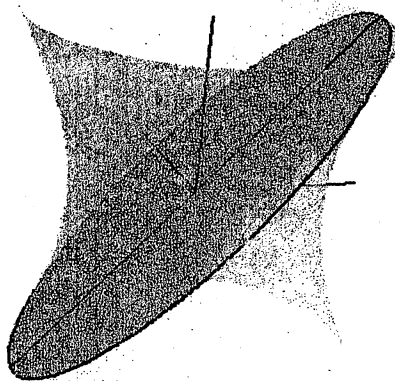
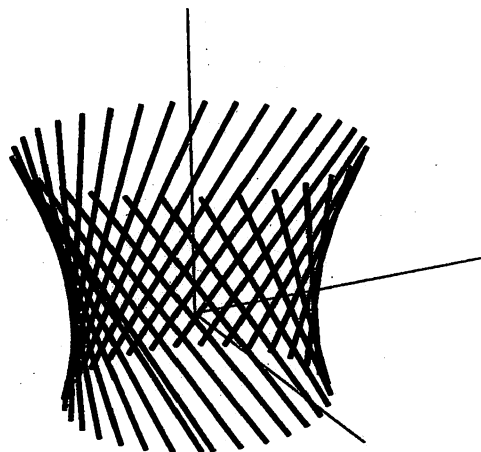
l が z 軸の周りに回転してできる曲面を平面 $z=t$ で切断した断面は円である。

$$S = \pi \left\{ \left(\frac{1-t}{2} \right)^2 + \left(\frac{1+t}{2} \right)^2 \right\} = \pi \frac{1+t^2}{2}$$

$t=0$ のとき

$$S_1 = \frac{\pi}{2}$$



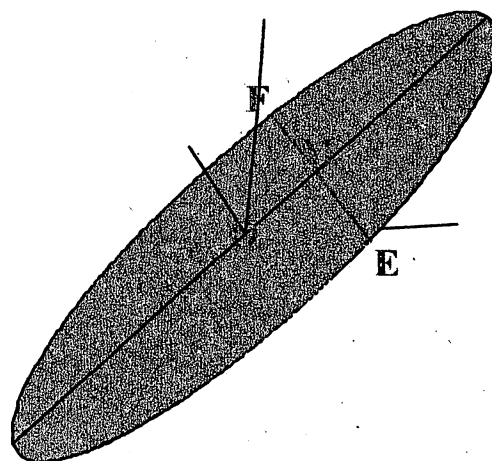
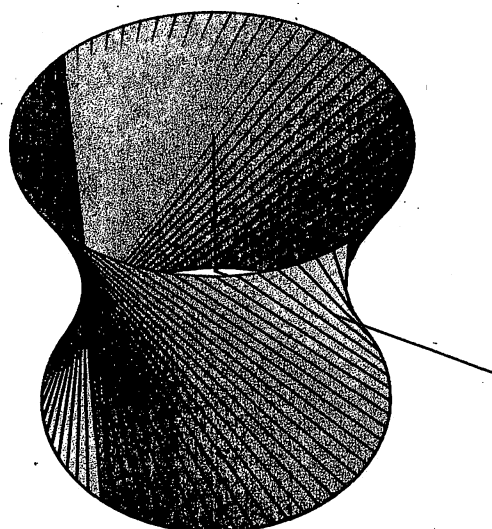


Step 2 断面を積分すれば体積になる。

$$(2) V = \int_{-1}^1 S dt = \pi \int_{-1}^1 \frac{1+t^2}{2} dt = \pi \int_0^1 (1+t^2) dt$$

$$= \frac{4}{3} \pi$$

L は 2 点 $E\left(t, \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}, t\right), F\left(t, -\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}, t\right)$
を両端とする線分である。



(3) 平面 $z=t$ 上の円盤 $x^2 + y^2 \leq \frac{1+t^2}{2}$ と
平面 $z=x$ の交線を L とする。

$$t^2 + y^2 \leq \frac{1+t^2}{2} \quad \text{より} \quad y^2 \leq \frac{1-t^2}{2}$$

$$-\sqrt{\frac{1-t^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$$

EF の中点を M とする。 $M(t, 0, t)$

$$u = \sqrt{2} t, EF = 2\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$$

$$S_2 = 2 \int_0^{\sqrt{2}} EF du = 2 \int_0^1 2\sqrt{\frac{1-t^2}{2}} \frac{du}{dt} dt$$

$$= 2 \int_0^1 2\sqrt{\frac{1-t^2}{2}} \sqrt{2} dt = 4 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

$$= 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$

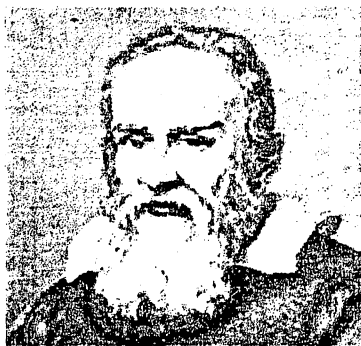
Brachistochrone の発見

—ガリレオ・ホイヘンス・ベルヌーイ—

16 世紀の後半ガリレイ (Galilei 1564~1642) は「振り子の等時性」「サイクロイド」「運動の法則」を発見した。ホイヘンス (Huygens 1629~1695) はサイクロイドの等時性を数学的に考察し、このサイクロイドを道具として活用し当時の航海術に必要な「振り時計」を考案した。ヨハン・ベルヌーイ (Johan Bernoulli 1667~1748) はニュートンとライプニッツに続いて、微分積分学の第3の発見者となった。ホイヘンスの等時曲線が最速降下曲線と同じであることを数学的に証明した。ルネッサンス後期に生きた3人の生涯と、3人に研究された「サイクロイド」について調べてみた。

Episode 1 旧抵抗勢力との闘争

1543 年コペルニクスの「天体回転論」(地動説)、バサルウスの「人体構造論」、タルターリア「アルキメデス著作集」、1545 年カルダーノ「アルス・マ



グナ」が公表される。自然科学の萌芽期中、ガリレオ・ガリレイは、1564 年 2 月 15 日 音楽家ヴィンチェンツィオ・ガリレオの長男としてイタリアのピサで生まれた。

1574 年 (10 歳) フィレンツェ近くの修道院に入る。ラテン語、ギリシア語、哲学を学ぶ。

1579 年 (15 歳) フィレンツェへ戻る。

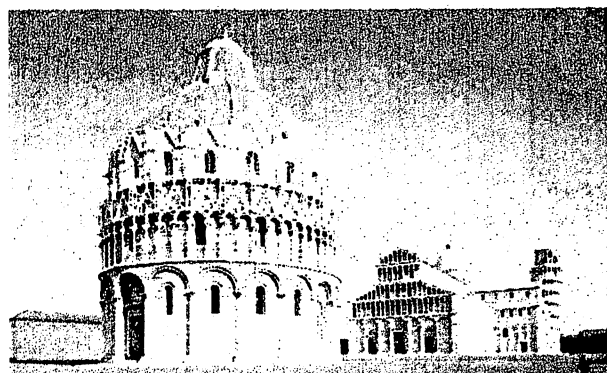
1581 年 (17 歳) 医師になるためにピサ大学に入学した。

当時のピサ大学はトスカナ地方の学術の中心であった。1640 年には、レーフェンブークによる顕微鏡の発明によって、マルピーギ (1628-94) 毛細血管を発見し血液循環説を完成し、1661 年『肺の構造についての書簡』を出版し肺循環における毛細血管について発表するなど、やがて医学の中心になる大学である。

ガリレイは医学の勉強を始める前に、キリスト教

会の基本的理念であるアリストテレス哲学を暗記しなければいけなかった。

ガリレオは、アルキメデスとユークリッドの書物に影響を受け、身の回りの様々な形態を持つ運動について興味を持った。



1583 年ピサ大学大聖堂のシャンデリアの動きを自分の脈拍を用いて観測した。当時、機械的な時計はなく、時間を計る手段として、医学生らしく脈拍を用いた。シャンデリアが長い弧として揺れる時間と中程度の弧として揺れる時間短い弧として揺れる



時間は同じであるアイデアに閃き、更に、実験室で振り子の実験を実施した

「時間計測方法」として落下する水滴を用いて時間を計測（水時計）し、一定の長さでは振動の周期は振幅に依存しない（振り子の等時性）を発見した。

1585 年ピサ大学を退学し医学を断念しフィレンツェへ戻る。

1587 年ローマへ行き、天文学者で数学者のクラビウス神父を訪問し認められる。

1589 年ピサ大学数学教授となった。特に、運動論「自由落下と振り子」に興味を持つ。

大学での旧抵抗勢力であるアリストテレス派の支配する考え「落下運動の速さは物体の重さに比例する。」に対抗する手段としてガリレオは、実験や観測による検証の意義を確立した。

1590 年ピサの斜塔で公開実験を実施



「実験的にも理論的にも落下運動の速さは物体の重さには依存しない。」ことを説き、アリストテレスの運動論が誤りであることを主張した。

1591 年父ビンツェンチオが死亡し、経済的に困窮状態に陥る。

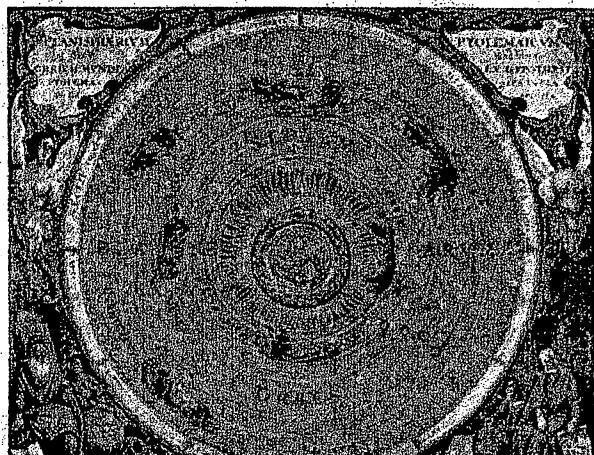
アリストテレス派と対立し、大学と昇給交渉が決裂しパドヴァ大学へ。パドヴァ大学には斜塔がないために落下実験ができず、自由落下運動を斜面に沿った運動で実験した。自由落下加速度を導入しないで、比例計算で解明した。斜面が同じ高さのとき、滑り落ちる時間は通過距離に関係する。

コペルニクス宇宙説が正しいことが、広まってきた。「コペルニクス宇宙説」とは

- (1) 太陽は宇宙の中心である。
- (2) 地球は宇宙の中心ではなく、また不動でもなく、運動するもので1日1回転する。

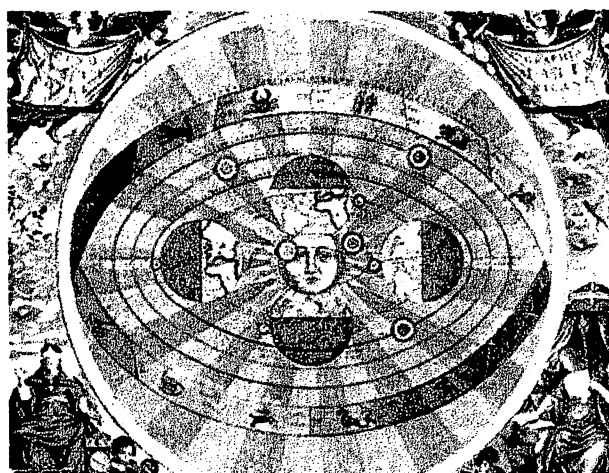
教会側が太陽中心説に抵抗した理由として

- (1) 地球が宇宙の中心でなくなった事は、アリストテレス宇宙論の消滅を意味する。
- (2) 天球の存在が消滅して天国の存在が消滅する。



【教会側プトレマイオス宇宙上図】

【ガリレイ側コペルニクス宇宙下図】



教会と対立が深まる中、事件が起こった。

ジョルダノ・ブルーノ

(1548~1600) 宇宙の無限性を確信し恒星は無数の太陽であり、太陽系を考えた。1600 年 2 月 17 日ジョルダノ・ブルーノは「裁かれている自分よりも、裁かれているあなた方のほうが、真理の前



におののいているのではないかと」言い残して、ローマ教会に捕らえられて火刑にされた。

1604 年斜面に沿った加速度の法則を発見。(不完全)
1608 年オランダの眼鏡師リッペルスハイムは望遠

鏡を発明し、新式眼鏡として発売する。

1609年 自由落下運動は時間に関して一様に加速する原理を発見。

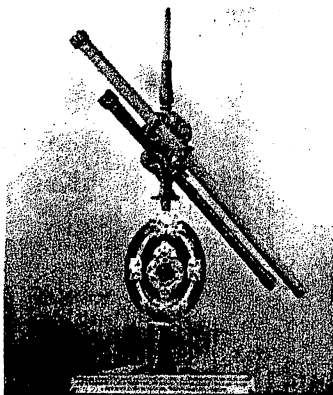
原点から y 軸に沿って落ちる自由落下物体は

$v = \sqrt{-2gy}$ 速度を増加することを発見。

投射体の運動は、一様直線運動と自由落下運動から成立し放物線に沿って動く（ガリレオの法則）

1609年ベネチアのサンマルコ広場で実験した倍率

は9倍であったが、ガリレオは倍率を30倍に改良し、木星の衛星を発見し、太陽の黒点も発見し、自転していることも発見する。コペルニクス説を決定的に確信させる証拠を発表した。更に、ケプラーが「火星は太陽を焦点とする楕円軌道を動く。」と「新天文学」を発表した。



1610年『星界の報告』を出版 木星の衛星を発見し、コペルニクスの予言が的中したことを示す。

1610年トスカナ大公首席数学者・哲学者としてフィレンツェへ行く。フィレンツェでは大学で講義する必要はなく、研究と著作に専念した。

1611年ローマへ行き、法王パウルス5世と会見する。ローマのリンチェイ学士院の会員になる。

1610年～1633年の間、コペルニクス宇宙論が正しい事を証明する研究を行うことになる。コペルニクス説を擁護することは、ローマ教会に深刻な打撃を与え、スコラ哲学や教会と徹底的に衝突することになる。更に、イエズス会の神父と太陽の黒点に関する論争をする。教会側からは、「数学は悪魔の術だ。数学者を追放せよ。」と攻撃される。

1613年「太陽黒点とその諸象の沿革および証明」を出版。

1614年ネイピア「対数の驚くべき法則の説明」を出版する。

1615年ガリレオ異端審問所に告発される。

1616年ローマの審問所でコペルニクス学説の禁止『地動説』を否定命令が出される。コペルニクス説は聖書に反するとされ、異端宣言された。

地動説を擁護すること、教授することを禁止された。

1618年10月～11月3つの彗星が出現 ドイツでは新教徒と旧教徒が争い30年戦争になる。

彗星の件でイエズス会の神父と対立

1632年『天文対話』を出版

神学者は「天文対話」を禁書にする計画をたてて、ローマから回収してしまった。

1633年ガリレオ裁判始まる。自宅監禁を命令される。

ローマの異端審問所において、聖書の上に手を取り自説の廃棄を誓わされた。『それでも地球は動く』はガリレオの有名な言葉である。デカルトは、身の危険を感じコペルニクス説を支持した論文を隠した。

1637年盲目

1638年7月『新科学対話』オランダから出版

1642年1月8日フィレンツェ郊外のアルチェトリの別荘で、ビビアーニとトリチェリらとの助手とともに『新科学対話続編』を編集し『落体の法則』『慣性の法則』を発表している。この時期に「サイクロイドについての2つの発見」をしている。

(1) サイクロイドの弧の長さが、生成円の直径の4倍であることを、ひもで弧の長さを計測して、円の直径と比較した。

(2) サイクロイドの面積は、円の面積の3倍であることを、鉛の板を切り取って重さを計測して比較した。

ガリレオは実験と数学を体系的に結びつけようと試みた。実験では正しいが、数学的証明をすることは当時の数学ではできなかった。

1642年弟子達と数学の対話をしながら死亡したとされている。この年12月ニュートンが、誕生している。ガリレオは、近代力学の基礎を完成近代科学の父と呼ばれた。実験と観測から得られるデータを数学的に確かめながら理論化する方法は、この時代にはかなりの進歩的思想であった。あまりにも進歩的だったため、宗教社会や保守的な学者から攻撃された。ガリレオのこの新しい手法は、イタリアではじまりドイツ・フランス・イギリスへとヨーロッパ全体に拡散していった。

Episode 2 サイクロイドの実用化

クリスチャン・ホイヘンス

(Huygens 1629~1695) は
1629 年 4 月 14 日オランダ
のハーグで生まれる。

父は政治家であり、フランス
のメルセンヌやデカルトと
親交があった。16 歳まで、
父親と家庭教師に教育され
た。

1645 年 (16 歳) にライデン大学入学し法律と数学
を学ぶ。この頃から、数学的閃きを持っていた。

ガリレオが発表した「2つの爪から釣り下げられ
た鎖は、放物線になっている。」の説は誤っているこ
とを発見した。この「鎖の曲線問題」はライプニッツ
(1691 年) とヨハン・ベルヌーイ (1692 年) によ
って、カタナリーとして解かれるまで未解決問題で
あった。

1647 年 (18 歳) プレダにある学校に 2 年間学んだ、
以後研究生活に入る。

1650 年 (21 歳) 「液体に浮かぶものに関する 3 巻」

1651 年 (22 歳) 「双曲線・楕円・円の求積に関する
諸定理」を出版。

1653 年 (24 歳) 「屈折・望遠鏡に関する論文」

1654 年 (25 歳) 「円の大きさに関する発見」

1655 年 (26 歳) レンズの新しい研磨法を開発し、
解像力が増加した 92 倍の望遠鏡を製作して、土星の
衛星タイタンを発見し、土星の輪の存在を示す。

1656 年 (27 歳) 「水平な直線上における完全弾性衝
突の法則」を発表。

精密な天体観測や実験をするためには、時間の測
定を正確にする必要になった。航海用時計も待望さ
れ「時計製作」が軍事的かつ経済的にも重要になっ
てきた。

以後、ホイヘンスは 1656 年~1693 年の間、時計
の完成に従事することになる。

1657 年 (28 歳) 確率に関する最初の論文「賭博に
おける計算について」を発表。

1 月 12 日振り子の等時性を用いた「振り時計」を

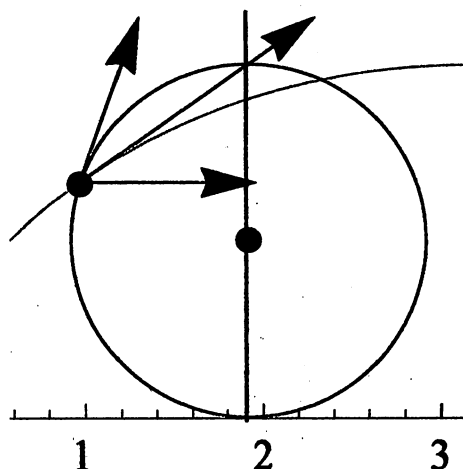
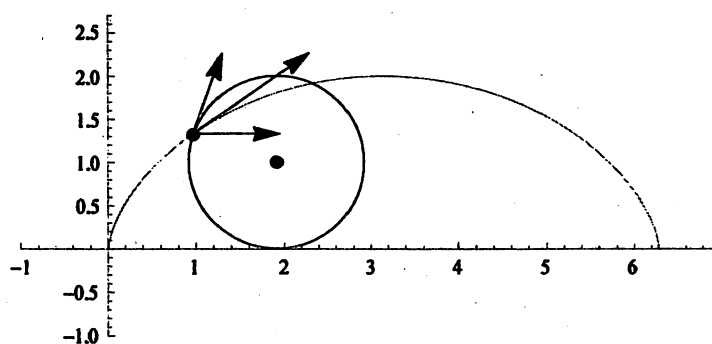


製作。「振子は等時である。」というガリレオの主張
は誤りであることを発見し「振子が等時である性質
をもつのは、垂直方向からわずかな角のときであり、
60° では適用できない。」と指摘した。振り時計を改
良することに強い関心を持つ様になり、より正確で、
誤差の少ない時計を製作するためには、始点の高さ
に関わらずその点が同時に底に到達する曲線（等時
曲線）を探さなければならなかった。

こうして、ホイヘンスは望遠鏡や時計の製作技術
者としてデビューし、時計製作の過程で、等時曲線
の研究がテーマとなり、物理学者・数学者として成
長していく。

当時サイクロイドは、初等的方法で解法できたの
で、数学者達に熱心に研究されていた。

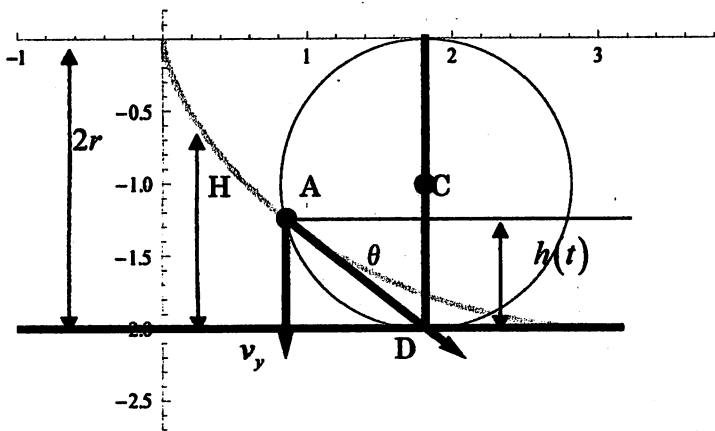
トリチェリはガリレオの投射体の運動論を発展さ
せて、「接線延長法」を発見した。



「サイクロイドの各点では、その点と生成円の頭
頂点にある点とを結ぶ線はサイクロイドに接する。」
ホイヘンスも、サイクロイドを中心に研究している。

1658 年 6 月サイクロイドに関する 6 つの懸賞問
題に参加し 4 問を解く。その競技後、「等時曲線」を
探していたホイヘンスは、

「質点がどのようにして、逆さまのサイクロイドに沿って回転するか。」をテーマに研究し、「サイクロイドが等時曲線である。」という結論に達した。
 ホイヘンスの説明は以下のものであった。



r ; 生成円半径, H ; 円上の質点の高さ

$h(t)$; 時間 t における質点の高さ

$h(0) = H, \angle ADC = \theta$

ガリレオの理論より, $|v(t)| = \sqrt{2g(H - h(t))}$

『速度の方向はサイクロイドの接線方向である。』
 (トリチェリの接線延長法) によって、

$$|CD| = h(t)$$

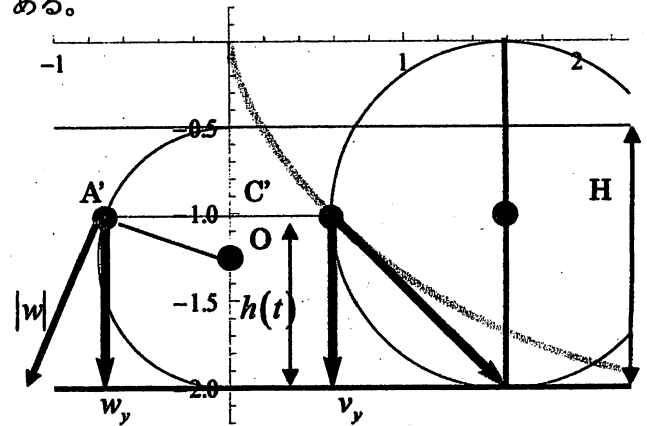
$$v_y = |v(t)| \cos \theta, AD = 2r \cos \theta$$

$$h(t) = 2r \cos^2 \theta \text{ より } \cos \theta = \sqrt{\frac{h(t)}{2r}}$$

$$v_y = \sqrt{\frac{g}{r}} \times \sqrt{h(t)(H - h(t))}$$

$h(\tau) = 0$ となる時間 τ をを見つけることは、現代における「微分方程式の問題」へと帰着するのだが、完全な解法には、更に 20 年余りの日時を要した。
 微分方程式の発見されていないこの時代、ホイヘンスは、「補助運動」という独自のアイデアを思いついた。これによって、「サイクロイドに沿って回転する点が底に到達する時間は、その始点の高さには依存しない。」つまり、「サイクロイドが等時曲線である。」ことを発見した。

O は中心、 C' は A' の鉛直方向の直径への射影である。



質点が直径 H の円のまわりを速度 w で頭頂点からスタートし一様に移動する。

時間 t における高さ $h(t)$ の点における速度の垂直成分を求める。

$$w_y = |w| \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{|C'A'|}{OA'} = \frac{2|C'A'|}{H} = \frac{2}{H} \sqrt{h(t)(H - h(t))}$$

$$w_y = \frac{2|w|}{H} \sqrt{h(t)(H - h(t))}$$

鉛直方向の成分が等しい

つまり、 $w_y = v_y$ と仮定すると

$$\frac{2|w|}{H} \sqrt{h(t)(H - h(t))} = \sqrt{\frac{g}{r}} \sqrt{h(t)(H - h(t))}$$

つまり、 $2|w| = H \sqrt{\frac{g}{r}} \dots \textcircled{1}$ と仮定するならば、「円

のまわりを回転する点の鉛直方向の射影は、サイクロイドのまわりを回転する点の鉛直方向への射影と同じ運動をするだろう。」と考えた。

円周上を一様に移動するので

$$|w|\tau = H\pi$$

$$\tau = \frac{H\pi}{|w|} \text{ となり、} \textcircled{1} \text{ を代入して}$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \text{ となる。}$$

双方の点は時間 $\tau = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ で底に到達する。

時間から H が消去されてしまう。

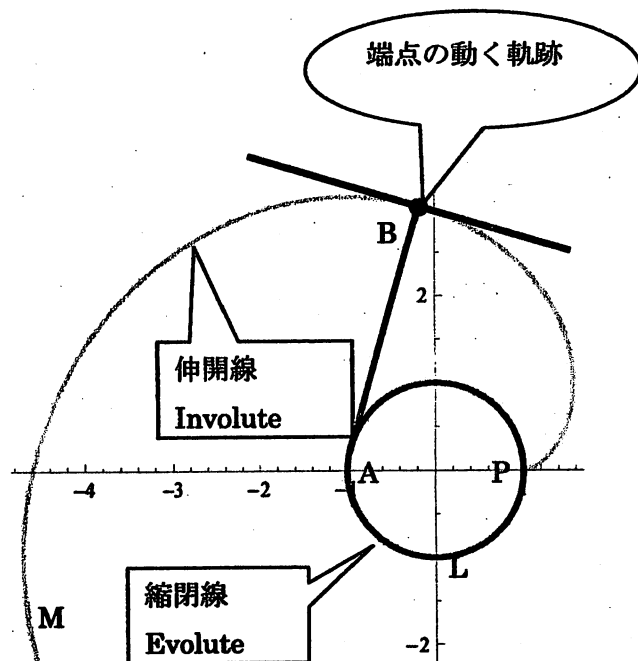
サイクロイドに沿って回転する点が底に到達する時間 τ は、始点の高さ H に依存しない。

『サイクロイドは等時曲線である。』ことを見つけた。ただし、これは厳密な数学的証明とは言えなかった。

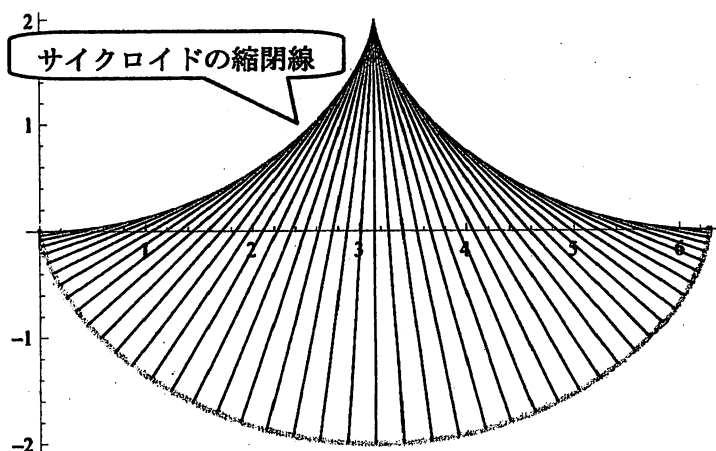
以後、サイクロイドに従う振子が等時であることを利用して振子時計を作成を試みた。そのためには、サイクロイドに沿って動く振子（サイクロイド振子）を製作することがテーマになった。この問題を、「展開曲線の問題」として解いた。

曲線 L （円）があり糸が巻かれている。 L 上にある点 P に、糸の端があるとす。 P から、 L のまわりに糸を緩むことなく張ったまま解き開いていくとき糸の端点によって曲線 M が描かれる。

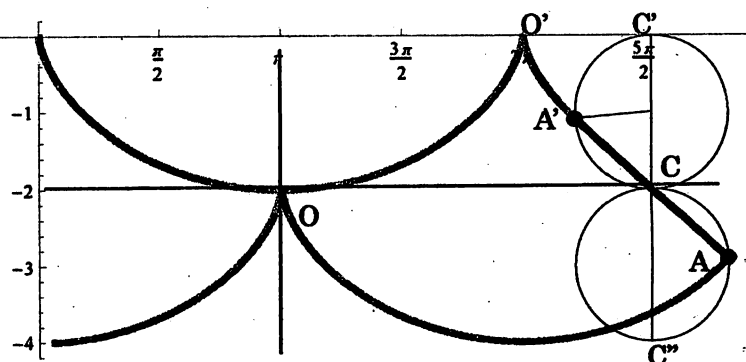
ホイヘンスは、曲線 M を L の展開曲線（伸開線）と呼び、伸開線と縮閉線の理論を実験的に展開した。



『ピンと張った糸 AB と伸開線との接線は垂直である。』『伸開線の縮閉線は唯一である。』『 M の法線が縮閉線 L の接線である。』ことを推測し、サイクロイドの縮閉線は、半周期移動したサイクロイドであると推測した。



【ホイヘンスの方法】



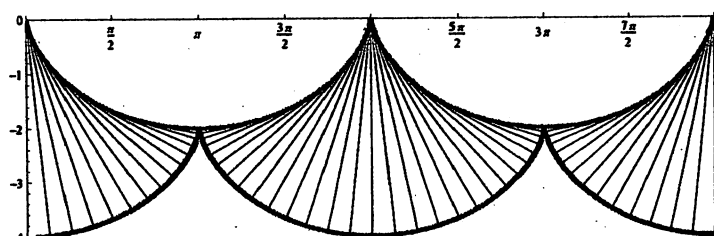
上図のように周期が π ずれた同じサイクロイドがある。半径 1 の 2 個の生成円の接点を C, C', C'' を生成円の直径上の、 A, A' をサイクロイド上の点とする。下部生成円の弧 $CC''A$ と直線 OC の長さが等しい。上部生成円の弧 $C'A'$ と直線 $O'C'$ の長さが等しい。

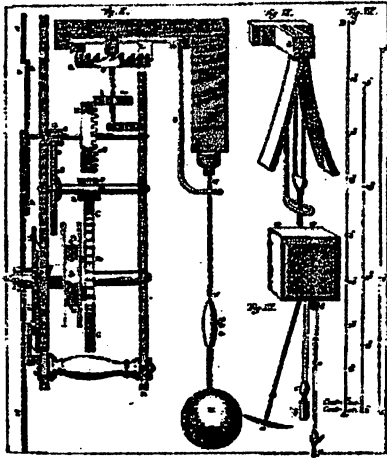
弧 $A'C' =$ 弧 AC''

$\angle A'CC' = \angle ACC''$

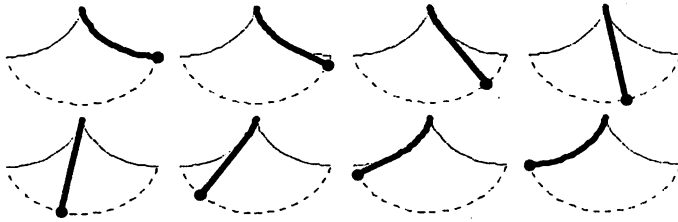
点 A', C, A は同一直線上にある。

$A'C$ は上のサイクロイドの接線、 CA が下のサイクロイドの法線になることを示せば良かった。





1659 年「遠心力について」「土星の体系」「サイクロイドの等時性を発見」を発表した。その中で、時計の振子の運動を調節するためにゼンマイを利用し、振子の等時性からのズレを補正するためサイ



クロイド形の振幅抑制装置（左図）を考案した。

「サイクロイド振り子を製作するための当て板はサイクロイドである。」という結論に到達した。

1663 年ロンドン王立協会会員になる。

1664 年複合振子の振動中心を一般的に決定

1666 年パリ王立科学学士院会員になる。

1672 年～1676 年ライプニッツに数学を教える。サイクロイドの等時性に関する問題も話題になった。

1673 年『振子時計—あるいは時計に応用された振子の運動についての幾何学的証明』を発表した。

1678 年方解石を通過する光が複屈折することから、偏光の現象を発見した。

1682 年プラネタリウムを設計・製作する。

1684 年ライプニッツ「微分積分法」を発表

1687 年ニュートン「プリンキピア」出版

ライプニッツは『物体がある曲線 $y(x)$ に沿って滑り落ちるとき、その鉛直方向の速度 $\frac{dy}{dt}$ がどこでも一定

な $-b$ であるような曲線（ライプニッツの等速降下曲線）を求めよ。』を公開問題として提案した。

ホイヘンスは、解を証明も説明もなく求めた。

1689 年ニュートンと会う

1690 年「光論」「重力原因論」出版

ヤコブ・ベルヌーイ「ライプニッツの等速降下曲線」を微分方程式の理論を使って解く。

1691 年ヨハン・ベルヌーイ「カタナリー」を求める。

1693 年ライプニッツ「トラクトリックス曲線」を求める。

1695 年（66 歳）ハーグにて死亡

ホイヘンスはガリレオの間違いを多く指摘している。ホイヘンスの主な業績は「天文学」「力学」「光学」の 3 分野であり、ガリレオの研究を発展させた後継者と言える。

ホイヘンスは航海用時計の実用化を試みたが、結局サイクロイド時計は、航海用時計として実用化されず、1735 年イギリスのジョン・ハリソンが平衡輪付きゼンマイ時計

を航海用時計として実用化した。

船が出港時に母

港の時刻に時計

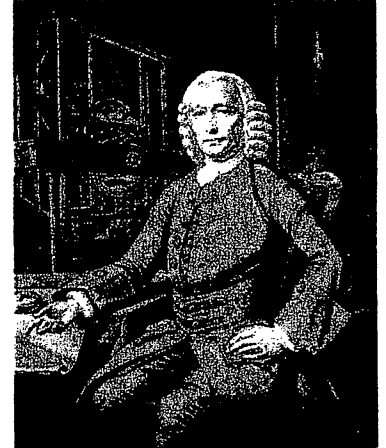
を合わせ、その時

計が正午を指した

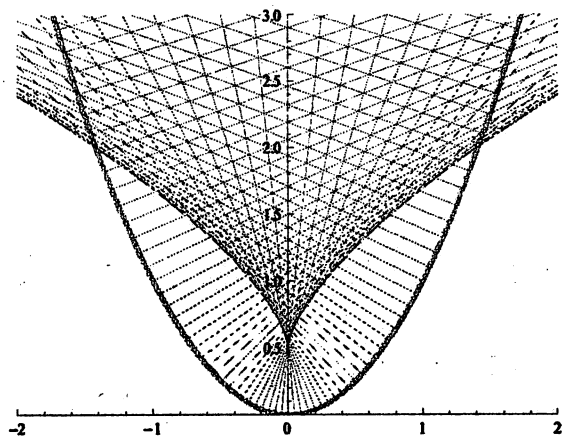
時の太陽との角度

を測定することで

経度を測定した。



しかし、サイクロイド振り子を活用した時計製作の研究を通して、等時曲線、縮閉線、伸開線等の曲線理論を考案し探究をした。彼は、サイクロイドのみならず、



放物線 $y = x^2$ の縮閉線は $y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$ である。

これは単なる振り子の思考を超えて曲線理論の誕生を意味していた。やがて、この曲線研究に第 2 次導関数が導入され、微分幾何学へと発展していく。

Episode 3 人類の革命的アイデア

1672年から1676年パリにおいて、ライプニッツはホイヘンスから数学を学んだ。この2人の交流は、ライプニッツに大きな影響を与えた。

ライプニッツは1684年「微分積分法」を発表した。

1686年6月「深遠な幾何学および不可分と無限の解析について」を発表、その中において「逆接線の方法」は、現代の微分方程式の解法にあたる。

ライプニッツは、独自の記号法を導入し微分・積分の概念を誰にでも簡単に扱えるようにした。

ヤコブ・ベルヌーイ (Jakob Bernoulli 1654-1705) は33歳にして、数学に目覚めた。ライプニッツの論文「新しい数学」を熟読して、この新しい数学を自分のものにした。その後、バーゼル大学の数学教授になり未解決問題に微分積分学を活用した。特に、身近な自然現象に現れる曲線を研究した。弟のヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli 1667-1748)

も兄の影響により数学を勉強した。1690年パリでロピタルに微分積分を教えた。積分記号はライプニッツが作り、「積分」という用語はヨハン・ベルヌーイが作り、兄ヤコブ・ベルヌーイが発表した。



Jakob Bernoulli



Johann Bernoulli

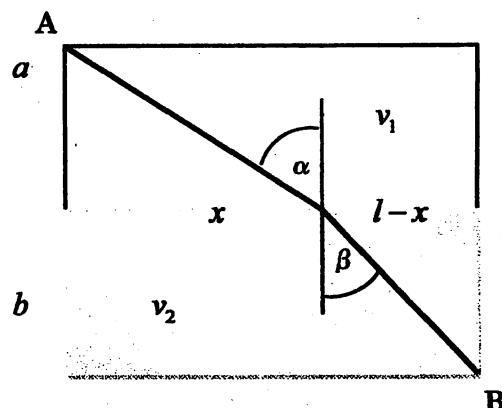
ヨハン・ベルヌーイは、ライプニッツの微分積分学を幾何学へ応用した。微分方程式を自然科学の問題に適用した。ライプニッツとベルヌーイの研究した例をいくつか挙げてみよう。

【例1】 ライプニッツによるスネリウスの法則の証明

フェルマーは、光の速さが v_1, v_2 である2つの媒質がある。AからBまで最短時間で光が到達する角 α, β とすると、 $\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}$ (スネリウスの法則) の

証明を考えていた。(フェルマーの原理)

ライプニッツはこのフェルマーの原理を3行で解いた。



[フェルマーの原理]

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{v_2} \text{ が最少となる } x \text{ を}$$

求める。Tをxで微分すると、

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{-2(l-x)}{2\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \sin \beta = \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} \text{ より}$$

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2} \text{ のとき } \frac{dT}{dx} = 0 \text{ になる。}$$

更に、2回微分すると、

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{1}{v_1} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2} \frac{b^2}{(a^2 + (l-x)^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

$$\text{つまり } \frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2} \text{ のとき、Tは極小値になる。}$$

ライプニッツは、1684年この計算を行った。

【例2】等速降下曲線

1687年9月ライプニッツは「文壇ニュース」誌において『物体がある曲線 $y(x)$ に沿って滑り落ちていく

とき、その鉛直方向の速度 $\frac{dy}{dt}$ がどこでも、与えられ

た $-b$ に等しいような曲線を求めよ。』

ライプニッツの等速降下曲線 (Isochrone) という問題を出题した。

10月にはホイヘンスが証明なしの解を求めた。

1690年ヤコブ・ベルヌーイが一般的な解を求めた。

「積分」という言葉が初めて使われた問題である。

ガリレイの理論 $v = \sqrt{-2gy}$ より

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -2gy$$

の両辺を $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ で割る

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} + 1 = -\frac{2gy}{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

鉛直方向の降下速度が一定なので、

$$\frac{dy}{dt} = -b \text{ を代入}$$

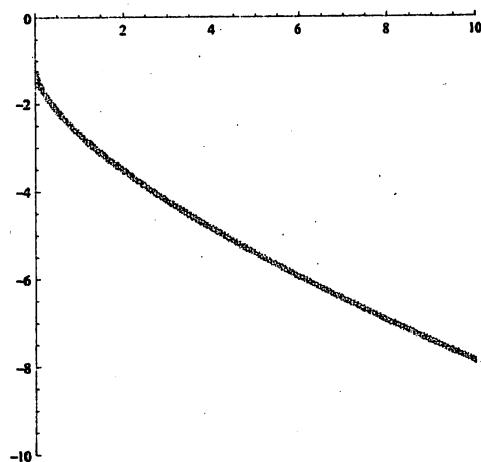
$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 = -\frac{2gy}{b^2}$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = -1 - \frac{2gy}{b^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\sqrt{-1 - \frac{2gy}{b^2}}$$

微分方程式を解くと

$$x = \frac{b^2}{3g} \left(-1 - \frac{2gy}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

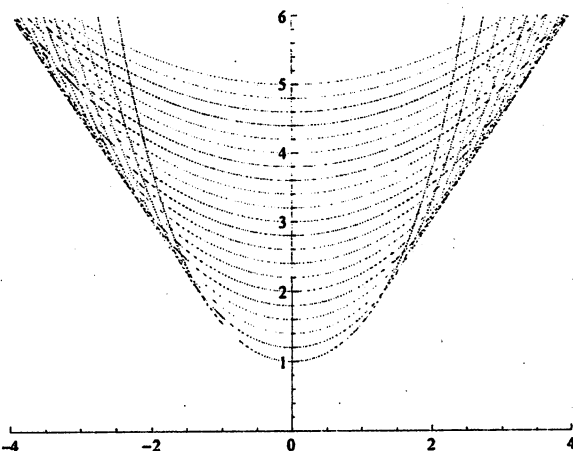


【等速降下曲線】

このようにして、ヤコブ・ベルヌーイは微分積分法を利用して解を見つける方法を見つけ、バーゼル大学は当時、数学の最先端を研究する大学になった。この方法によって、未解決問題を解いていった。

【例3】カタナリー曲線

ガリレオは1638年に「2つの爪から釣り下げられた鎖が放物線になる。」と提案した。1691年このカタナリー問題をライプニッツとベルヌーイによって微分積分を使って解かれるまで未解決問題であった。



微分方程式を作成して、釣り下げられた曲線は、双

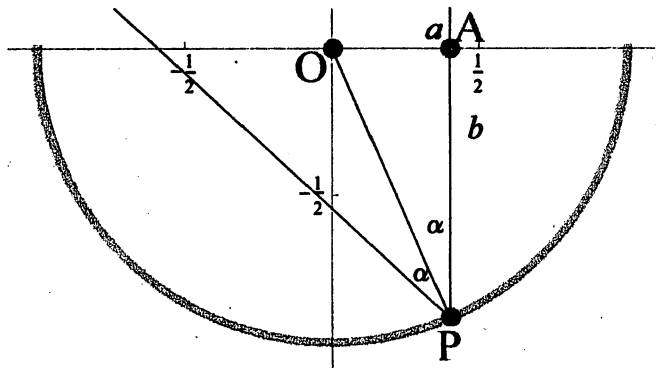
曲線関数 $\cosh \frac{x}{c} = c \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{2}$ (カタナリー) である

ことを示した。

【例4】円の焦線問題

1692年ヨハン・ベルヌーイ『平行な放射の円の焦線』によって、包絡線を研究した。包絡線とは、直線束が覆っている領域の境界になっている曲線の方程式を求めることです。

半円 $x^2 + y^2 = 1 \quad y \leq 0$ の上から平行な光が照射される。この光がこの円で反射するとき、直線束が得られる。この直線の包絡線の方程式を求めた。



中心Oから距離a離れている点Aに垂直に照射する光が半円と接触する点をPとする。

$$b = \sqrt{1 - a^2}, \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

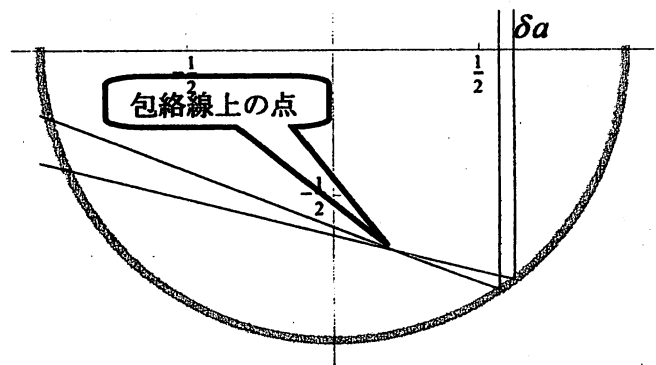
反射光線の傾きは

$$\tan\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan 2\alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)$$

反射光線の方程式は

$$y = -b + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) (x - a)$$

$$y = \frac{2a^2 - 1}{2a\sqrt{1 - a^2}} x - \frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}}$$



$-1 < a < 1$ の範囲で動く時、この直線族の通過領域の境界線の曲線（包絡線）を求める問題に帰着する。

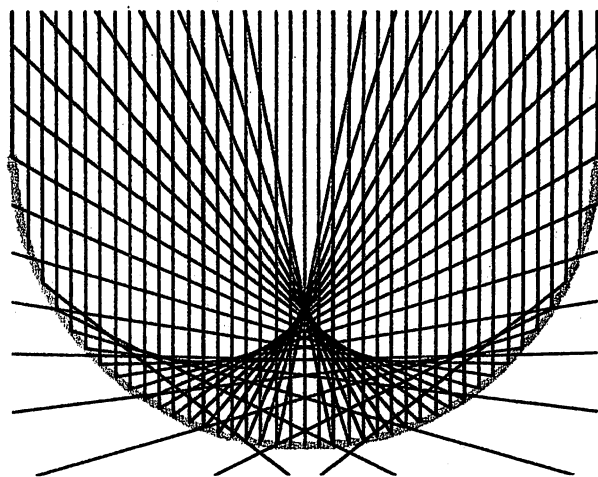
1694年ライプニッツは「偏導関数」という概念を導入して、この問題を解いた。

aとa+delta aに関する直線を作成する。（上図）

$\delta a \rightarrow 0$ のとき、2本の直線の交点は包絡線上の点になる。

この交点は、xを固定し、 $y = \frac{2a^2 - 1}{2a\sqrt{1 - a^2}} x - \frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}}$ をaに関する関数と見

なし、aに関して微分した偏導関数 $\frac{\partial y}{\partial a}$ を導入した。



$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{-a^3 + x}{2a^2(1 - a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

が極大値となると、 $\frac{\partial y}{\partial a} = 0$ と

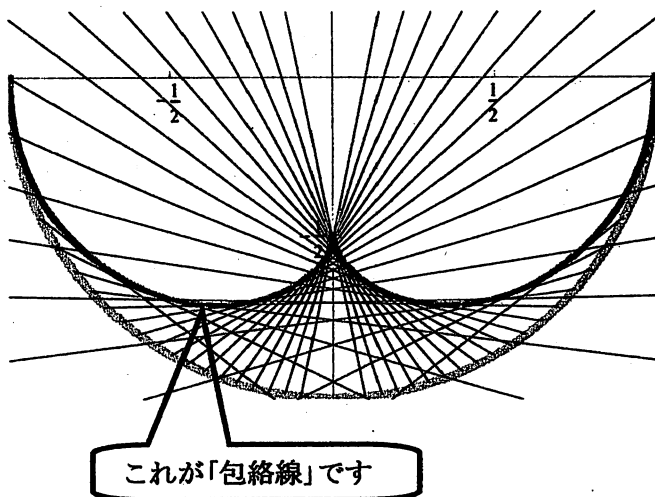
なるときは、 $x = a^3$ のときであり、つまり、 $a = x^{\frac{1}{3}}$ を

$$y = \frac{2a^2 - 1}{2a\sqrt{1 - a^2}} x - \frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}}$$

へ代入すると、包絡線、

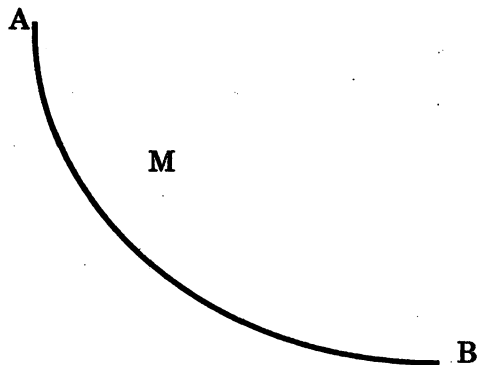
$$y = -\left(\frac{1}{2} + x^{\frac{2}{3}} \right) \sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}$$

を得ることができる。



【例5】「最速降下線の研究」(Brachistochrone)

ガリレイは1638年、「AからBまで滑り落ちる物体は、円がすべての曲線の中で最も速い」と主張した。



【ガリレイの最速降下曲線】

1696年ヨハン・ベルヌーイは、このガリレイの間違いを指摘するために、公開コンテストを開催した。

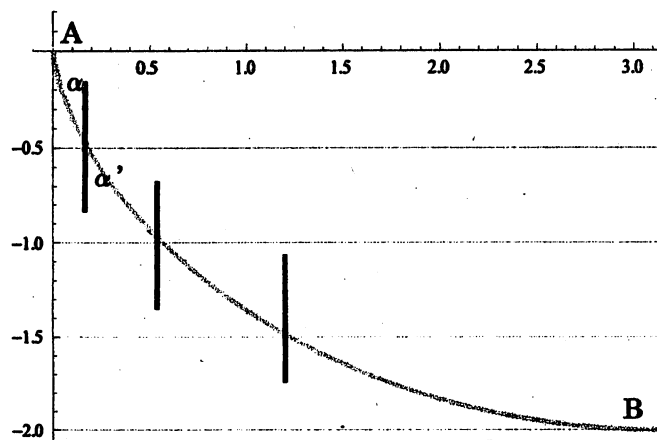
「垂直な平面に2点A, Bが与えられたとき、粒子MがAを出発して、自重だけの影響下で降下し、最短時間でBに到達するような道AMBを決定せよ。」を出題し最速降下曲線を発見する公開コンテストを実施した。

このコンテストにニュートンも匿名で参加した。ヨハンは「ライオンが誰であるかは、その足跡からわかる」と述べていたことから、匿名参加がニュートンであることを見抜いていたと言われている。

締切日にまでに、数人の参加があり、その解答はどれも正しかったが、ヨハンの解答が最もエレガントであった。

ヨハン・ベルヌーイの思考法は、A, Bを含む垂直な平面を水平な多くの層にスライスし、各層に対して光の屈折に関する「フェルマーの原理」を類推した。下降する質点は、層を次々と横切って行く。

速度は層から層にかけて変化するのだから、力学的問題を光学的問題に置き換えて考えた。



【屈折のフェルマーの原理】

フェルマーの原理

$$\frac{v}{\sin \alpha} = \frac{v'}{\sin \alpha'} = \frac{v''}{\sin \alpha''} = \frac{v'''}{\sin \alpha'''} = K \quad \text{及び}$$

ガリレイの降下速度の法則 $v = \sqrt{2gy}$ を活用した。

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad \text{より} \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \times \sqrt{2gy} = K$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{K}{\sqrt{2gy}} \quad \text{両辺を2乗して}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{K^2}{2gy} \quad \text{より} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{K^2}{2gy} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{K^2 - 2gy}{2gy}} \quad \text{より} \quad \sqrt{\frac{2gy}{K^2 - 2gy}} dy = dx$$

$$\sqrt{\frac{y}{\left(\frac{K^2}{2g}\right) - y}} dy = dx \quad \text{ここで、} c = \frac{K^2}{2g} \text{ とおくと}$$

$$\sqrt{\frac{y}{c - y}} dy = dx \quad \text{が得られる。} \quad y = c \times \sin^2 u \text{ と置換積分}$$

$$\text{分すると} \quad \frac{dy}{du} = 2c \sin u \cos u = c \sin 2u$$

$$\int dx = \int \sqrt{\frac{c \sin^2 u}{c - c \sin^2 u}} \frac{dy}{du} du$$

$$x = \int \frac{\sin u}{\cos u} \times c \sin 2u du$$

$$x = c \int (1 - \cos 2u) du \text{ となる。}$$

$$\begin{cases} x = cu - \frac{c}{2} \sin 2u \\ y = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \cos 2u \end{cases} \quad \text{となりサイクロイドを得る。}$$

ベルヌーイは「最速降下の曲線はサイクロイドである。」と証明した。

「サイクロイドは等時曲線である。」(1673年ホイヘンスによって発見) ことを数学的に示す。つまり、上下ひっくり返したサイクロイド上に小球が存在し、

底まで到達するのに要する時間は、スタート位置によらないことを微分積分によって証明する。

$f(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ とパラメータ表示された曲線上の2点 $f(\theta_0)$ と $f(\theta_1)$ を落下する小球を考える。ガ

リレイ理論の位置エネルギーと運動エネルギーの法則により、曲線上の点 (x, y) にあるときの速度は、

$\sqrt{2g(y_0 - y)}$ である。ただし、 g は重力加速度、 y_0 はスタート位置の y 座標である。底に到達するまで

の所要時間は、 $\int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}{2g(y_0 - y(\theta))}} d\theta$ である。

つまり、パラメータ θ_0 で与えられるサイクロイド上の点をスタートした小球が底に到達する時間を積分を使って求めることができる。半径1のサイクロイド $x(\theta) = \theta - \sin\theta, y(\theta) = \cos\theta - 1$ とすると、小球が最初の位置から底まで落下するのにかかる時

$$\begin{aligned} \text{間は、} & \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\sqrt{\frac{-1 + \cos t_0 + \frac{\sin^2 t}{(1 + \cos t)^2} + \frac{\cos t_0 \sin^2 t}{(1 + \cos t)^2}}{2}} \right]_{\theta_0}^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{g}} \end{aligned}$$

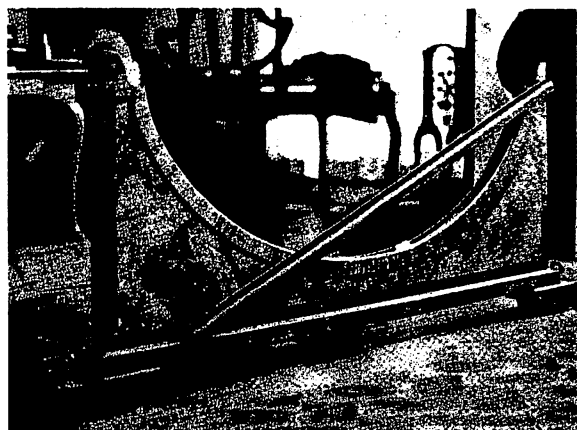
小球がサイクロイドの底に到達するまでの時間は、サイクロイド上のどの場所からスタートしても $\frac{\pi}{\sqrt{g}}$ となる。

一番上から

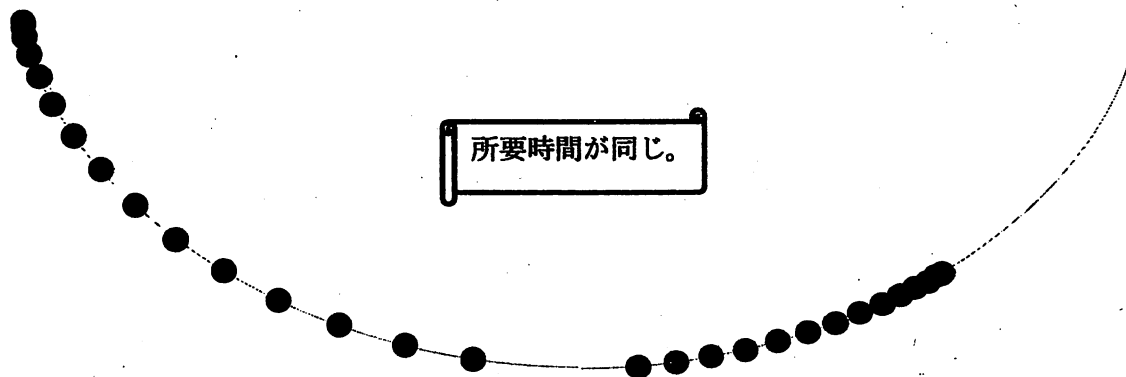
スタート（左下図）しても、途中（右下図）からスタートしても所用時間は同じである。

この発見により、1697年ホイヘンスの等時曲線と最速降下線が同じであることに驚く。ガリレオが礼拝堂シャンデリアの揺れの観察から、114年の年月が経過し、結論がえられた。ヨハンは、ライプニッツの微分積分学を幾何学へ応用し、ヨーロッパ全体に広めた。

ヤコブが1705年に51歳で死亡すると、バーゼル大学の数学教授となった。当時、牧師になるためにバーゼル大学に入学したオイラーを数学の研究を勧めたのはヨハン・ベルヌーイであった。ヨハンは81歳で死亡して、オイラーの時代となった。



【1775年作成されたサイクロイド模型】



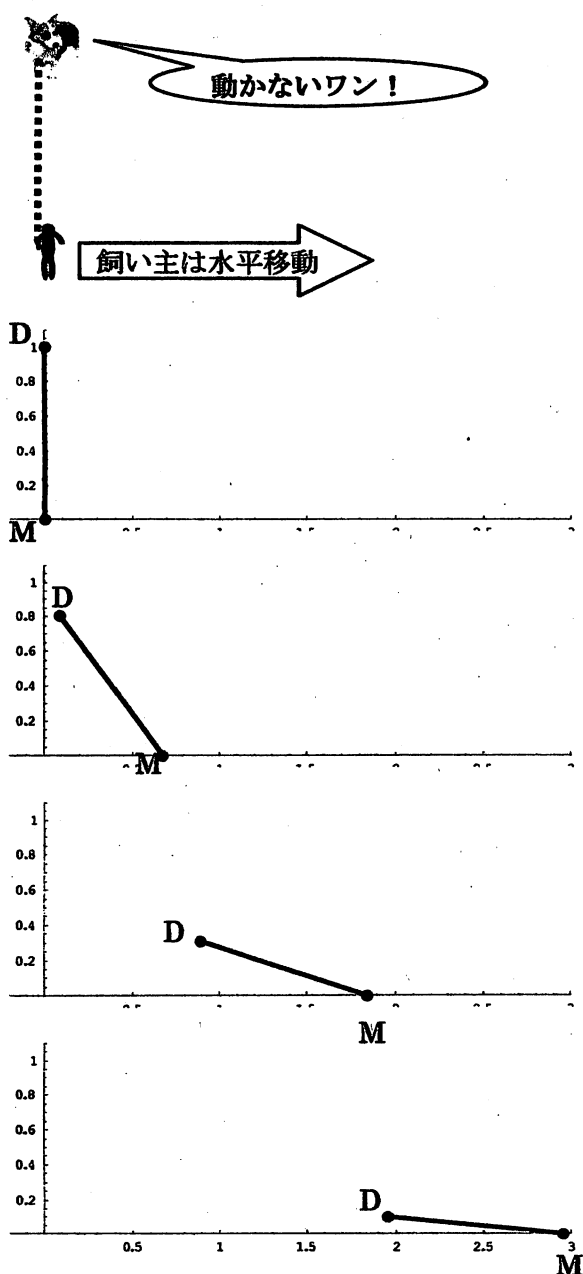
第1話 トラクトリックス Tractrix 追跡曲線

Exercise 1 HoundKurve 問題 獵犬曲線問題

パリの医師であり解剖学者、フランス王立科学アカデミー会員のクロード・ペローはズボンのポケットから鎖のついた銀の懐中時計を取り出し、テーブルの向こうまで引き出し「どんな曲線に対して、各点 P での接線と x 軸との間が一定の長さ a になるだろうか？」この問題を提出した。(1672~1676)
当時、フェルマーもこの式を求めることが出来なかった。

1693 年ライプニッツが HoundKurve(Hound Curve)獵犬曲線と名前をつけて、微分方程式を用いて解法を発表した。

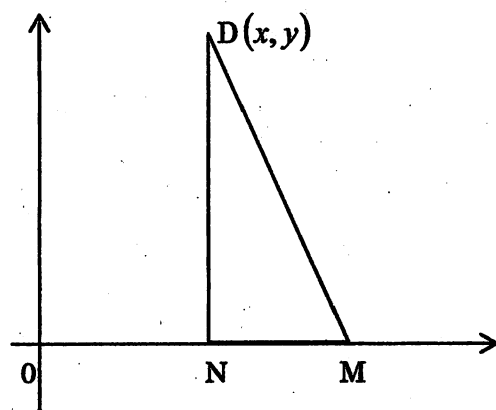
『xy 平面上の原点 $O(0,0)$ に飼主 M が、点 $D(0,a)$ $a > 0$ に犬が伸縮しない長さ一定の a の紐でつながれている。今、飼主 M が x 軸正の水平方向に沿って犬を引っ張ったとき、犬の歩く軌跡はどのような曲線になるか？』



1693 年ライプニッツが解を発見した。

Step 1 微分方程式を作成する。

Dog の座標 $D(x,y)$ として微分方程式を作成する。
 $DM=a$ は紐の長さ、D から x 軸へ垂線を引き点 N とする。Master を点 M とする。



ピタゴラスの定理より、 $NM^2 + DN^2 = DM^2$

$$NM = \sqrt{DM^2 - DN^2}$$

$$NM = \sqrt{a^2 - y^2}$$

点 D における求める曲線の傾きを求めると

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{DN}{NM} \text{ より}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \dots \textcircled{1}$$

Step 2 変数分離型微分方程式を解法する。

これは、典型的な変数分離型の微分方程式である。

$$-\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \frac{dy}{dx} = 1$$

$$dx = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy$$

以下、この微分方程式を解いていこう。

$$\int dx = -\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy \dots \textcircled{2}$$

Step 3 $u = \sqrt{a^2 - y^2}$ と置き置換積分を行う。

両辺を 2 乗すると $u^2 = a^2 - y^2$

$$y^2 = a^2 - u^2 \text{ より } y = \sqrt{a^2 - u^2} \quad y > 0$$

$$\text{これを } u \text{ で微分すると } \frac{dy}{du} = -\frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

②より

$$\begin{aligned}
 x &= -\int \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} dy \\
 &= -\int \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} \frac{-u}{\sqrt{a^2 - u^2}} du \\
 &= \int \frac{u^2}{a^2 - u^2} du \\
 &= \int \frac{u^2 - a^2 + a^2}{a^2 - u^2} du \\
 &= \int \frac{a^2}{a^2 - u^2} du - \int du \\
 &= -\int du - \int \frac{a^2}{u^2 - a^2} du
 \end{aligned}$$

Step4 後半部の部分分数分解を実施する。

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2}{(u+a)(u-a)} &= \frac{A}{u+a} + \frac{B}{u-a} \\
 &= \frac{(A+B)u + a(B-A)}{(u+a)(u-a)}
 \end{aligned}$$

分子の係数を比較して

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=a \end{cases} \text{を解いて} \quad A = -\frac{a}{2}, B = \frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned}
 x &= -\int du - \int \frac{a^2}{(u+a)(u-a)} du \\
 &= -\int du + \frac{a}{2} \int \frac{1}{u+a} du - \frac{a}{2} \int \frac{1}{u-a} du
 \end{aligned}$$

Step5 絶対値に注意して積分を実施する。

$$= u + \frac{a}{2} \log|u+a| - \frac{a}{2} \log|u-a| + C$$

C は不定積分定数

$$x = -u - \frac{a}{2} \log \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$u = \sqrt{a^2 - y^2} \text{ より}$$

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{a}{2} \log \left| \frac{\sqrt{a^2 - y^2} - a}{\sqrt{a^2 - y^2} + a} \right| + C$$

Step6 符号をチェックする。

$D(x, y)$ $DM=a, NM=\sqrt{a^2 - y^2}$
 DM は直角三角形の斜辺より
 $NM < DM$
 $\sqrt{a^2 - y^2} < a$
 $\sqrt{a^2 - y^2} - a < 0$
 分子の符号はマイナス！

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{a}{2} \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} + C$$

Step7 有理化を実施しまとめる。

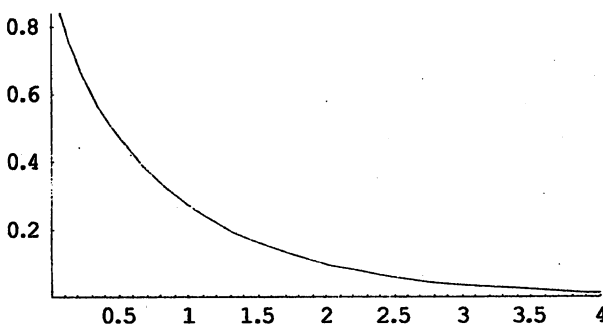
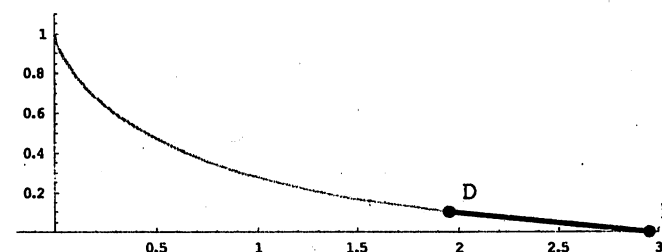
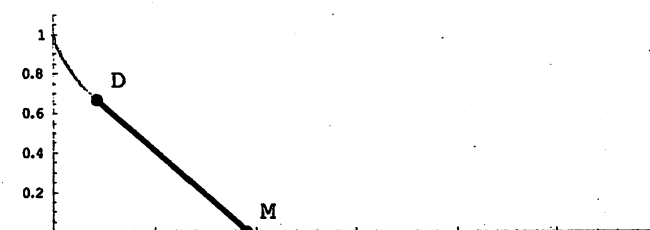
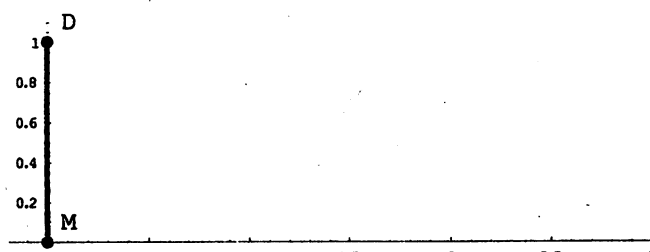
$$\begin{aligned}
 x &= -\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{a}{2} \log \frac{(a - \sqrt{a^2 - y^2})^2}{a^2 - (a^2 - y^2)} + C \\
 &= -\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{a}{2} \log \frac{(a - \sqrt{a^2 - y^2})^2}{y^2} + C \\
 &= -\sqrt{a^2 - y^2} - a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + C
 \end{aligned}$$

Step8 不定積分定数 C を求める。

$x=0$ のとき $y=a$ より

$$C = 0$$

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} - a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \dots \textcircled{3}$$



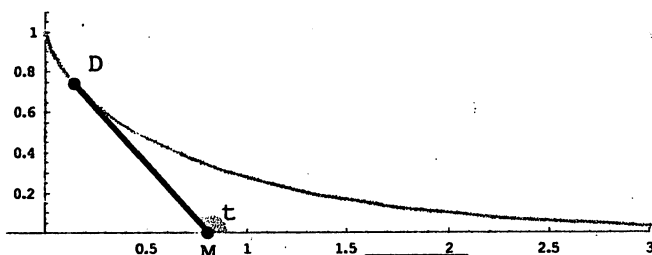
$a=1$ のときの Tractrix のグラフ

この点 $(0,a)$ にカスプを持つ曲線を Tractrix という。
 日本語では「追跡曲線」、「獵犬曲線」とか「牽引曲線」と呼ばれている。

Step9 トラクトリックスをパラメーター表示する。

$y = a \sin t$ とおく

下図より、 $y = a$ のとき $t = \frac{\pi}{2}$ より、 $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$
 $\cos t < 0$ であることに注意しておく。



$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} - a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \sim y = a \sin t$$

を代入すると

$$x = -\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} - a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}}{a \sin t}$$

$$= -\sqrt{a^2 \cos^2 t} - a \log \frac{a - a \sqrt{\cos^2 t}}{a \sin t}$$

$$= -a |\cos t| - a \log \frac{1 - |\cos t|}{\sin t}$$

$\cos t < 0$ であることに注意して絶対値を展開する

$$= a \cos t - a \log \frac{1 + \cos t}{\sin t}$$

倍角公式

$$\cos 2 \frac{t}{2} = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1, \sin 2 \frac{t}{2} = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$$

を利用して

$$= a \cos t - a \log \frac{1 + 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}$$

$$= a \cos t - a \log \frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}$$

$$= a \cos t - a \log \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = a \cos t - a \log \frac{1}{\tan \frac{t}{2}}$$

$$= a \cos t + a \log \tan \frac{t}{2}$$

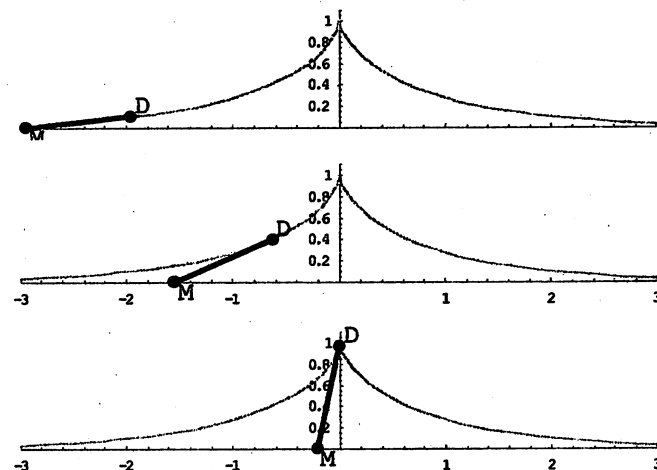
■トラクトリックスのパラメーター表示■

$$\begin{cases} y = a \sin t \\ x = a \cos t + a \log \tan \frac{t}{2} \end{cases} \dots \textcircled{4}$$

パラメーターの範囲 $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

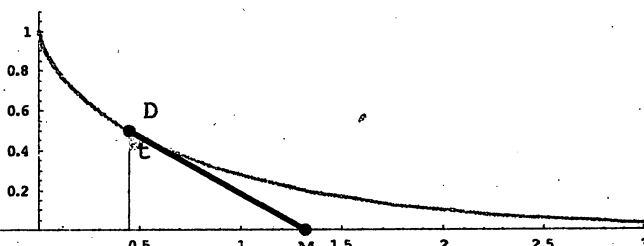
Step10 パラメーターの範囲を拡張する。

パラメーターの範囲を $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ から $0 \leq t \leq \pi$ に拡張して表示すると、



Step11 別のパラメーター表示を実施する。

$y = a \cos t$ とおく t の取り方は下図のような



$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\sin t \geq 0$

$y = a \cos t$ を③へ代入すると

$$x = -\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 t} - a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 t}}{a \cos t}$$

$$= -a \sqrt{\sin^2 t} - a \log \frac{a - a \sqrt{\sin^2 t}}{a \cos t}$$

$\sin t \geq 0$ より符号に注意して

$$= -a \sin t - a \log \frac{1 - \sin t}{\cos t}$$

$$= -a \sin t + a \log \frac{\cos t}{1 - \sin t}$$

$$= -a \sin t + a \log \frac{\cos t (1 + \sin t)}{(1 - \sin t)(1 + \sin t)}$$

$$= -a \sin t + a \log \frac{\cos t (1 + \sin t)}{1 - \sin^2 t}$$

$$= -a \sin t + a \log \frac{\cos t (1 + \sin t)}{\cos^2 t}$$

$$= -a \sin t + a \log \frac{1 + \sin t}{\cos t}$$

$$= -a \sin t + a \log \left(\frac{1}{\cos t} + \tan t \right)$$

Exercise 2 2004 年旭川医科大学後期

xy 平面上の曲線 C を $x = \cos t, y = -\sin t + \log\left\{\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\}$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) で定義する。

- (1) $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ を t で表せ。
- (2) 曲線 C 上の点 P における接線と y 軸との交点を Q とするとき、線分 PQ の長さは一定であることを示せ。

この問題はトラクトリックスがベースになっていることがわかる。ただし、④は $y = a \sin t$ として変数変換したが、この問題は $y = a \cos t$ として変数変換していることがわかる。

$$\begin{cases} y = a \cos t \\ x = -a \sin t + a \log\left(\frac{1}{\cos t} + \tan t\right) \end{cases} \cdots \textcircled{5}$$

三角関数の倍角公式

$$\tan t = \tan 2 \times \frac{t}{2} = \frac{2 \tan \frac{t}{2}}{1 - \tan^2 \frac{t}{2}}$$

$$\cos t = \cos 2 \times \frac{t}{2} = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1$$

を⑤へ代入すると

$$\begin{aligned} x &= -a \sin t + a \log\left(\frac{1}{\cos t} + \tan t\right) \\ &= -a \sin t + a \log\left(\frac{1}{2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1} + \frac{2 \tan \frac{t}{2}}{1 - \tan^2 \frac{t}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{\tan^2 \frac{t}{2} + 1} \text{ より}$$

$$= -a \sin t + a \log\left(\frac{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}{1 - \tan^2 \frac{t}{2}} + \frac{2 \tan \frac{t}{2}}{1 - \tan^2 \frac{t}{2}}\right)$$

$$= -a \sin t + a \log\left(\frac{\tan^2 \frac{t}{2} + 2 \tan \frac{t}{2} + 1}{1 - \tan^2 \frac{t}{2}}\right)$$

$$= -a \sin t + a \log\left(\frac{\left(1 + \tan \frac{t}{2}\right)^2}{\left(1 - \tan \frac{t}{2}\right)\left(1 + \tan \frac{t}{2}\right)}\right)$$

$$= -a \sin t + a \log\left(\frac{1 + \tan \frac{t}{2}}{1 - \tan \frac{t}{2}}\right)$$

$\tan \frac{\pi}{4} = 1$ であることに注意して

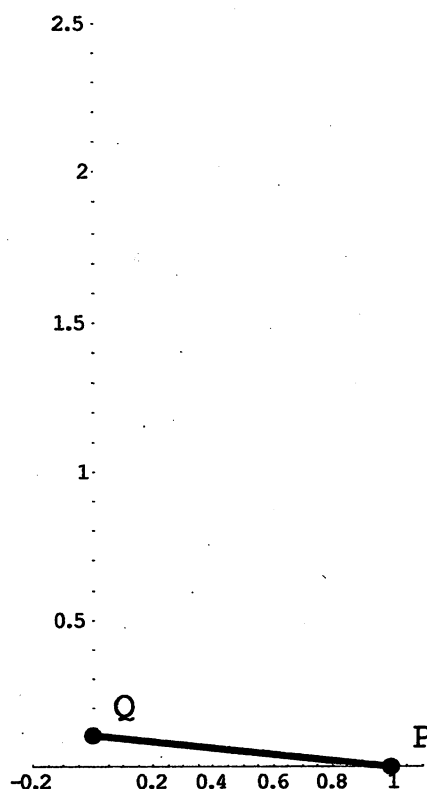
$$= -a \sin t + a \log\left(\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{t}{2}}{1 - \tan \frac{t}{2} \times \tan \frac{\pi}{4}}\right)$$

$\tan$ の加法定理を使って

$$= -\sin t + \log\left\{\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

旭川医科大学に出題されたトラクトリックスの式であることがわかる。ただし x, y の変数が逆になっていることに注意しよう。

$a=1$ のとき Mathematica によるアニメーションを作成すると下図のようになる。



〔解答例〕

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = -\cos t + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}{\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= -\cos t + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{2}\right)^2}}{\frac{1 + \tan\frac{t}{2}}{1 - \tan\frac{t}{2}}}$$

$$= -\cos t + \frac{\frac{1}{\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right)^2}}{\frac{\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}}} \times \frac{\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}}$$

$$= -\cos t + \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}$$

$$= -\cos t + \frac{1}{\cos t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\cos t + \frac{1}{\cos t}}{-\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{\sin t \cos t}$$

$$= \frac{\cos^2 t - 1}{\sin t \cos t} = -\frac{\sin^2 t}{\sin t \cos t} = -\tan t \dots (\text{答})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{-\sin t}$$

$$= \frac{1}{\sin t \cos^2 t} \dots (\text{答})$$

$$\text{点 } P \left(\cos t, -\sin t + \log \left\{ \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right), \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

における接線の方程式を求める。

$$\frac{dy}{dx} = -\tan t \text{ より}$$

接線；

$$y = -\tan t (x - \cos t) - \sin t + \log \left\{ \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

$x = 0$ を代入して、 y 軸との交点 Q を求めると

$$y = \tan t \cos t - \sin t + \log \left\{ \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

$$= \log \left\{ \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

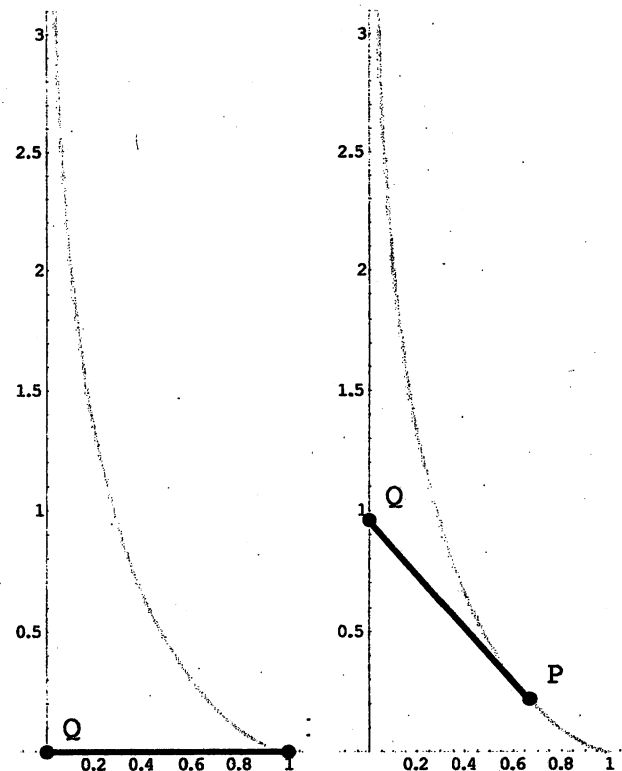
$$\text{点 } Q \left(0, \log \left\{ \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right)$$

距離公式より

$$PQ^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

$$= 1$$

線分 $PQ = 1$ となり一定の長さになる。



第2話 縮閉線

極率円との関係について

Exercise3 2004年名古屋市立大・医学部

曲線C: $y = x^2$ 上の2点 $P(t, t^2)$, $Q(t+h, (t+h)^2)$ においてそれぞれの法線を引く。法線の交点をRとし、 $h \rightarrow 0$ としたときのRの極限を R_0 とする。

(1) R_0 の座標を t を用いて表せ。

(2) 点Pが曲線C上を動くとき、点 R_0 の軌跡を $y = f(x)$ の形で表せ。

(3) (2) で求めた $y = f(x)$ のグラフの増減、凹凸を調べて概形を書け。

(1) $\frac{dy}{dx} = 2x$ より、点 $P(t, t^2)$ における法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2 \quad y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} \cdots \textcircled{1}$$

同様に、点 $Q(t+h, (t+h)^2)$ における法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{2(t+h)}x + (t+h)^2 + \frac{1}{2} \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を連立方程式として解く

$$x = -2t(t+h)(2t+h), y = (t+h)(2t+h) + t^2 + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} x = \lim_{h \rightarrow 0} \{-2t(t+h)(2t+h)\} = -4t^3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (t+h)(2t+h) + t^2 + \frac{1}{2} \right\} = 3t^2 + \frac{1}{2} \quad R_0 \left(-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$(2) \begin{cases} x = -4t^3 \\ y = 3t^2 + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ から } t \text{ を消去する。}$$

$$x = -4t^3 \text{ より、} t = \left(-\frac{x}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ を } y = 3t^2 + \frac{1}{2} \text{ へ代入する。}$$

$$\text{点 } R_0 \text{ の軌跡の方程式は、} y = 3 \left(-\frac{x}{4} \right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \cdots \textcircled{3}$$

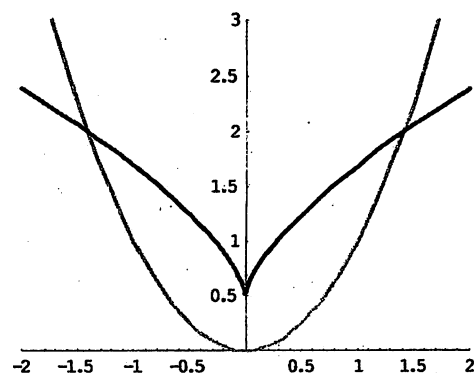
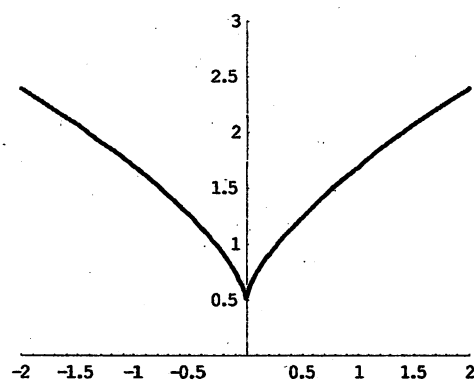
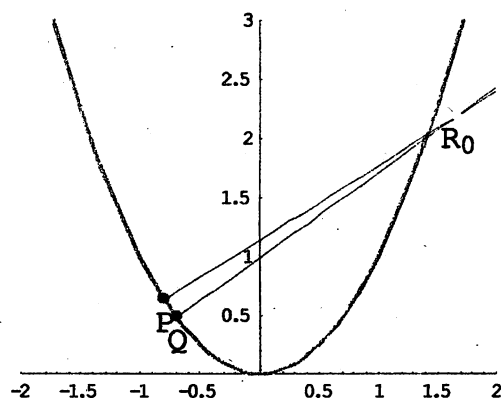
(3)

$$y = 3 \left(-\frac{1}{4} \right)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$y' = 2 \left(-\frac{1}{4} \right)^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'' = -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{4} \right)^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{4}{3}}$$

x	...	0	...
y'	-	$\nearrow$	+
y''	-	$\nearrow$	+
y	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$



【微分法による包絡線を求める方法】

点 $P(t, t^2)$ における法線の方程式; $y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} \dots \textcircled{4}$

t をパラメーターとして①を t で微分する。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2t^2}x + 2t = \frac{4t^3 + x}{2t^2} \quad \frac{dy}{dt} = 0 \text{ のとき } x = -4t^3 \dots \textcircled{5}$$

$$t = \left(-\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \dots \textcircled{6} \quad \textcircled{5} \text{ を } \textcircled{4} \text{ へ代入すると } y = 3t^2 + \frac{1}{2} \dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{6} \text{ を } \textcircled{7} \text{ へ代入すると } y = 3\left(-\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \dots \textcircled{8}$$

【比較; ③と⑧は一致する。】

KeyWord 曲率円 曲率中心 曲率

1671 年出版されたニュートン著『流率論』によると、曲線 $y = f(x)$ と曲線上の点 $P(a, f(a))$ が与えられたとき、 a の近くで曲線 $y = f(x)$ を円に近似する。この円を曲率円、中心を曲率中心、曲率円の半径の逆数を、 $P(a, f(a))$ での曲率と定義する。

$y = f(x)$ の点 $x = a$ における法線:

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a) \dots \textcircled{9}$$

疑問点; a をパラメーターとして法線①の通過領域の包絡線は何を意味するのだろうか?

右図より a を無限に小さく動かすと、法線は動かす法線と曲率中心で交わる。

法線の包絡線は曲率中心の軌跡を表している。

①を a について微分すると

$$\frac{dy}{da} = f'(a) + \frac{f''(a)}{(f'(a))^2}(x-a) + \frac{1}{f'(a)}$$

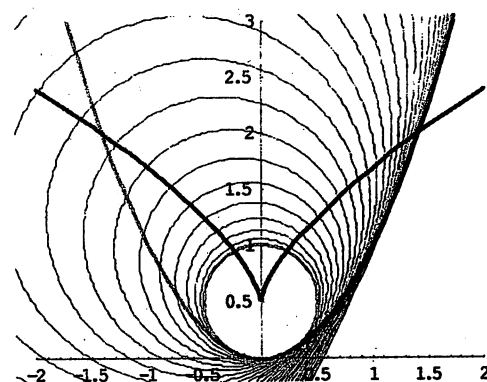
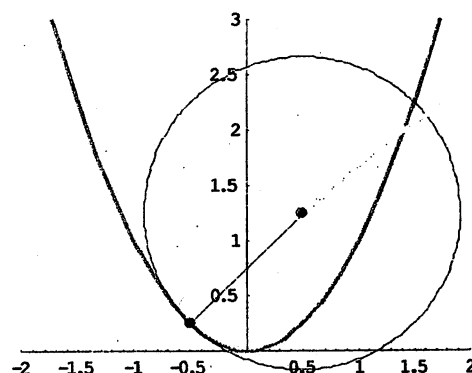
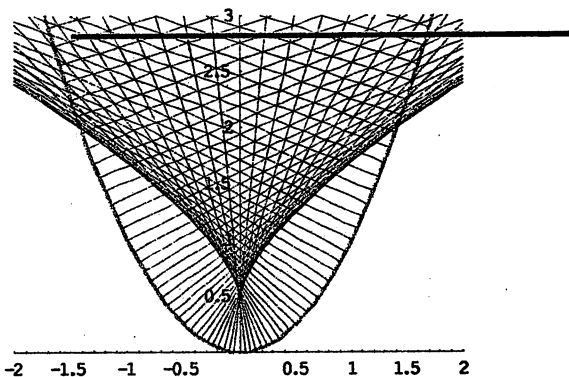
$\frac{dy}{da} = 0$ を満たす x を求めると

$$x_0 = a - \frac{\{1 + (f'(a))^2\}f'(a)}{f''(a)} \dots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{10} \text{ を } \textcircled{9} \text{ へ代入すると、 } y_0 = f(a) + \frac{1 + (f'(a))^2}{f''(a)} \dots \textcircled{11}$$

⑩⑪は曲率中心を表す。

$$\text{曲率半径 } r = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - f(a))^2} = \frac{\{1 + (f'(a))^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(a)|} \dots \textcircled{12}$$



KeyWord 縮閉線

曲線 $y = f(x)$ と a をパラメーターとする曲線上の点 $P(a, f(a))$ における曲率中心の軌跡を縮閉線と定義する。

Theorem 縮閉線と包絡線

縮閉線が曲線 $y = f(x)$ の法線族の包絡線である。 63

第3話 ルーレット

Roulette 回転する正多角形について

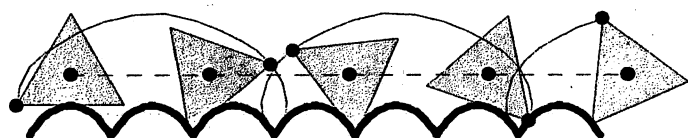
“Roulette”とは“Mathematica in Action”に記述されている多角形の回転である。

カタナリー曲線 $y = -\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ 上を正多面体が

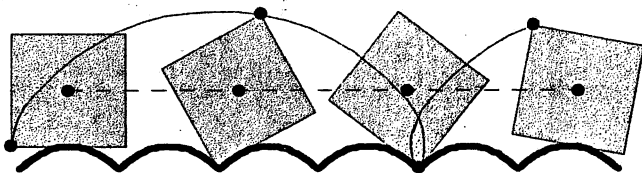
滑ることなく回転している様子が描かれている。

<http://mathworld.wolfram.com/notebooks/Curves/Roulette.nb> by Eric W. Weisstein May 2, 2004

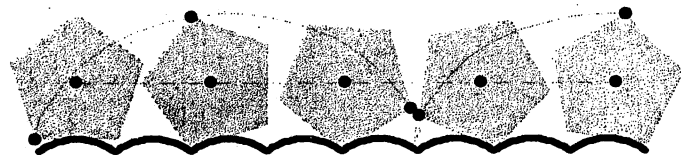
には、正三角形、正四角形、正五角形、正六角形が曲線上を回転している様子がある。



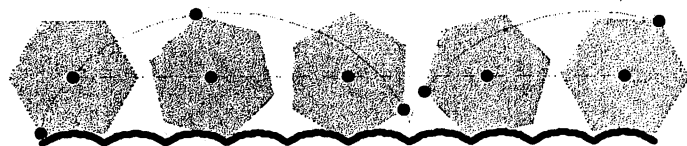
【正三角形】



【正四角形】



【正五角形】



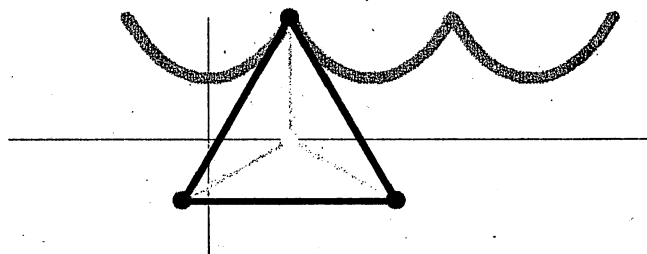
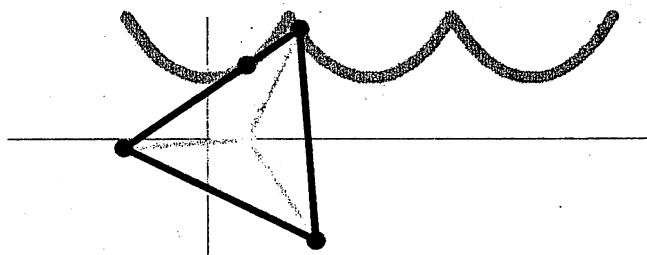
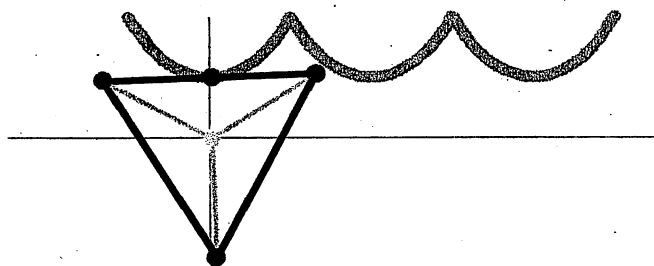
【正六角形】

上図から、多角形の中心のy成分が一定の値をとりながら回転している様子が理解できる。

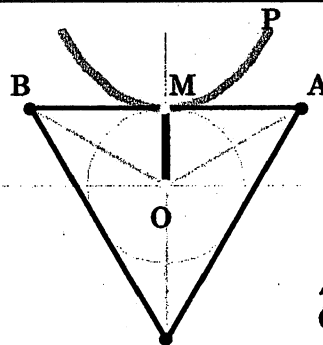
“MathWorld”とはx軸と線対称なカタナリー

$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ の下を正三角形が滑ることなく回

転する場合について分析してみよう。



Step 1 正三角形の1辺の長さを求める。



点Mは辺ABの中点
 $OM = a$

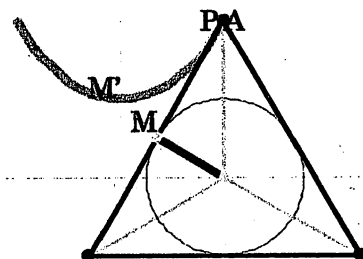
この正三角形は原点Oを中心とする半径aの円に外接する正三角形であることから

$$OM : OA : MA = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

1辺の長さ $AB = l$ とすると、 $MA = \sqrt{3}a$ より

$$l = 2\sqrt{3}a$$

Step 2 弧 $MP = MA$ なる点Pの座標を求める。



$MP = MA = \frac{l}{2}$ となるPのx座標pを求める。

カタナリー曲線 ; $f(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ とおく

$\int_0^p \sqrt{1+f'(x)^2} dx = \sqrt{3}a$ なる p を求める。

微分すると $f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$

$$1+f'(x)^2 = 1 + \frac{e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}}{4}$$

$$= \frac{e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}}{4}$$

$$= \left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \right)^2$$

$$\int_0^p \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} dx = \sqrt{3}a$$

$$\frac{a}{2} \left[e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right]_0^p = \sqrt{3}a$$

$$e^{\frac{p}{a}} - e^{-\frac{p}{a}} = 2\sqrt{3}$$

$$e^{\frac{p}{a}} - \frac{1}{e^{\frac{p}{a}}} = 2\sqrt{3}$$

$$X = e^{\frac{p}{a}} \text{ とおくと } X - \frac{1}{X} = 2\sqrt{3}$$

$$X^2 - 2\sqrt{3}X - 1 = 0$$

$$X = \sqrt{3} \pm 2$$

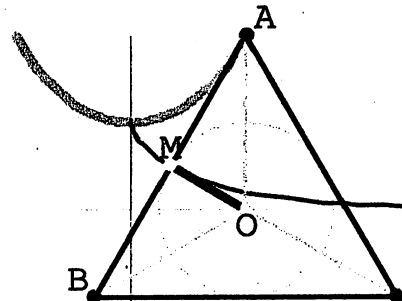
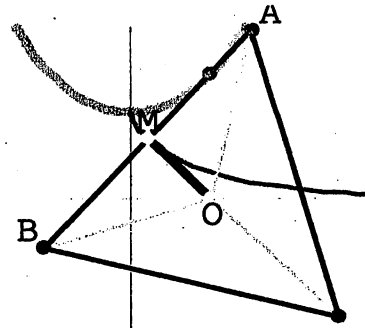
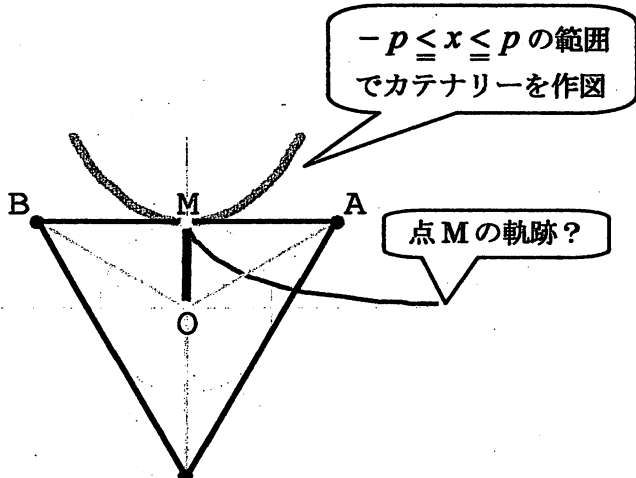
$$X > 0 \text{ より } X = \sqrt{3} + 2$$

$$e^{\frac{p}{a}} = \sqrt{3} + 2$$

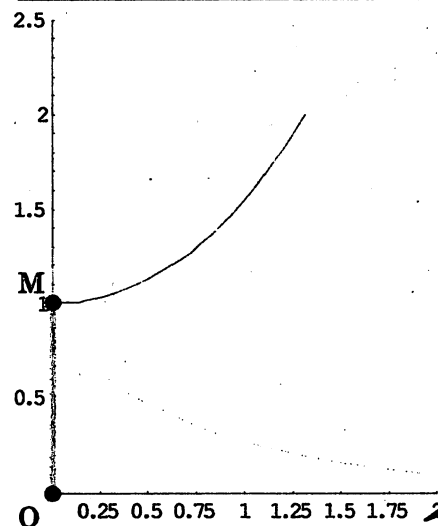
$$\frac{p}{a} = \log(\sqrt{3} + 2)$$

$$p = a \log(\sqrt{3} + 2)$$

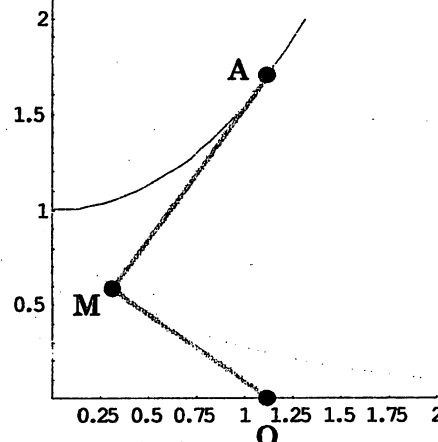
$-p \leq x \leq p$ の範囲のカテナリー上を正三角形は回転する。このとき、辺 AB の中点 M の軌跡はどうなるのだろうか？



Step 3 必要な部分を *CloseUp* してみる！



OM = a [一定]
点 M の軌跡は、
点 M を Dog、
点 O を Master
とする、Tractrix
ではないだろう
か？



予測 Catenary と Tractrix

Tractrix の縮閉線が Catenary になる。
Catenary の伸開線が Tractrix になる。

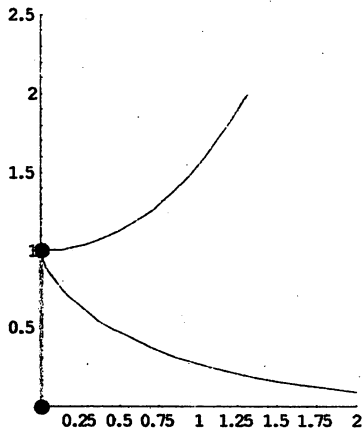
Exercise 4 カテナリーとトラクトリックスとの重大な関係

カテナリー $y = a \cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ はトラクトリックス $\begin{cases} y = a \sin t \\ x = a \cos t + a \log \tan \frac{t}{2} \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \right)$ の縮閉線になる。

カテナリー曲線 C ; $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$

トラクトリックス T ; $\begin{cases} y = a \sin t \\ x = a \cos t + a \log \tan \frac{t}{2} \end{cases}$

を重ねて作図してみる。



カテナリーがトラクトリックスの縮閉線になっていることが予想される。

Step 1 トラクトリックス上の法線を求める。

トラクトリックス T ; $\begin{cases} y = a \sin t \\ x = a \cos t + a \log \tan \frac{t}{2} \end{cases}$ 上

の点 D における法線の方程式を求める。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= a \cos t, \quad \frac{dx}{dt} = -a \sin t + a \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} \\ &= -a \sin t + \frac{a}{\sin t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \cos t}{-a \sin t + \frac{a}{\sin t}} = \frac{a \sin t \cos t}{a(1 - \sin^2 t)} = \frac{\sin t}{\cos t} \\ &= \tan t \end{aligned}$$

接線 DM の傾き = $\tan t$

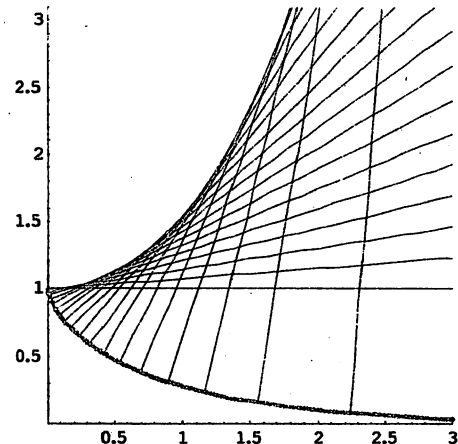
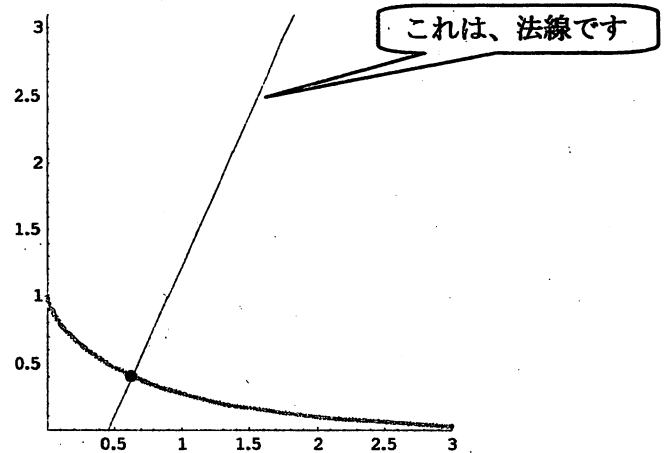
法線 DP の傾き = $-\frac{1}{\tan t}$

法線の方程式 ;

$$y = -\frac{1}{\tan t} \left(x - a \cos t - a \log \tan \frac{t}{2} \right) + a \sin t$$

展開してまとめると

$$y = -\frac{\cos t}{\sin t} x + \frac{a \cos t}{\sin t} \log \tan \frac{t}{2} + \frac{a}{\sin t} \cdots (\text{法線})$$



Step 2 トラクトリックスの曲率中心を求める。

$$\left(\frac{\cos t}{\sin t} \right)' = -\frac{1}{\sin^2 t}, \quad \left(\log \tan \frac{t}{2} \right)' = \frac{1}{\sin t}$$

$$\left(\frac{1}{\sin t} \right)' = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} \text{ を活用して}$$

この法線を t に関して微分してみよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= -\left(-\frac{1}{\sin^2 t} \right) x + a \left(-\frac{1}{\sin^2 t} \right) \log \tan \frac{t}{2} \\ &\quad + a \frac{\cos t}{\sin t} \times \frac{1}{\sin t} + a \left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{\sin^2 t} - \frac{a}{\sin^2 t} \log \tan \frac{t}{2} + \frac{a \cos t}{\sin^2 t} - \frac{a \cos t}{\sin^2 t}$$

$$= \frac{x - a \log \tan \frac{t}{2}}{\sin^2 t}$$

$\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ のときが極率中心を表すので、

$$x = a \log \tan \frac{t}{2}$$

(法線) へ代入して

$$y = -a \frac{\cos t}{\sin t} \log \tan \frac{t}{2} + a \frac{\cos t}{\sin t} \log \tan \frac{t}{2} + \frac{a}{\sin t}$$

$$= \frac{a}{\sin t}$$

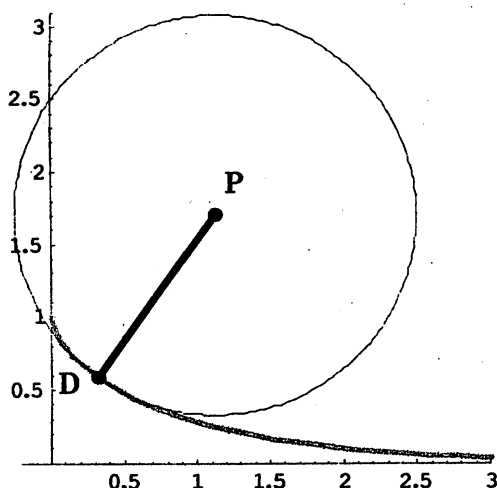
$$\text{曲率中心 } P \left(a \log \tan \frac{t}{2}, \frac{a}{\sin t} \right)$$

曲率半径 r

$$r^2 = \left(a \cos t + a \log \tan \frac{t}{2} - a \log \tan \frac{t}{2} \right)^2 + \left(a \sin t - \frac{a}{\sin t} \right)^2$$

$$r^2 = -a^2 + \frac{a^2}{\sin^2 t} = \frac{a^2 \cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{a^2}{\tan^2 t}$$

$$r = \frac{a}{\tan t}$$



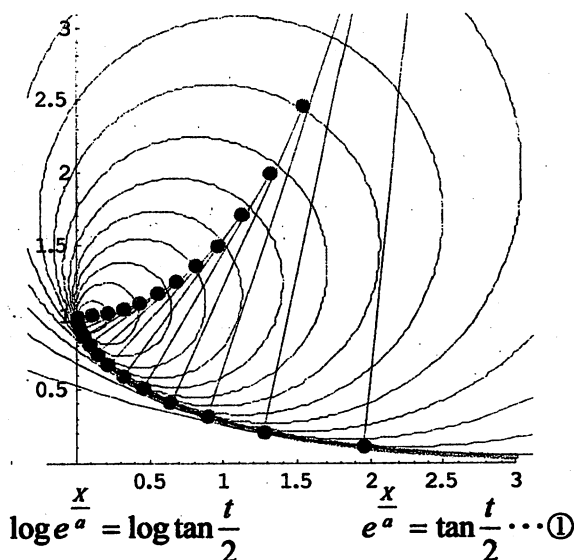
Step 3 曲率中心の軌跡を求める。

曲率中心の軌跡の方程式、 t をパラメーターとする法線の包絡線の方程式を求めてみよう。

$$X = a \log \tan \frac{t}{2}, Y = \frac{a}{\sin t} \text{ より } t \text{ を消去する。}$$

$$\frac{X}{a} = \log \tan \frac{t}{2}$$

$$\frac{X}{a} \log e = \log \tan \frac{t}{2}$$



$$\tan \frac{t}{2} = u \text{ とおくと、}$$

$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2} \text{ を } Y = \frac{a}{\sin t} \text{ へ代入して}$$

$$Y = \frac{a(1+u^2)}{2u}$$

①より $u = e^{\frac{X}{a}}$ を代入すると

$$Y = \frac{a \left(1 + e^{\frac{2X}{a}} \right)}{2 \times e^{\frac{X}{a}}}$$

分母分子に $e^{\frac{X}{a}}$ をかけると

$$Y = \frac{a \left(1 + e^{\frac{2X}{a}} \right) \times e^{\frac{X}{a}}}{2 \times e^{\frac{X}{a}} \times e^{\frac{X}{a}}}$$

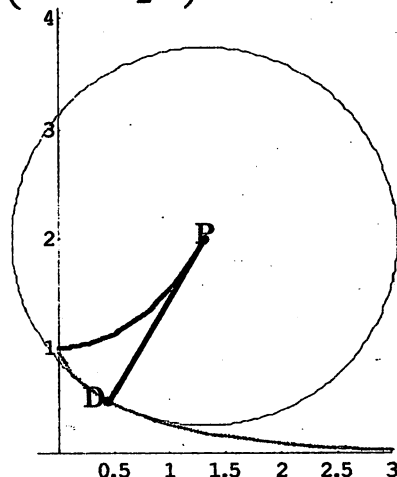
$$Y = \frac{a \left(e^{\frac{X}{a}} + e^{\frac{X}{a}} \right)}{2}$$

となり、曲率中心の軌跡はカタナリーである。
各点の座標をまとめると

$$D \left(a \cos t + a \log \tan \frac{t}{2}, a \sin t \right)$$

$$P \left(a \log \tan \frac{t}{2}, \frac{a}{\sin t} \right)$$

$$M \left(a \log \tan \frac{t}{2}, 0 \right)$$



自然現象のモデリング

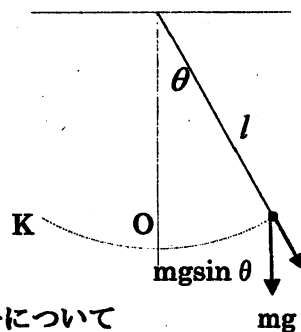
数学的振子と共振現象について

微分方程式を Mathematica で見る

微分方程式を活用して、様々な自然現象を解析して、その数学的にモデリング化してみよう。

今回は、最も単純なように複雑な振子の運動について

実験 1 振子の実験



Episode 1 数学的振子について

重力の影響を受けながら鉛直平面内にある半径 l の円周 K 上を運動する質量 m の点 P についての運動方程式を作ってみる。

半径 l を振子の長さ、円周 K の最低点を原点 O に設定する。

時間 t によって変化する点 P の座標を $\theta = \theta(t)$ で表示する。

点 P は鉛直方向に $P=mg$ の外力を受けている。この外力の円周 K の法線方向の力は、円運動するための遠心力とつりあっている。

点 P における円周 K の接線方向の力は $-mgsin\theta$ ニュートンの運動方程式により

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin\theta = 0$$

2 階微分方程式が完成する

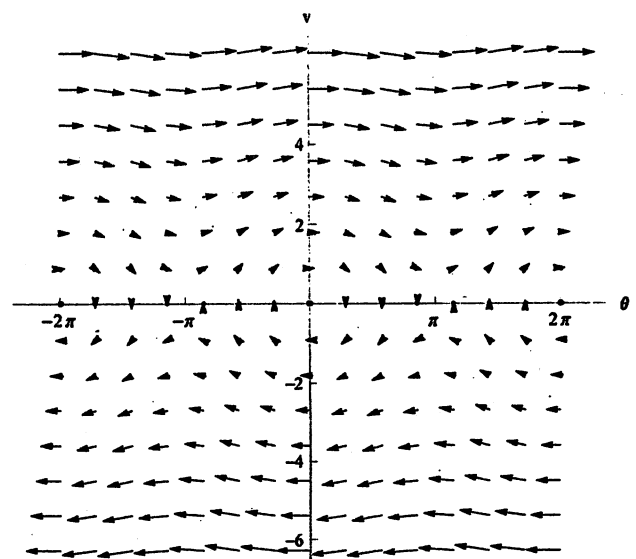
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

今、簡素化のために、 $\frac{g}{l}=1$ として考える。

$$\frac{d\theta}{dt} = v \quad \frac{dv}{dt} = -\sin\theta$$

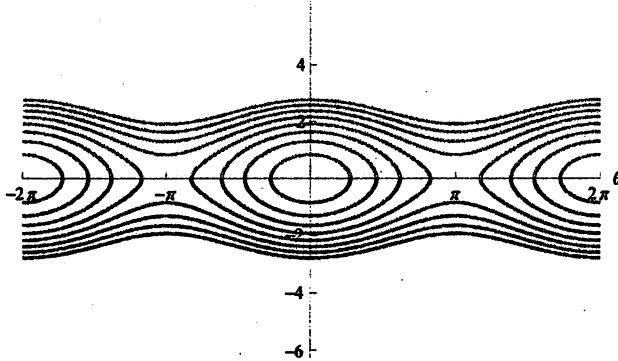
$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{-\sin\theta}{v} \text{ より、 } (v, -\sin\theta) \text{ として}$$

時間 t に関する動点 $(\theta(t), v(t))$ の速度を指定するベクトル場 ($\downarrow$) として見ることができる。

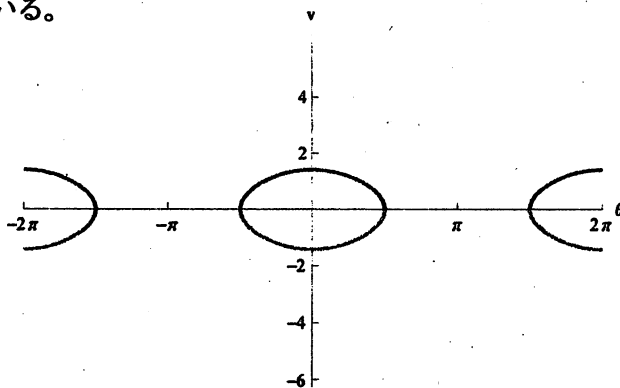


$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{-\sin\theta}{v}$$

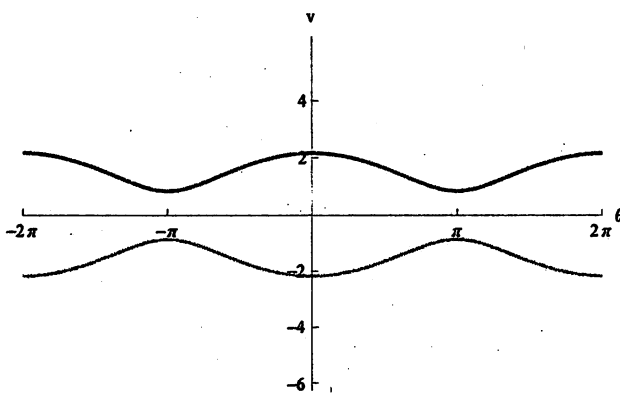
を満たす曲線を Mathematica に描かせた。(↓)



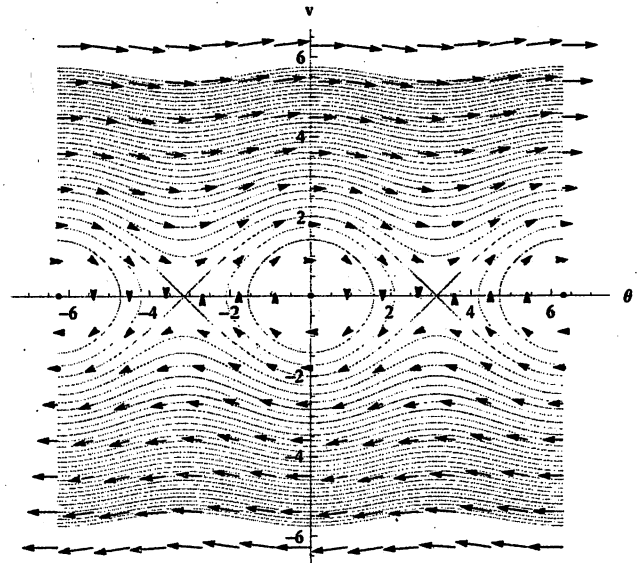
楕円形の曲線 (↓) は振子の振動の様子を表している。



三角関数のような曲線 (↓) は体操選手の大車輪のような振子の回転を表している。



ベクトル場と解曲線を合成すると (↓) の図が得られる。



振子の微分方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

は初等的計算では、解くことは、困難なので

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

として、 θ のとる値の範囲

を小さく 0 に近い範囲

で、 $g=9.8$, $l=1$

として、

横軸を θ 、縦軸を v

として解曲線を描いた (→)。

楕円曲線になった。

θ が十分に小さいので、

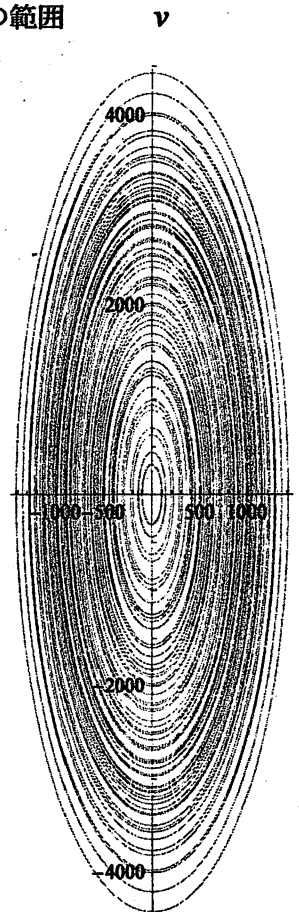
体操選手の大車輪

回転にならず、単純

な振子運動になる。

この図を相空間とい

う。



Episode2 振子の微分方程式を解く

$\omega^2 = \frac{g}{l}$ として微分方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \text{ を解いてみよう。}$$

$\theta(t)$ を求める。

$v(t) = \frac{d\theta}{dt}$ と定義すると、

$$\text{連立一階微分方程式 } \frac{d\theta}{dt} = v, \frac{dv}{dt} = -\omega^2\theta$$

ベクトル表示すると

$$\begin{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \text{ とおく}$$

微分方程式を行列で表示すると

$$\frac{d}{dt} X(t) = A X(t)$$

$$X(t) = e^{tA} X(0)$$

固有値 α, β を持つ行列 M の指数関数は

$$e^M = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} M + \frac{\beta e^\alpha - \alpha e^\beta}{\beta - \alpha} E$$

と表示できるので、 tA の固有値は

$$|tA - \lambda E| = 0 \quad \lambda^2 + \omega^2 t^2 = 0 \quad \lambda = \pm i\omega t$$

$$e^{tA} = \left\{ \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i\omega t} \begin{pmatrix} 0 & t \\ -\omega^2 t & 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \sin \omega t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos \omega t$$

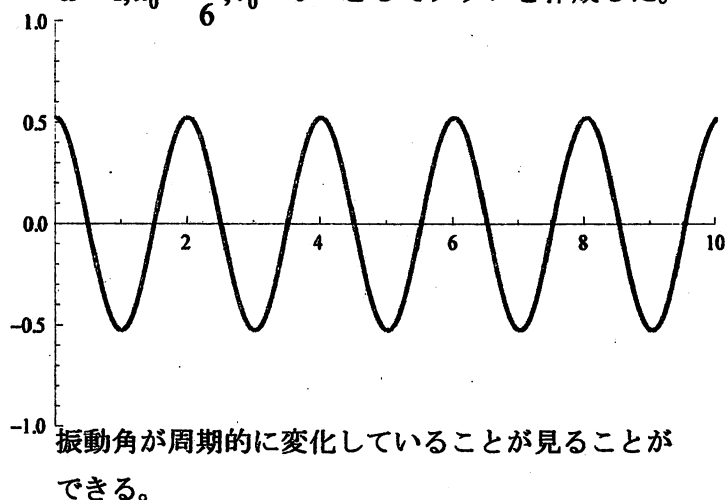
$$= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$X(t) = e^{tA} X_0 = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

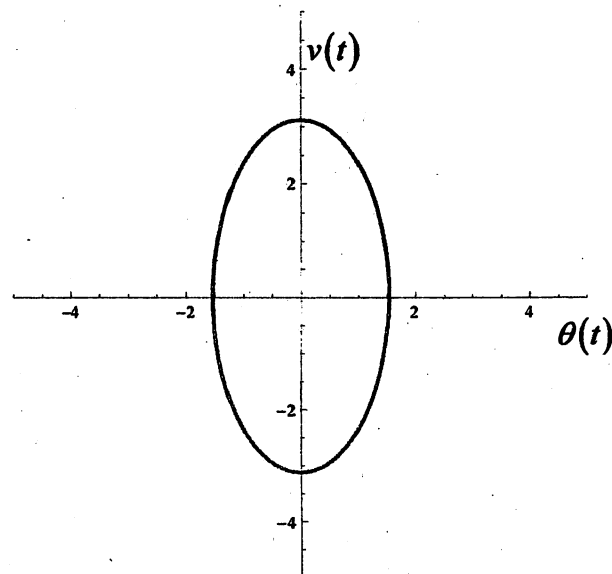
$$= \begin{pmatrix} x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t \end{pmatrix}$$

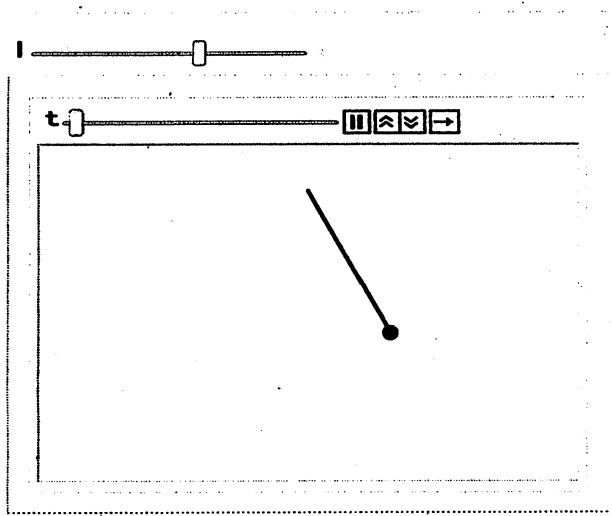
$$\theta(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (\downarrow)$$

$\omega = 1, x_0 = \frac{\pi}{6}, v_0 = 0$ としてグラフを作成した。



$$v(t) = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t$$





Episode3 振子の共振現象について

振子の微分方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

$\omega^2 = \frac{g}{l}$ として微分方程式

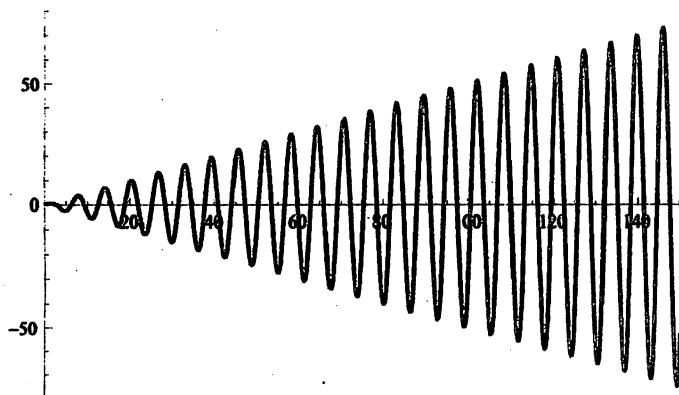
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta \quad \text{であった。}$$

この振子に、強制的に周期的な外力

$f \cos \omega_0 t$ が加わった振子の動きを分析しよう。このときの微分方程式は、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta + f \cos \omega_0 t$$

$\omega = \omega_0, f=1$ のときの、Mathematica で解くと下図(↓)のように、爆発的に振動する。



この現象を、振子の「共振現象」(強制調和振動子)と呼ぶ。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta + f \cos \omega_0 t$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \cos \omega_0 t \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f \cos \omega_0 t \end{pmatrix} \text{とおくと、}$$

微分方程式を行列で表示すると

$$\frac{d}{dt} X(t) = A X(t) + Q(t)$$

$$X(t) = e^{tA} X(0) + \int_0^t e^{(t-q)A} Q(q) dq$$

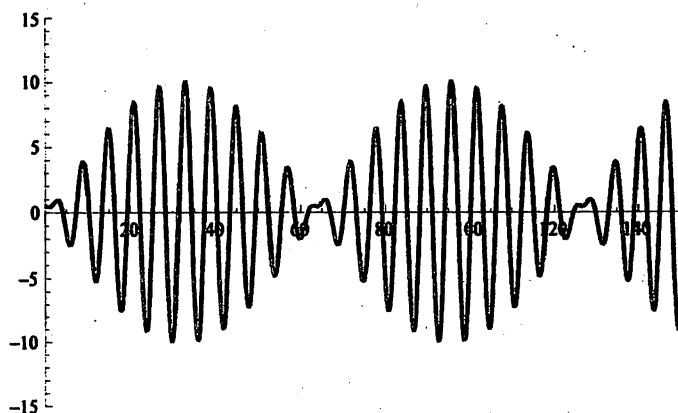
$$= \begin{pmatrix} x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t - \cos \omega t \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t + \omega \sin \omega t \end{pmatrix}$$

特に、

$\omega_0 = 1.1 \omega$ として、 ω と ω_0 を極めて近く設定して、

微分方程式 $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta + f \cos \omega_0 t$ を

Mathematica で解くと、下図(↓)のように、「うなり」の現象が発生する。



【実験】 振子の共振現象を見てみよう。

第Ⅲ部 政権交代と革命的思想

世界は三角関数でできている —フーリエ級数展開へのアプローチ—

1822 年フランスのフーリエが『熱の解析的理論』を発表した。その著書でフーリエは「どんな関数もフーリエ展開できる。逆に、フーリエ展開できるものは関数だ。三角関数で表現できない関数は存在しない。」と主張した。当時の数学の発展状況から考えると、関数の概念を根本的に考え直す革命的な主張である。近年コンピューターの進化に伴って高速フーリエ変換 FFT のアルゴリズムの発明。1960 年代にスーパーコンピューターが出現し処理速度が向上した。特に医療分野における画像診断技術や音響工学において実用化され、人類に大いに役に立っている。

Episode1 フーリエの生涯

Jean Baptiste Joseph Fourier いわゆるフーリ

エは 1768 年 3 月
18 日にフランス
オーゼルの仕立
て職人の子とし
て誕生した。父は
最初の妻の死後、
3 人の子供を伴
って再婚し、その
後 9 人の子供が

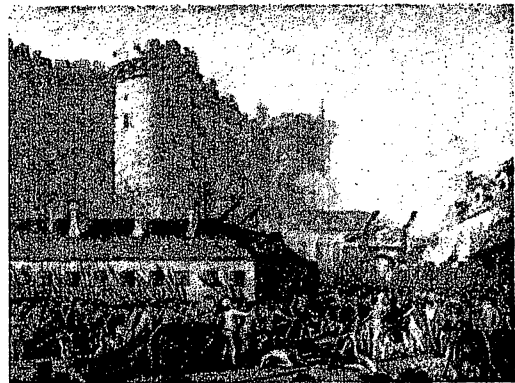


誕生して 12 人兄弟の 9 番目の子供がフーリエであつた。9 歳のときに母親が死亡し、翌年には父親も死亡し孤児となった。オーゼルのカトリック教会のオルガニストであり音楽の指揮者であるパレに引き取れ養育された。ラテン語とフランス語を学んだ。その後、同郷の女性の好意で、1780 年オーゼルの王立陸軍学校に入学し文学に才能を発揮した。

13 歳のときから数学に興味を持ち、14 歳までには 6 巻からなる“Cours de mathematiques”を読破した。身分制度が厳しく陸軍では将来の展望が見込めなくなったフーリエは聖職者になるために、1787 年サン・ブノア・シュル・ロアル修道院に入る。ニュートンやパスカルの影響を受け、数学に関する興味は更に大きくなり、人々が寝静ま

ってから起き出し自習室に入り、問題解法やペズやクレロを読んでいた。「聖職者よりも数学において影響力のある人間になりたい。」と思うようになる。

1789 年 21 歳のときバステューユ監獄が発端となったフランス革命は起こる。



1790 年ベネディクト大学の教師となる。

1793 年革命の精神に共感して地域革命委員会に参加する。フランス革命の混乱に巻き込まれながら政治活動を行い郷土の民衆をリードした。

1794 年モンジュの招待で Ecole Polytechnique の教師になる。

フランス革命によって、身分制が廃止された。生まれによって一生が決定されることはなくなり、原則として、人々は、自己の意志と資質と努力によって人生をえらぶことができるようになった。自由で平等な個人の確立、所有の権利の確認は、

資本主義的な経済活動の基本の条件であった。そして、入学試験の成績だけで貧富、貴賤を考慮しない「教育制度改革」が実施された。

1795年国民議会在が設立した *Ecole Normale* の教師になる。当時 *Ecole Normale* には、ラプラス、モンジュ、ラグランジュが居た。

ここで「フーリエの定理」；代数方程式の実根の個数に関する定理を発表した。

1798年ナポレオン『数学の進展と完成は、国家の繁栄と密接なつながりを持っている。』という信条の下ナポレオンのエジプト遠征に従軍した。

1802年グルノーブルのイーゼル県知事に任命される。グルノーブルからトリノへの道路完成やブルゴアン沼地の干拓を実施。

1807年に熱伝道の問題をフーリエ

展開で解いた最初の論文を発表したとき、ラプラスやラグランジュは「厳密性を欠いている。」として論争になった。当時、誰もフーリエ変換の重要性を発見することはできなかった。

1808年男爵の称号を得る。

1811年パリの科学アカデミーが「熱伝道の法則の数学的理論を与え、この理論の結果と精密な実験結果を比較せよ。」という懸賞問題を出題した。

1814年ナポレオンがエルバ島へ流刑される。

ラプラスとともにルイ 18 世に忠誠を誓う

1815年ナポレオンがフランスへ上陸し、パリへ進軍した。との途中グルノーブルでナポレオンと再会し、再び「皇帝」に忠誠を誓う。

100日後、ナポレオン失脚。

ルイ 18 世により「裏切り者」として、すべての公職から追放される。



その日も生活の糧もなくなり、餓死の手前まで追いつめられる。昔の教え子セーヌ知事シャプロルが統計の仕事を与えた。

1816年科学士院に推挙されるが、ルイ 18 は拒否した。

1822年「熱の解析的理論」を発表する。

熱伝導という物理的現象を微分方程式で表現した。

1826年アカデミー・フランセの会員に推挙される。

1830年5月16日パリで、死去。

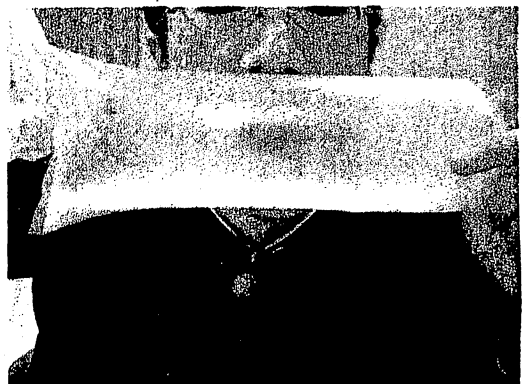
Episode 2 波を感じる実験

【クントの実験】

用意するもの

傘袋（細長いビニール袋）、発砲スチロールの粒

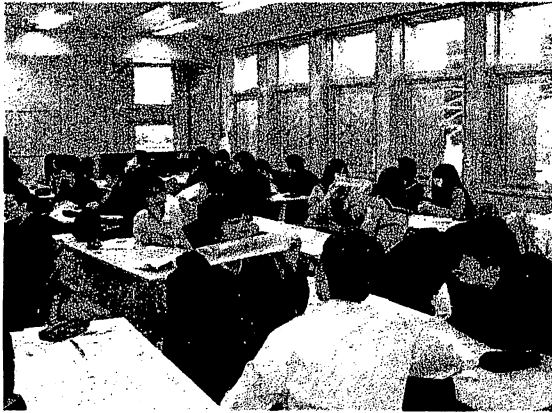
Step1 図のように、40センチ程度のビニール袋に、発砲スチロールの粒を入れ、紐で縛る。



Step2 「ラ音」440Hz 程度の声をビニール袋に向かって直接出してください。発砲スチロールの粒はどのような動きをするのでしょうか？

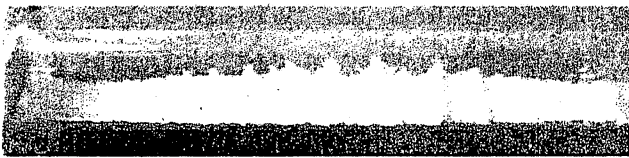
Step3 1オクターブ高い「ラ音」880Hz の声では、発砲スチロールの粒はどのような動きをするのでしょうか観察しなさい。

Step4 様々な音ではどうなるのか観察する。粒と粒の間隔はどうなるのか観察せよ。



【結論1】 クント（物理学者）が 1866 年に行った実験です。

クントはガラス管にコルクの粉を入れて、ガラス管の一端に金属の棒を取り付けました。金属の棒をこすって振動させると、粉も振動して、波長の測定ができました。我々の声は波である。

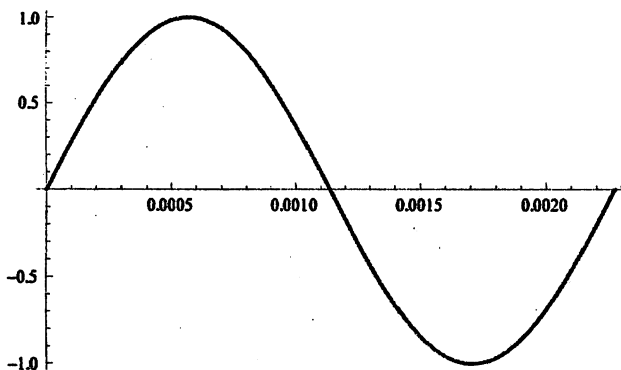


【電話音の実験】

単音の発生実験

パソコンで作成した様々なグラフの音を聞いてみよう。

【実験1】 周波数 440Hz を発生する。

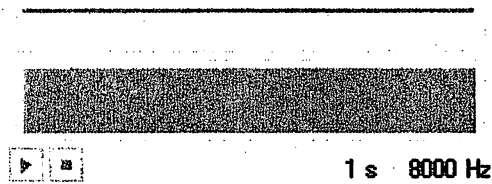


$y = \sin x$ を単に発生させただけでは人間の耳で聞くことはできない。

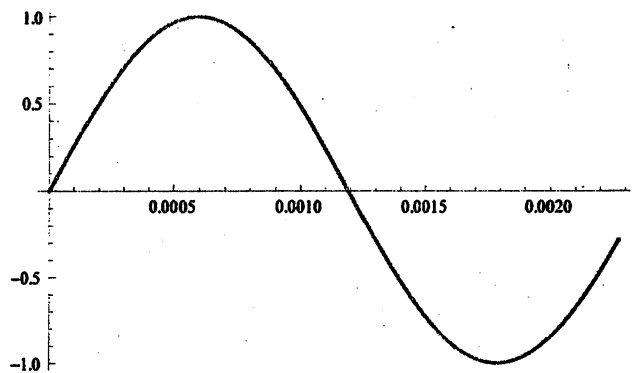
コンピューターで1秒間に 440 回の振動数 (Hz)、つまり、周期 $\frac{1}{440}$ 秒にすると、スピーカーから「ラ」

の音を聞くことができる。

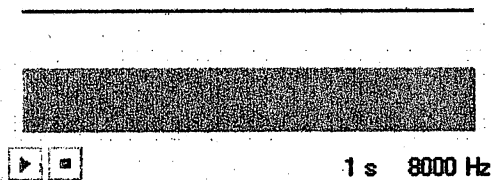
この音はテレビの時報の音でもある。



【実験2】 同じ $y = \sin x$ の波形ではあるが、周波数を 420Hz にしてみよう。



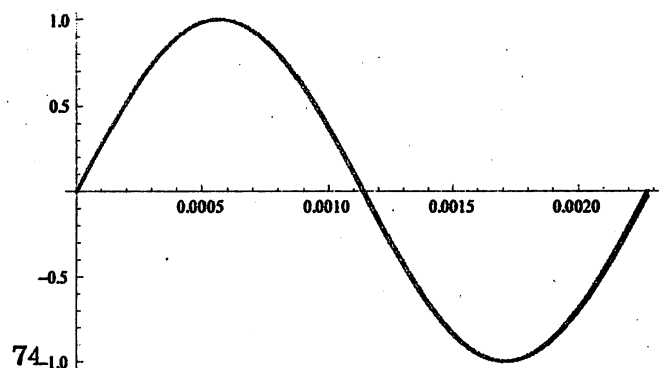
音の違いを聞き分けることができるでしょうか？



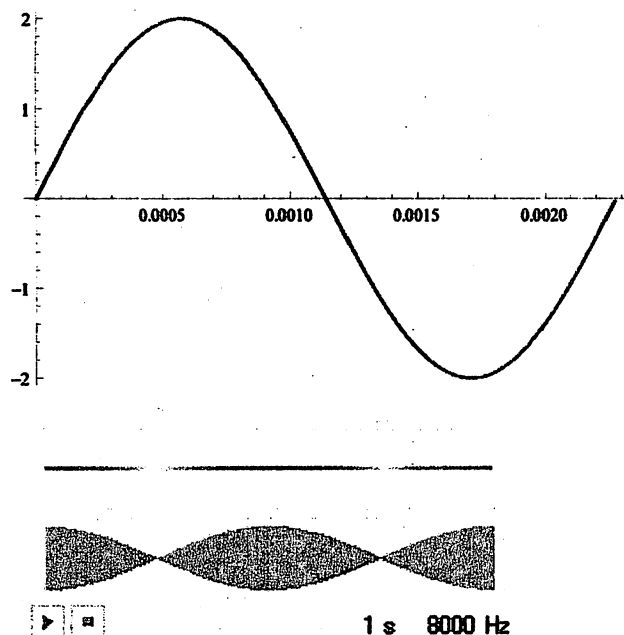
このように、ある特定の周波数成分だけでできている音を『単音』といいます。

単音の例「音叉」「時報」

【実験3】 440Hz と 438Hz の正弦派の音を合成した音を聞いてみよう。

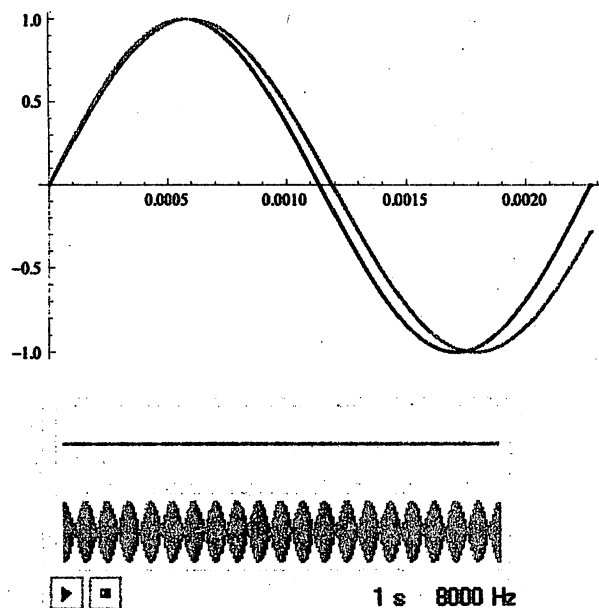


440Hz と 438Hz の音は見たグラフで表すとほとんど変化しないが、2つの波を合成してスピーカーに送ると、今までにはない音が発生する。



【実験4】440Hz と 420Hz 正弦派の音を合成した音を聞いてみよう。

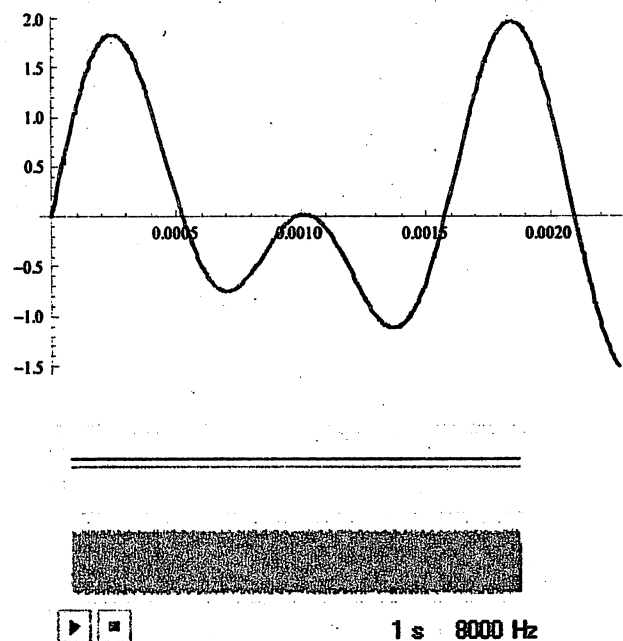
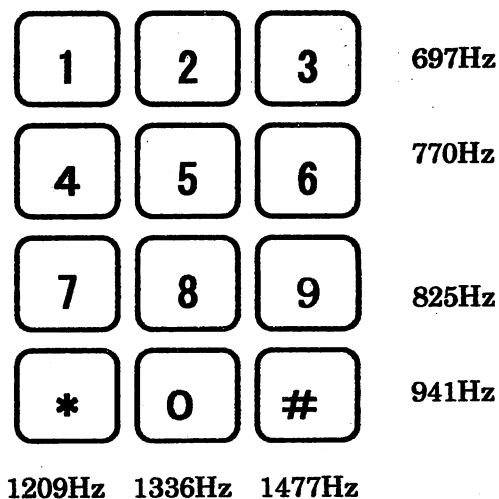
440Hz と 438Hz のよりも変化があることがわかる。どこかで聞いたことのある音だと思う。



このように、いくつもの周波数の波が混ざりあっている音を『合成音』といいます。

合成音の例「心臓の鼓動」「パルサー電波」
逆に、身近な『合成音』を $y = \sin kx$ を用いて作ってみましょう。

【実験5】697Hz と 1209Hz 正弦派の音を合成した音を聞いてみよう。

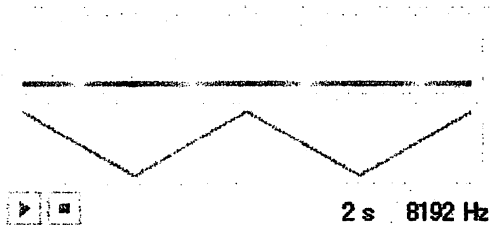


この音はプッシュホン回線の電話の番号
この音はプッシュホン回線の電話の番号『1』を表します。電話のプッシュホーンは2種類の正弦波の重ね合わせを利用したものである。

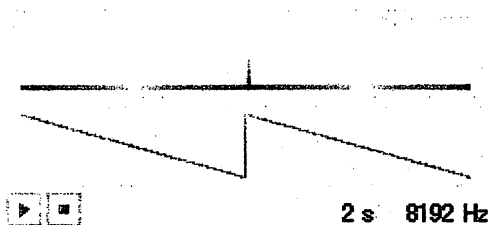
Episode 3 波は三角関数の和

【実験 8】波形の違いによる音の違いを比較する。

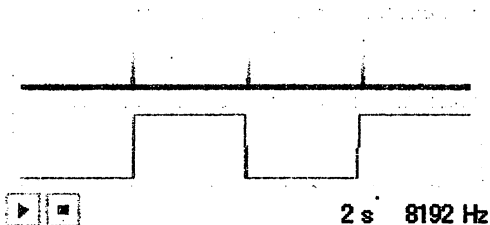
- (1) 三角形の形をした波の音、周波数は 440Hz
Waveform [Triangle, 1, 2]



- (2) 鋸の形をした波の音、周波数 440Hz
Waveform [Sawtooth, 1, 2]



- (3) 短冊形をした波の音、周波数は 440Hz
Waveform [Square, 1, 2]



【結論】波形が異なると聞こえる音も異なる。

1807 年フーリエはフランス学士院へ「固体中の熱伝導の理論」を提出し、「どんな波も三角関数で表示できる。」と主張した。当時の関数概念を根本的に覆す革命的な論文であった。

$\left\{ \cos \frac{k\pi x}{l} \right\}, \left\{ \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}$ は周期 $\frac{l}{k}$ の単振動を表す

ので、周期 $2l$ の関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx$$

としてフーリエ係数 a_n, b_n を求めることができる
と主張した。しかし、数学的な厳密性が欠如して
いたので、当時の数学者達の反対が大きかった。

$f(x)$ がフーリエ級数で表示するとき、「収束する」
か「収束しない」か、大きな疑問があった。

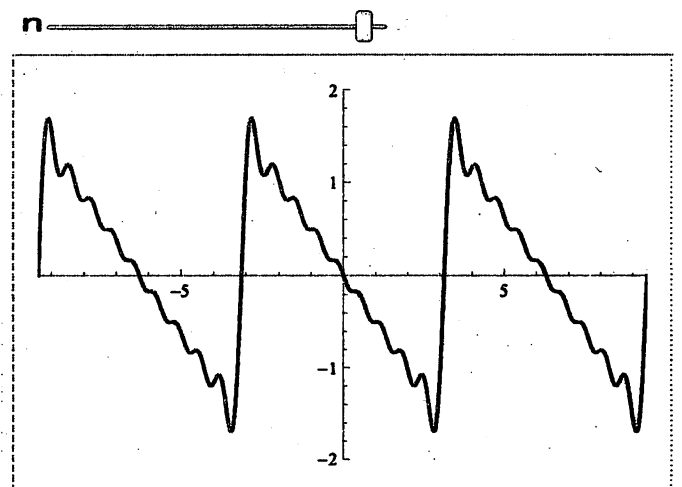
区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f_n(x)$ が $f(x)$ に
収束するとき、「一様収束」「平均収束」が存在す
ることがわかって来た。

【実験 9】鋸 (のこぎり形) の波形を三角関数の
和として表示してみよう。(一様収束の例)

$f(x) = -\frac{1}{2}x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ について

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{2}x \right) \sin nx dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx$$



「一様収束」とは

$f_n(x)$ が $f(x)$ とピッタリと一致することである。

大学の数学では、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、
 $-\pi < x < \pi$ を満たす、すべての x に対して、

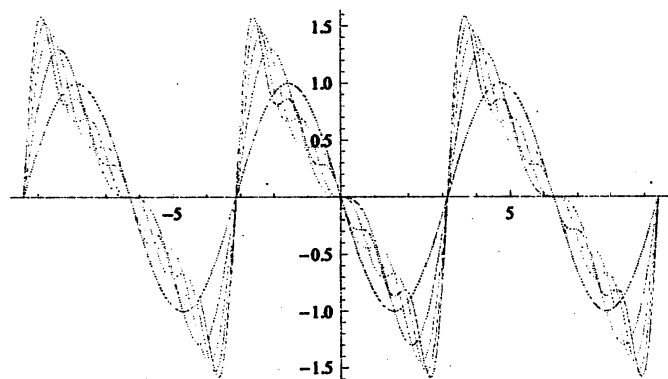
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad n > n_0 \text{ となる } n_0 \text{ が存在する。}$$

Clear[G, sawwave];

$$G[n, x] := -\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin[kx];$$

sawwave[x_] := Table[G[n, x], {n, 1, 5}];

Plot[Evaluate[sawwave[x]], {x, -3π, 3π}]



【実験 10】短冊波形を三角関数の和として表示してみよう。(平均収束の例)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \{1 - (-1)^n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \{1 - (-1)^k\} \sin kx \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x \end{aligned}$$

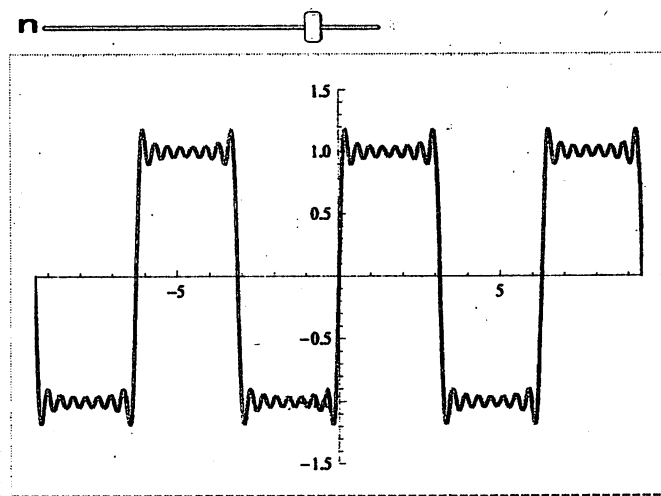
「平均収束」とは、

差の面積の平均値が 0 に収束する。山や谷が存在しても、やがて小さくなるので無視する。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $-\pi < x < \pi$ を満たす、す

$$\text{べての } x \text{ に対して、} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx < \varepsilon$$

$n > n_0$ となる n_0 が存在する。

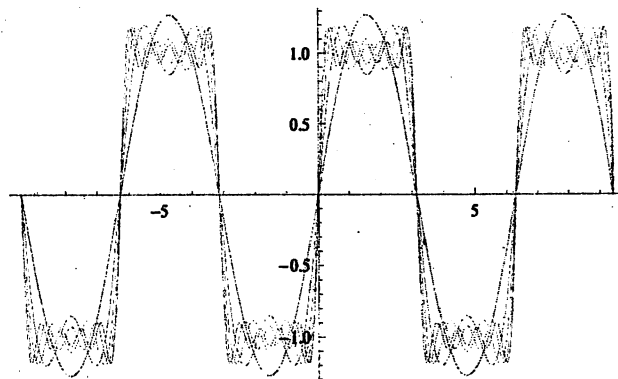


Clear[G, sawwave];

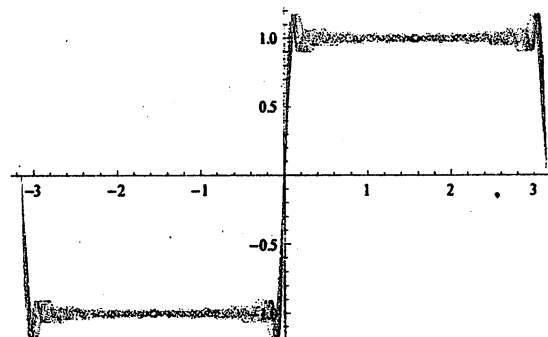
$$G[n, x] := \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sin[(2k-1)x];$$

sawwave[x_] := Table[G[n, x], {n, 1, 5}];

Plot[Evaluate[sawwave[x]], {x, -3π, 3π}]



上図のように、不連続点があるとき、最終的に線分が残る現象を「ギブスの現象」という。



「フーリエ級数で書ける関数は本当に存在するのか?」と・・・厳密性を追求する過程で「関数」「極限」「一様収束」「平均収束」等について今日の微分積分学を整えるきっかけになった。

Episode 4 ・複素形フーリエ級数へ

周期 2π の周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad \text{であった。}$$

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ より

$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ となるので

e^{inx} は周期 $\frac{2\pi}{n}$ の関数である。

$$\begin{cases} e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \\ e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} \cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \\ \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) \end{cases}$$

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$\text{【例】 } f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x \leq 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

を複素フーリエ級数展開する。

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} dx = -\frac{1}{2\pi in} [e^{-inx}]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2\pi in} \{\cos n\pi - 1\} \end{aligned}$$

$$n; \text{奇数のとき } c_n = \frac{1}{\pi in}$$

$$n; \text{偶数のとき } c_n = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} e^{i(2k-1)x}$$

これは複素数世界なので実数世界に変換すると

$$a_0 = 2c_0 = 1 \quad a_n = c_n + c_{-n} = 0$$

$$-ib_n = c_n - c_{-n}$$

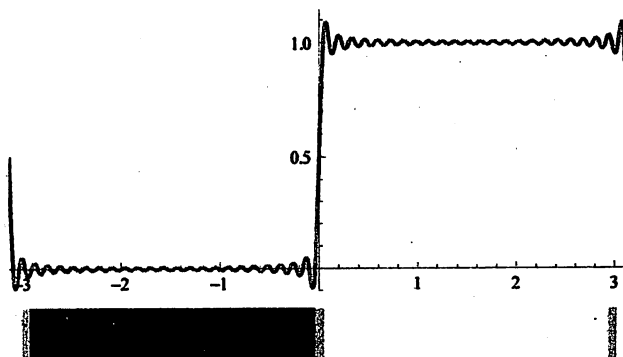
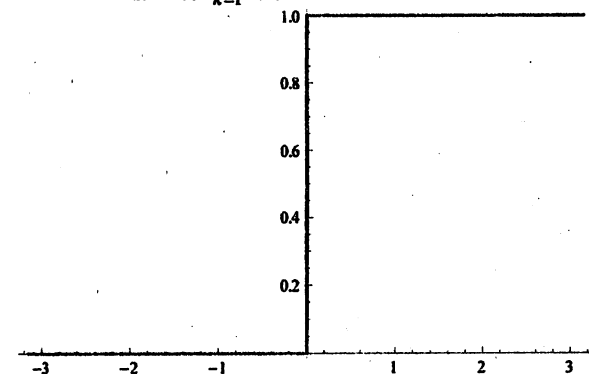
$n; \text{奇数のとき}$

$$b_n = \frac{c_{-n} - c_n}{i} = \frac{2}{\pi n}$$

$$b_n = 0 \quad n; \text{偶数のとき}$$

実数世界に変換すると、

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x$$



Episode5 フーリエ変換へ

周期関数のフーリエ級数展開は、正弦と余弦の重ね合わせで表示したが、実際に分析しようとする関数は、周期のない非周期関数が多い。非周期関数は、周期関数の T が $T \rightarrow \infty$ になった極限として扱う。

周期関数；

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx$$

非周期関数；

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$F(\omega)$ を、 $f(x)$ のフーリエ変換

$F(\omega)$: 空間周波数スペクトル

その逆変換

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

オイラーの公式 $e^{-i\omega x} = \cos \omega x - i \sin \omega x$ より、

$$|e^{-i\omega x}| = \sqrt{\cos^2 \omega x + \sin^2 \omega x} = 1 \text{ から、}$$

$$|f(x) e^{-i\omega x}| = |f(x)|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-i\omega x}| dx \text{ が有限ならば、}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \text{ も有限である。}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos \omega x - i \sin \omega x) dx$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx$$

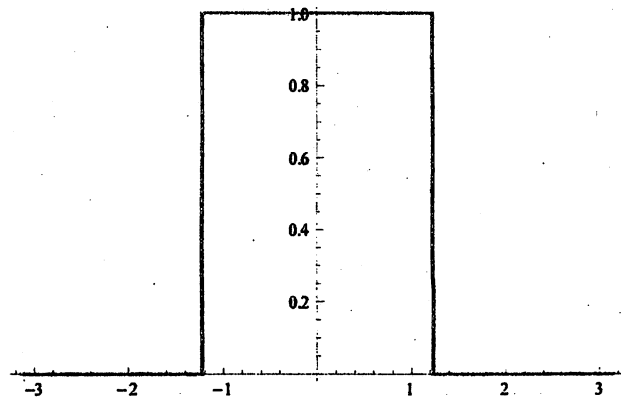
とおくと、

$$F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega) = |F(\omega)| e^{i\phi(\omega)}$$

$|F(\omega)|$ は、 $f(x)$ の「フーリエスペクトル」

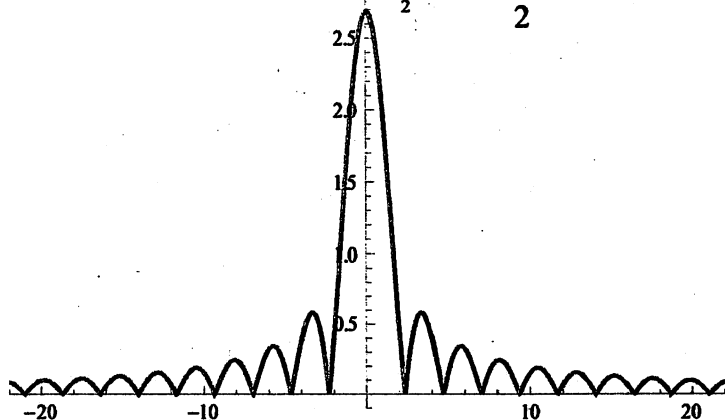
$e^{i\phi(\omega)}$ は、 $f(x)$ の位相スペクトル

【例】 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{d}{2} \\ 0 & |x| > \frac{d}{2} \end{cases}$ をフーリエ変換する。



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-i\omega x} dx = -\frac{1}{i\omega} \left[e^{-i\omega x} \right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} = d \frac{\sin \frac{\omega d}{2}}{\frac{\omega d}{2}}$$



フーリエスペクトル (↑)

Episode6 2次元フーリエ変換

平面座標 (x, y) , X線吸収係数 $f(x, y)$ から空間周

波数領域 (ξ, η) への2次元フーリエ変換 $F(\xi, \eta)$

について

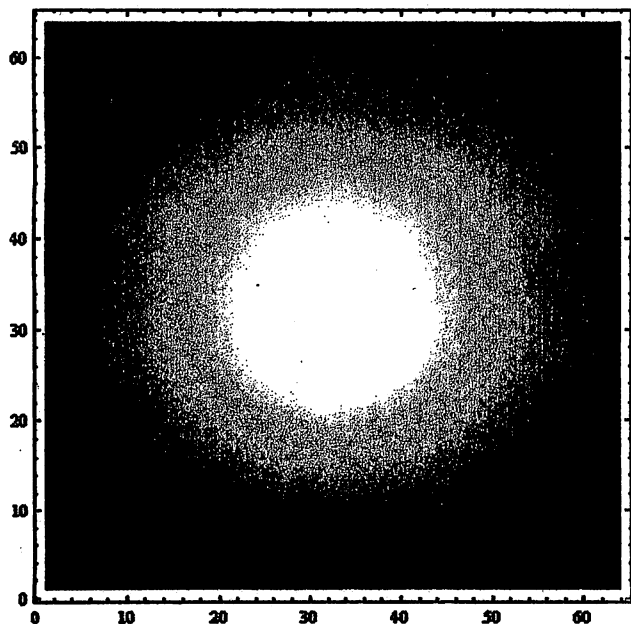
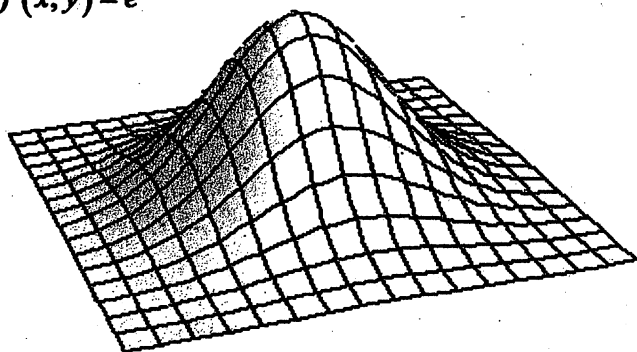
$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy$$

$$\xi = \omega \cos \theta, \eta = \omega \sin \theta$$

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(\xi, \eta)$$

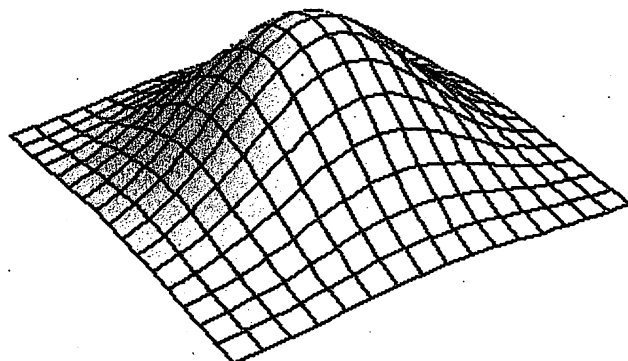
【例】

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

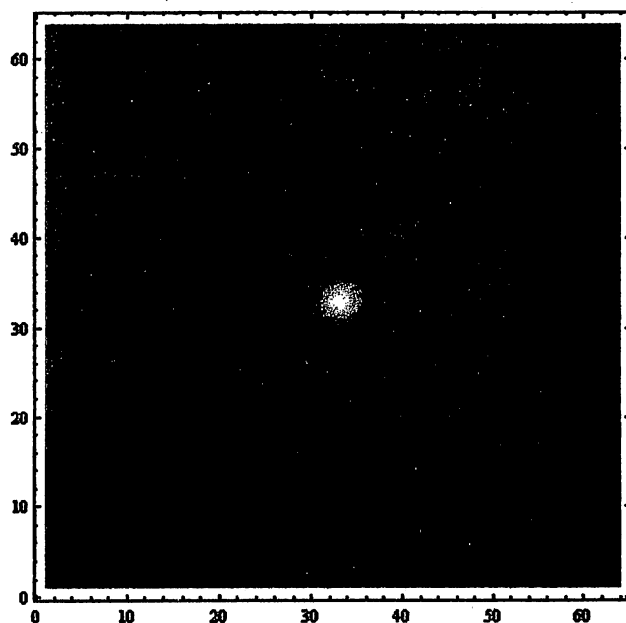


$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ をフーリエ変換すると

$$F(\xi, \eta) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\eta^2}{4}} \text{ となる。 (途中計算省略) } (\downarrow)$$



$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ より、ややつぶれた曲面になる。



Mathematica は FFT 高速フーリエ変換を装備しており、フーリエ変換の結果、低周波数部分の画面を中心に配置し、高周波数部分の外側に配置している。

$f(x, y)$ をフーリエ変換すると、 $F(\xi, \eta)$

$F(\xi, \eta)$ を逆フーリエ変換すると $f(x, y)$

直交座標 (ξ, η) を極座標 (ω, θ) に変換

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy$$

$$= F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy$$

平面座標 (x, y) を角 θ 回転し、新座標 (X, Y) とす

ると

$$\begin{cases} X = x \cos \theta + y \sin \theta \\ Y = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dX} = \cos \theta, \frac{dx}{dY} = -\sin \theta, \frac{dy}{dX} = \sin \theta, \frac{dy}{dY} = \cos \theta$$

$$\text{ヤコビアン } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} x = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{cases}$$

積分の変数変換より

$$F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(X \cos \theta - Y \sin \theta, X \sin \theta + Y \cos \theta) dX dY$$

$$p(X, \theta)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(X \cos \theta - Y \sin \theta, X \sin \theta + Y \cos \theta) dY$$

とおくと

$$F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(X, \theta) e^{-i\omega X} dX$$

$p(X, \theta)$ から $F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$ が求められ

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ まで変化すると、 $F(\xi, \eta)$ が求められ

る。 $f(x, y) \Leftrightarrow F(\xi, \eta)$

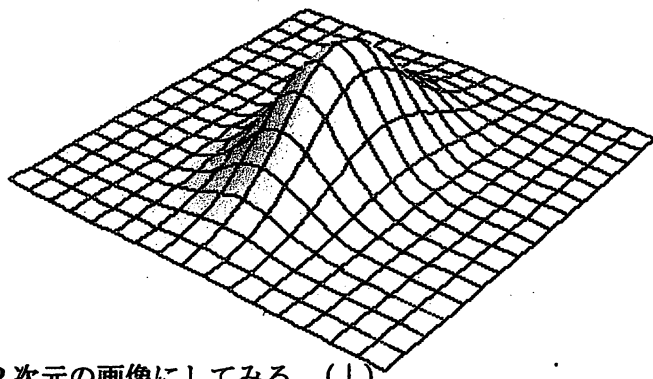
CT の基本的な数学的原理である。

【例】

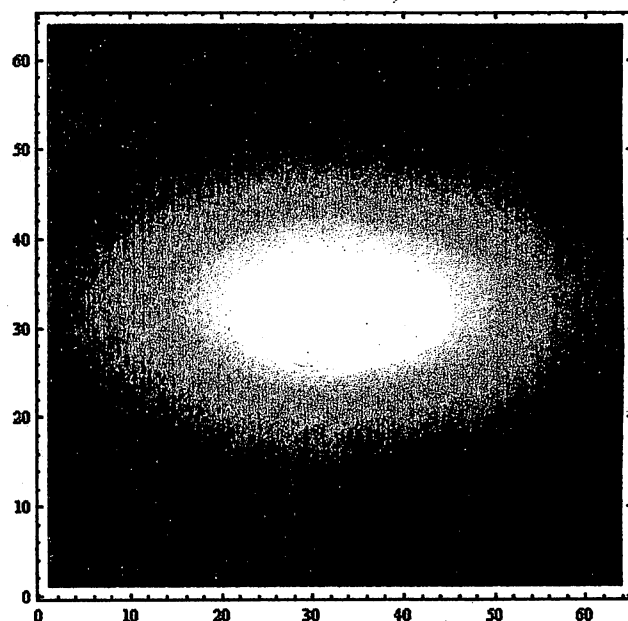
$$f(x, y) = e^{-ax^2 - by^2}$$

についてフーリエ変換してみよう。

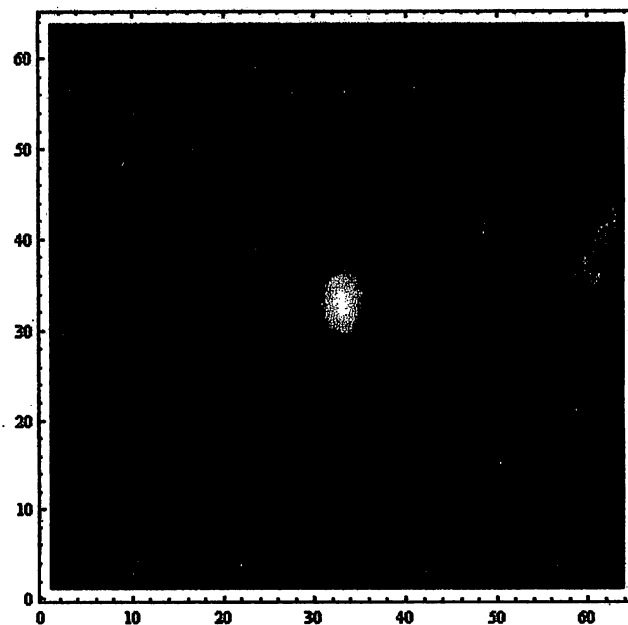
$$f(x, y) = e^{-ax^2 - by^2} \quad \text{のグラフ (↓)}$$



2次元の画像にしてみる。(↓)



フーリエ変換した、画像 (↓)



X線画像診断の数学

医学の進歩に数学はどのように関わってきたのか

1895年11月「X線は可視光線を通さない物体を透化すること。」を発見し、実験室で手の「X線写真」を撮影した Wilhelm Conrad Roentgen は、6年後1901年に最初のノーベル物理学賞を受賞した。1910年代には、GE社が装置を改良したクーリッジ管や増感紙をフィルムを併用し、X線診断法は実用化された。現在、医療現場においてX線画像診断は、医療現場において最もポピュラーに活用されている。

単純X線撮影

X線撮影は、X線の持つ次の性質を利用している。

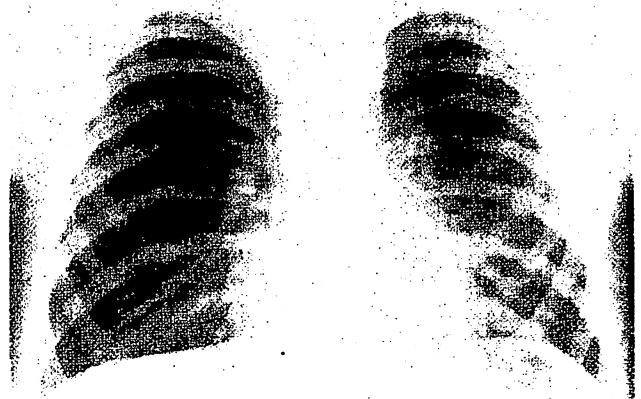
(i) X線は体内に入ると、減衰（吸収・散乱）する。

(ii) 写真作用、蛍光作用、電離作用、着色作用
人体内の各組織のX線の減衰する差が、透過したX線の量を変化させ、フィルムを用いて画像として観察する。減衰割合は

①原子番号の大きい物質は減衰が大きい。

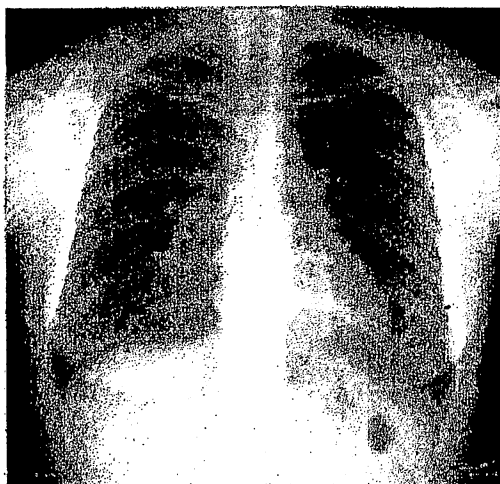
②同じ原子番号のとき、密度に比例する。

骨格はP（リン）Ca（カルシウム）を含んでいるので原子番号は大きいのでX線は減衰するので、白く観察できる。肺は空気を含んでいるので密度が小さいので減衰しにくいので、黒く観察できる。

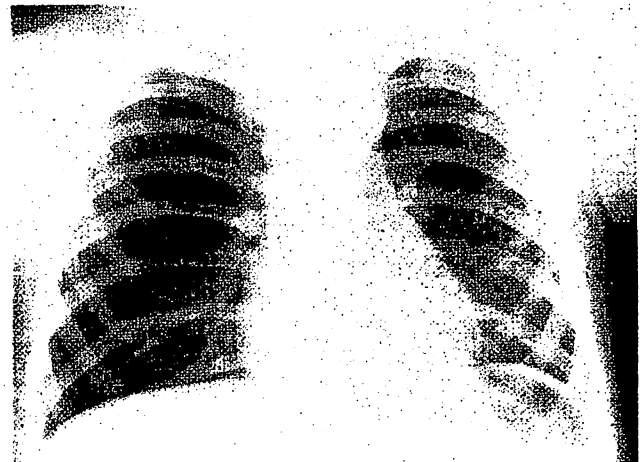


吸気時（↑）には、気管支内の空気は、正常な位置にある。呼気時（↓）に右肺が収縮できず、収縮可能なのは、左肺である。右肺がより放射性透過性であることがわかる。

右気管支から、ピーナッツが見つかった例。



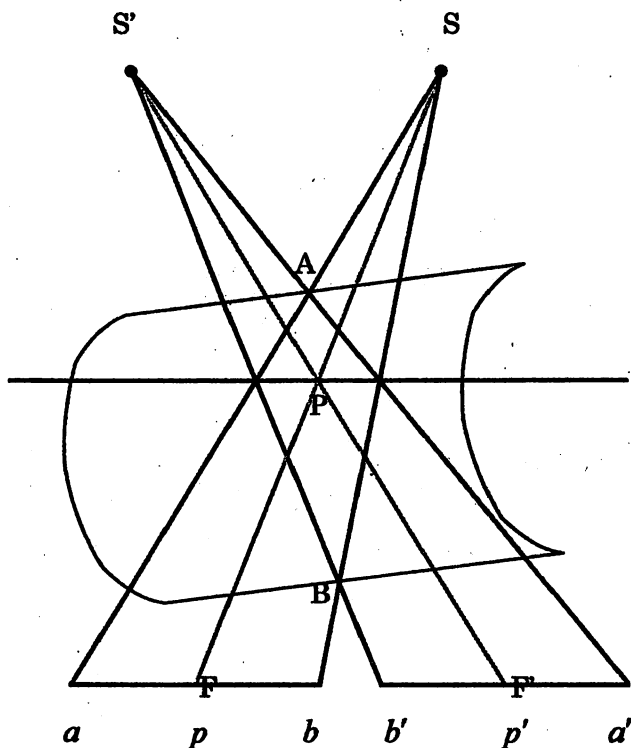
(X線単純撮影 ↑ Fig001)



断層撮影

X線単純撮影は、X線が体内に入ってから抜けるまでに通過したX線減衰の総和として2次元平面に投影した画像である。(Fig001)

断層撮影は、目標とする特定の深さの層のみを明瞭に撮影して、他の断層面以外は、ぼかしてしまう方法である。



X線発生管 S が S' に等速に移動する時に、フィルム F を F' に移動させると、線分 SF と線分 $S'F'$ の交点 P は、常にフィルム上にある一定の点 $p(p')$

(断層撮影 ↓ Fig002)



(単純撮影 ↓ Fig003)

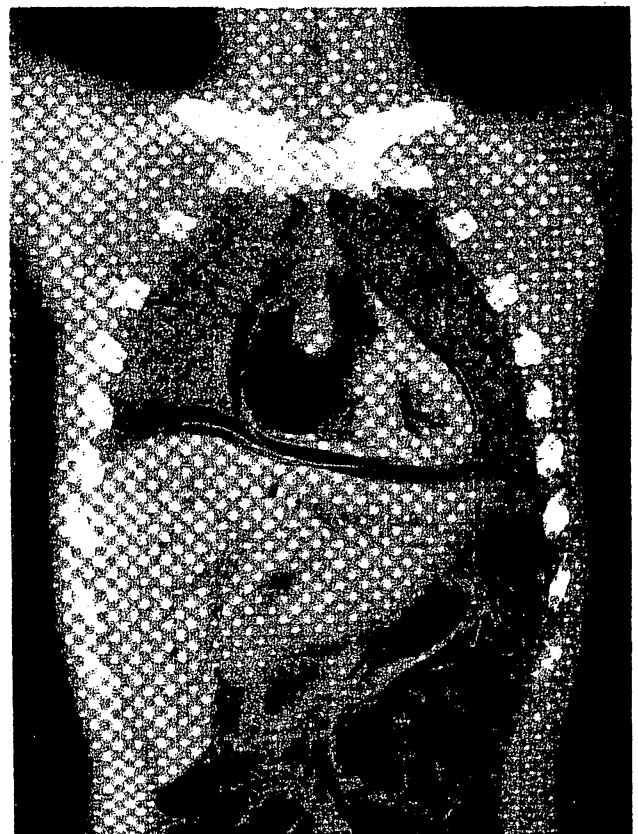


に投影される。

P を含むフィルムに平行な断面以外の点 A , B の投影像は、 $a-a'$, $b-b'$ となり、ずれてしまう。結果画像は、ボケてしまう。

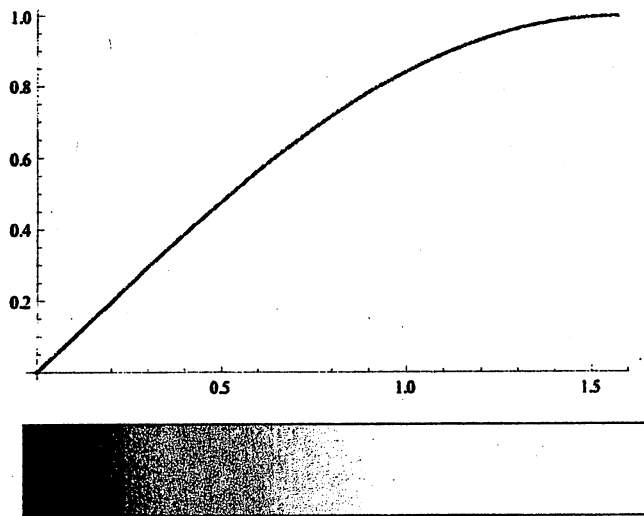
【質問 1】上の写真 Fig002 と Fig003 の違いは？特に、鎖骨部分を比較してみよう。

上の写真 Fig002 は断層撮影で、鎖骨がはっきりと投影されているが、写真 Fig001 は、全体は投影されているものの、鎖骨が不明確に写っているのがわかる。(Fig004 ↓)



CT スキャンの数学 — 画像も波である

【実験】コントラスト伝達関数



明るい時の値 = 1、暗い時の値 = 0 として

$y = \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ をコントラスト伝達関数と

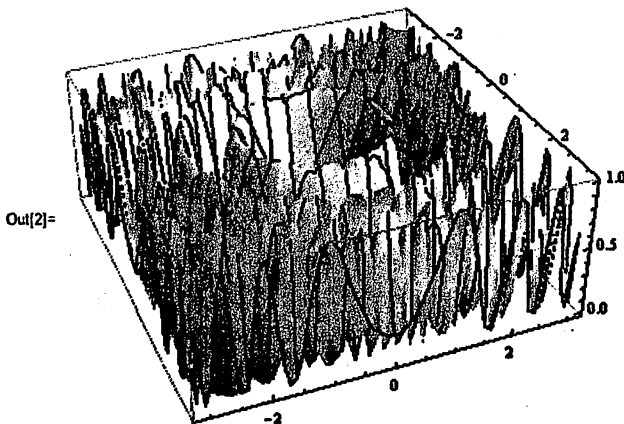
して表現した明暗を現すグラフである。

0 と 1 の間を値とする 2 変数関数として画像を表現することができる。

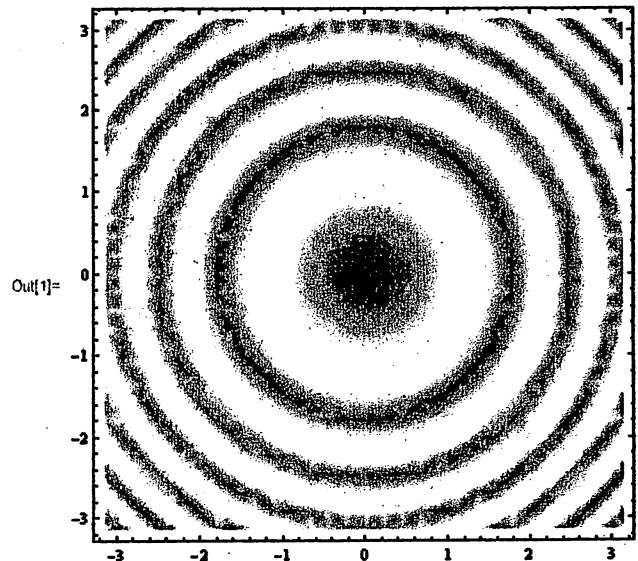
【実験 9】 $f(x, y) = \sin^2(x^2 + y^2)$ の 2 変数関数

をコントラスト伝達関数として真上から見る等高線の明暗を作成してみる。

In[2] = Plot3D[Sin[x² + y²]², {x, -π, π}, {y, -π, π}]

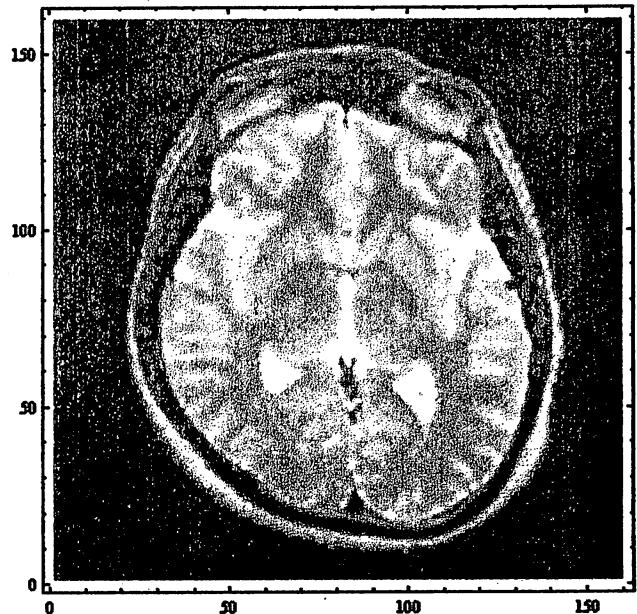


In[1] = DensityPlot[Sin[x² + y²]², {x, -π, π}, {y, -π, π}]

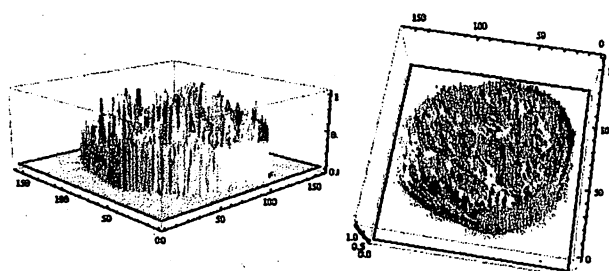
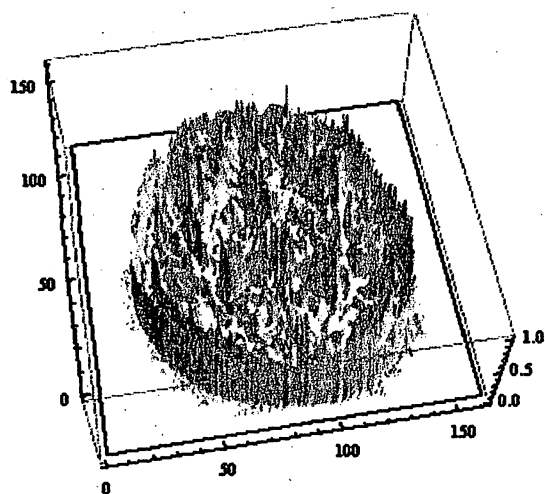


【結論】「画像は 2 次元の世界である」

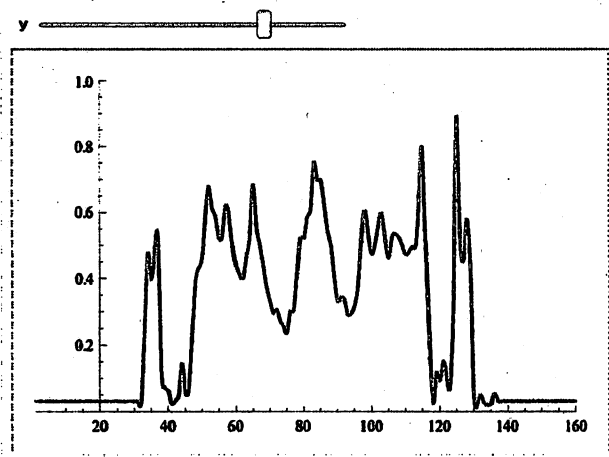
X 線は身体に入ると減衰する。一般的に原子番号の大きい物質を通過する X 線の減衰は大きい。人体の骨や歯は P (リン) や Ca (カルシウム) を含んでいるため、減衰し「白く」見える。肺は空気を多く含んでいるので減衰が少なく「黒く」見える。このため、X 線は各組織を透過した強度に差がある。この X 線の減衰値を関数の値として、医療用の CT 画像が作成される。



この CT 画像を、横軸 x 軸、縦軸 y 軸として、X 線の減衰値を関数の値として、2 変数関数を作る。



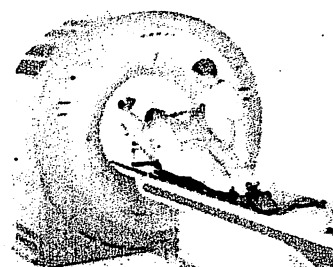
y成分を固定して、変数xを横軸にするグラフを作成すると、下図のような波が得られる。



「どんな波でも、周期の異なる三角関数の和で表示できる。」とフーリエは説いた。ならば、どんな画像も、いろいろな周波数（周期）を持った三角関数で表示できる。その、周期を求めることをスペクトル分析という。周期を変数とする関数に変換することを、フーリエ変換という。

【実験】 Computer Tomography の原理

CT は 1973 年イギリスのハウンスフィールド G.N.Hounsfield とアメリカのコーマック A.M.Cormack によって発明された。



1979 年彼らは、ノーベル生理学・医学賞を受けた。CT はいろいろな方向から X 線を照射する。患部によって X 線の吸収率が異なるので X 線の分布影像が投影される。これらの影像は互いに重なり合ってボケた影像になるので、波長の逆数についてフーリエ変換を行う。これらの変換は重なり合うことはないので、積を計算し、全体のフーリエ変換を合成して、最後に逆変換すると断層写真が完成する。CT は、実質臓器の診断に有効であり、さらに、病巣の立体形状についても情報が得られる。その後、人体中の水分子の水素原子核が電磁波を吸収する比率をフーリエ変換により求めた MRI の発明も続き、医用画像診断が急速に進歩し現在の医療には欠くことができない機器となった。

さて、この CT の数学的原理はどのようなものであるのだろうか？ どうして断面図を作成することができるのだろうか？



「ロの字」を数式処理ソフトを使ってパソコンで画像処理してみよう。CT の原理は数学者ラドン Johann Radon (1887 ~1956) が 1917 年に発表

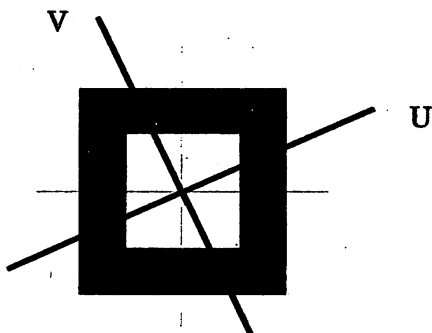


した『すべての角度から透視したときに、得られる無限の投影データから 2 次元、3 次元の画像を一意的に再構成することができる。』との数学的

定理が基礎となっている。

Step1 Radon 変換

ラドン変換とは、断層面を x, y とし、X 線の吸収係数を $f(x, y)$ とする。



x 軸から反時計回りに角 θ だけ回転させた (u, v) 座標を考える。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

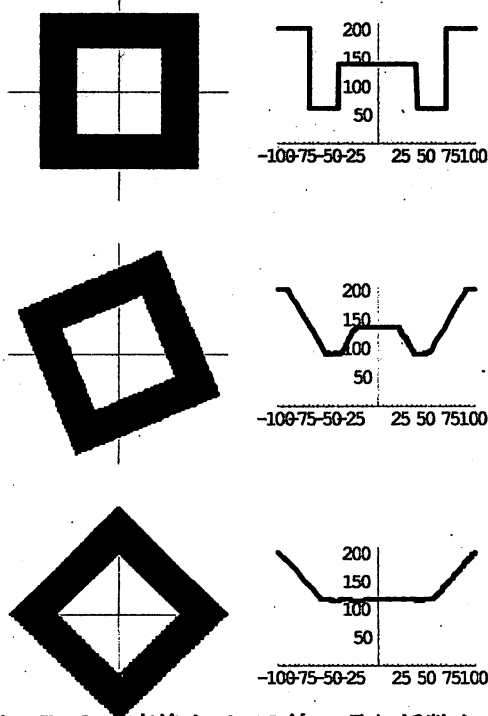
v 軸上に X 線発生装置があり、 u 軸上へ X 線を投影する。

$$(Rf)(u, \theta)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) dv$$

... ①

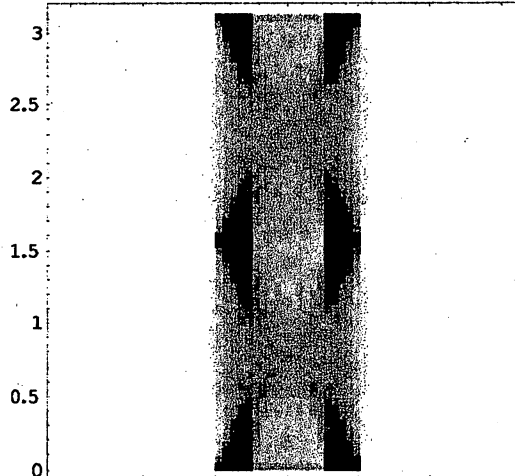
f の u 軸上の Radon 変換という。



つまり、Radon 変換とは、X 線の吸収係数を v 軸

に平行な直線上のデータを積算したものである。

X 線撮影で得られるデータそのものである。



上図は横軸に u 、縦軸に角 θ をとり Radon 変換したグラフを 2 次元化した。

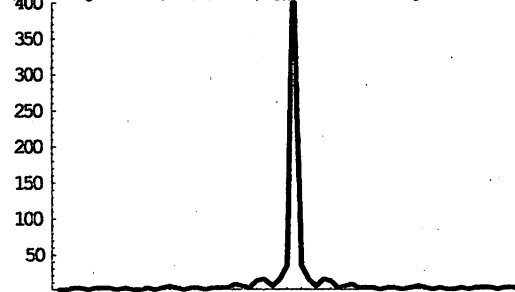
このあらゆる角度から得られた X 線の分布グラフから、断面画像を再構成する方法が問題である。

Back Projection 法 (逆投影法) が最も簡単な断面の再現方法であるが、原点付近での投影枚数が重なりボケてしまい原画像に戻ることはない。

Step2 Fourier 変換

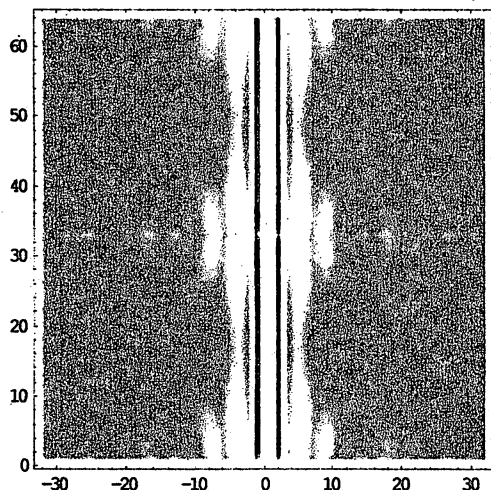
そこで、波長の逆数について

フーリエ変換を行う。波長分布に変換する方法により、独立に扱うことができる。各波長別に変換の積を合成して、最後に逆変換すると断層写真が得られる。1965 年クーリー-Cooley とチューキー-Turkey によって高速フーリエ変換 (FFT) のアルゴリズムが考案され、コンピューター技術の進歩に伴い、リアルタイムでの多量の処理計算が可能となった。CT 発明の準備は整った。



上図のグラフは、 $\theta = 0$ の Radon 変換したグラフを数式処理ソフト Mathematica で高速フーリエ変換 FFT したものである。

縦軸を角 θ 、横軸に r をとり、フーリエ変換したグラフを2次元化したグラフが下図である。



$F_u(Rf)(r, \theta)$ のグラフ

①より u 軸上の Radon 変換

$$(Rf)(u, \theta)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) dv$$

を、変数 u についてフーリエ変換すると、

$$F_u(Rf)(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (Rf)(u, \theta) e^{-iru} du$$

... ②

=

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) e^{-iru} du dv$$

$x = u \cos \theta - v \sin \theta, y = u \sin \theta + v \cos \theta$ より

$u = x \cos \theta + y \sin \theta$ を代入すると

$$F_u(Rf)(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dx dy$$

$$= \sqrt{2\pi} F_{x,y}(f)(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

... ③

2変数の逆フーリエ変換により

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{x,y}(f)(\varepsilon, \eta) e^{i(x\varepsilon + y\eta)} d\varepsilon d\eta$$

... ④

極座標変換する。 $\varepsilon = r \cos \theta, \eta = r \sin \theta$ より

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{x,y}(f)(\varepsilon, \eta) e^{i(x\varepsilon + y\eta)} d\varepsilon d\eta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} F_{x,y}(f)(r \cos \theta, r \sin \theta) e^{i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} r dr \end{aligned}$$

... ⑤

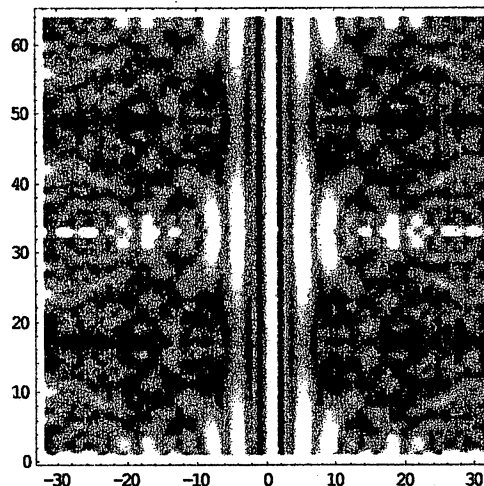
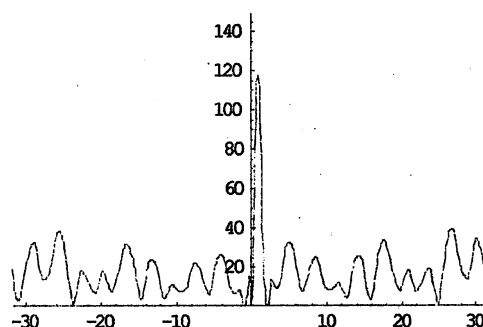
③⑤より

$$f(x, y) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} F_u(Rf)(r, \theta) e^{ir(x \cos \theta + y \sin \theta)} r dr$$

Step3 フィルター

$$Q(r, \theta) = |r| F_u(Rf)(r, \theta)$$

$\theta = 0$ のときフィルター処理を実施したグラフ



$Q(r, \theta) = |r| F_u(Rf)(r, \theta)$ のグラフ

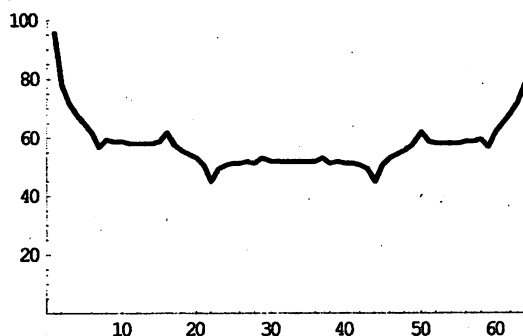
上図は横軸 r 、縦軸 θ としてフィルター処理を実施した図である。

Step4 逆 Fourier 変換

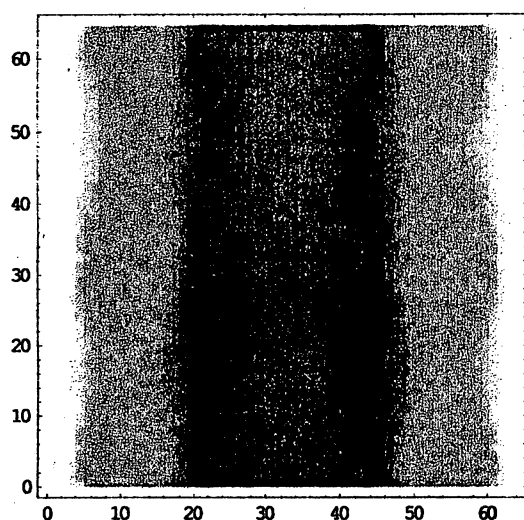
フィルター処理をした画像を半径 r について逆フーリエ変換を実施する。

$$P(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q(r, \theta) e^{izr} dr$$

下図は $\theta = 0$ のとき逆フーリエ変換を実施したグラフ



横軸 r 、縦軸 θ として逆フーリエ変換を実施すると、

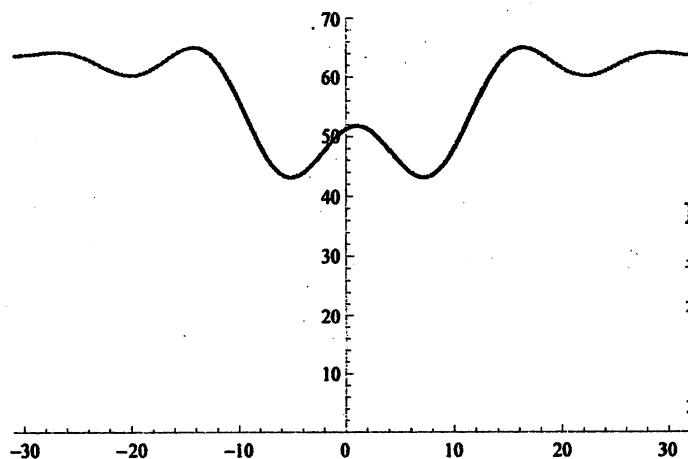


元の画像に戻すには、逆投影変換を行う。

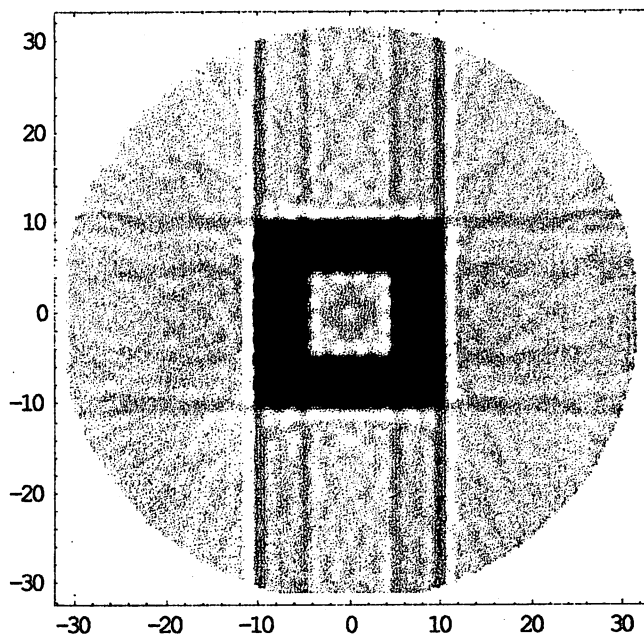
Step5 逆投影変換

$$(BP)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi P(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

$\theta = 0$ のとき逆投影変換を実施したグラフ (↓)



更に、元に戻すには直交座標変換すると。
求めた CT 画像は下図である。



近年 CT の撮影方法も進歩している。

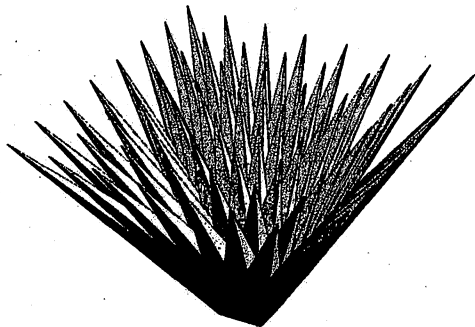
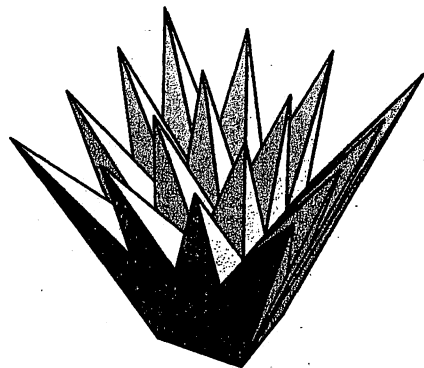
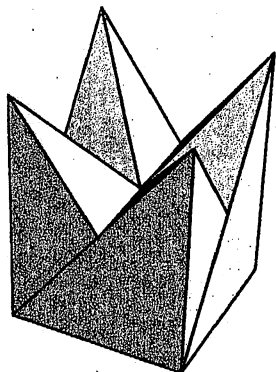
ヘリカル撮影: X 線管球が連続回転すると同時に、
寝台も移動して、螺旋状にスキャンする。3 次元
の情報が得られる。(肺の表面↓)



MDCT (多列検出器型): 従来の CT は X 線検出
器が 1 列であるが、最大 320 列配置した。同時に
複数の断面が撮影できるので、高速に撮影できる。
これらの画像処理システムには、フーリエ変換と
逆フーリエ変換が利用されている。

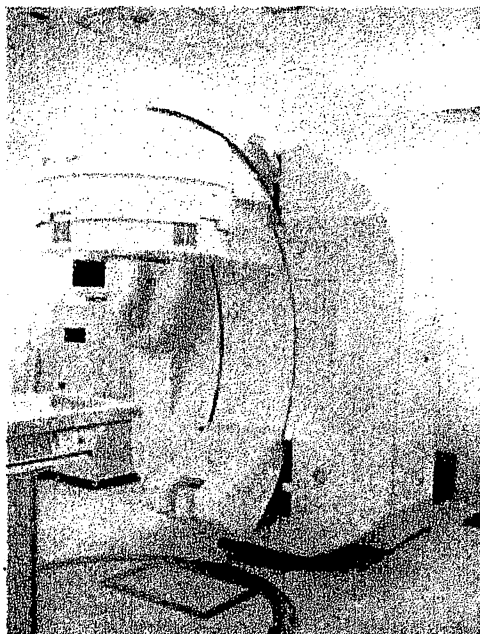
リニアックの原理

1917年ロシアの数学者ベシコビッチ(Besicovitch)は、掛谷問題をベースにして、「あらゆる方向の線分を含むような平面内のルベグ測度0の集合を考え、現在、ベシコビッチ集合として知られている。この考えを拡張して、四角錐の底面を4等分して、小さな4つの三角錐に分割し、底面が一致するように合成する。(→)更に、分割を細かくして、合成すると、(4×4↓)



パイナップルの葉のような細い立体が、次々と作成できる。理論上、測度0の立体ができる。実際、測度0の立体は無理としても、医療分野にこの理論が活用されている。特に、「放射線による癌治療」分野に応用されています。

がん細胞に放射線を照射すると、がん細胞のDNAが破壊され死滅するが、単純に広範囲に照射



するとがん細胞だけではなく正常細胞も死滅してしまう。がんを治療するには、正常部位へ照射す



る線量を少なくし、病巣部分に集中して照射する必要がある。そのために低レベルの放射線を多方向から照射することが重要である。

実用化された「リニアック」(上図)はCTやMRI等の画像診断機器によるデータを基にして、詳しい線分布図を作成して治療計画を立案し病巣部分へ集中照射する放射線治療機器である。

CTやMRIはフーリエ変換を応用したものであるし、遺伝子治療や創薬の分野では「グラフ理論」が活用されています。

MRIは、何を見ているのか？

MRI(Magnetic Resonance Imaging)は、核磁気共鳴(NMR)を利用した画像診断法である。MRIで、対象とする原子核は水素Hである。Hは強い信号を出す。Hの原子核は、水、脂肪、蛋白質、核酸の分子を構成し、体内に大量に存在する。それぞれの状態を反映して、発信する電波に変化が見られる。この微妙な変化を分析することで、原子核の種類や状態を把握し画像化する。

「外部磁場」

1980年前半にMRIが医療に活用されるようになった。1983年に常電導方式を使って磁場を発生させていたが、1990年代になると、超電導方式になった。今後、更に超高磁場の装置が導入されて、画像診断や機能解析に役にたっていくと予想される。

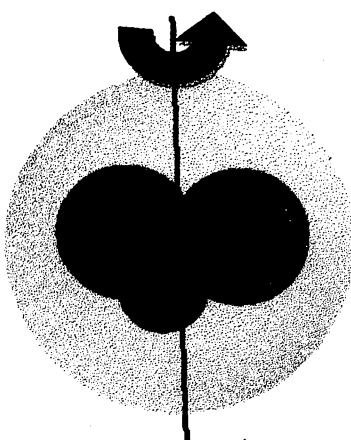
「陽子スピン」

水素の原子核を陽子(プロトン)と呼ぶ。プロトンは3個のクォークで構成されている。

2個のアップクォークが、 $+\frac{2}{3}$

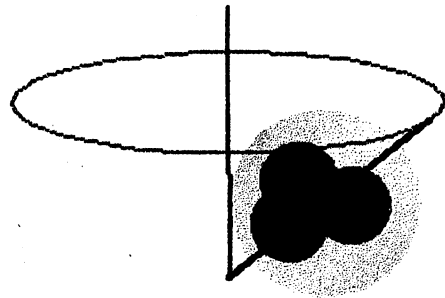
1個のダウルクォークが、 $-\frac{2}{3}$ の電荷を帯びてい

る。つまり、電荷の分布が偏っている。このように、原子核を構成する陽子(プロトン)が奇数の場合、プロトンが、自転すると、微小な電流が流れ、自転軸方向に磁場が発生する。自転する量子力学的角運動量を「スピン」という。



「歳差運動」

磁場に比例して、磁化ベクトルがコマのように、首振り運動をする



「共鳴周波数」ラーモア (Larmor) 周波数

原子核を共鳴させるために照射する電波

【例】水素の原子核Hは、1T(テスラ)の磁場において、42.58MHZの電波に共鳴する。

炭素の原子核Cは10.71MHZの電波に共鳴する。

「核磁気共鳴」

NMR (Nuclear Magnetic Resonance)

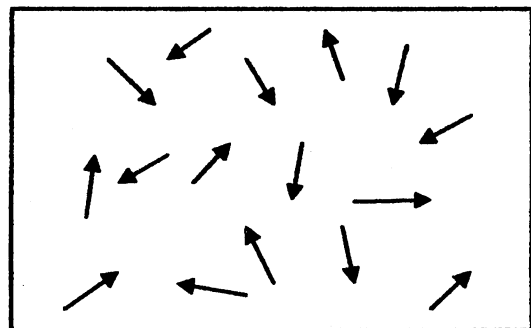
1946年ブロッホ(Bloch)とパーセル(Purcell)によって発見された。1952年ノーベル物理学賞を受賞した。

さて、「核磁気共鳴」とは、

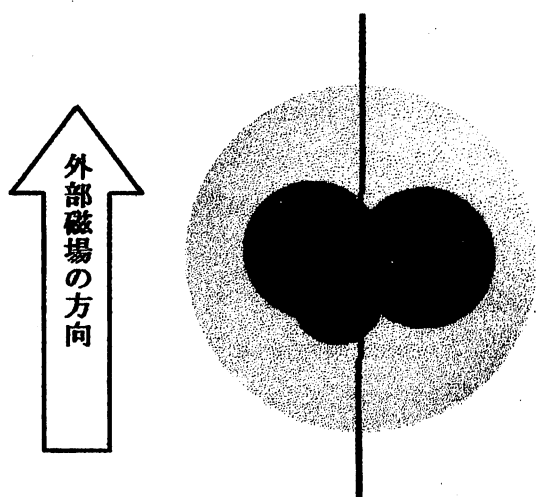
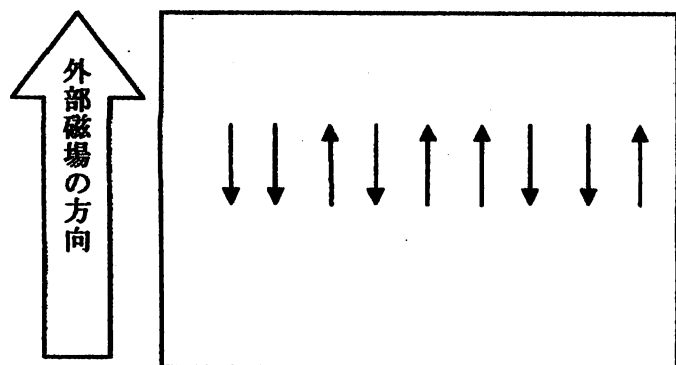
磁場にさらされた原子核が特定の周波数の電波に共鳴して、電波を発信する現象。

このとき、磁化ベクトルが、一定の周波数で振動するので、電場も誘導されて、一定の周波数で振動する。この周波数と同じ電磁波を吸収、放出する。

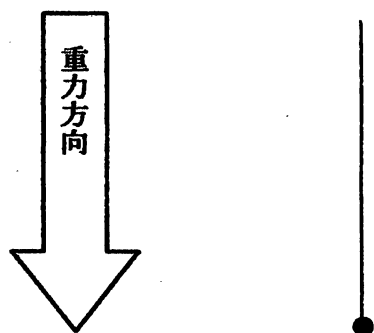
Step1 外部磁場がかかっていない状態



Step2 外部磁場をかけると、核スピンは磁場に沿った方向と磁場に逆らう方向の2タイプに分かれる。

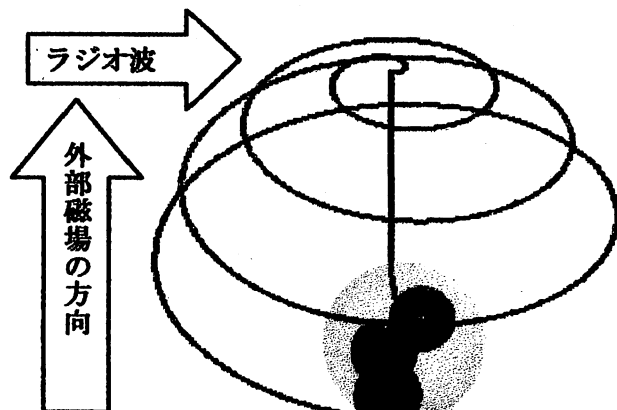


(プロトン↑ 振子↓)

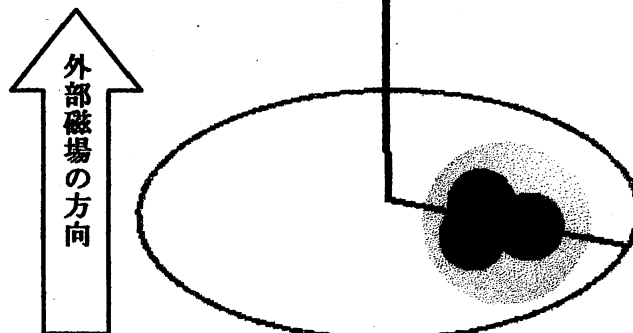


振子に例えると、重力をあたえると、振子は下方に静止した状態になるのと同様に、水素原子も外部磁場に対して平行に変化する。

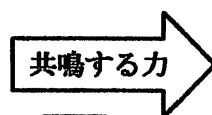
Step3 ラーモア (Larmor) 共鳴周波数のラジオ波 (RF パルス) を照射すると、エネルギーを吸収する。プロトンは、くるくると回転して、傾いて歳差運動をする。これを、核スピンが共鳴と呼ぶ。



90° パルス (↓)



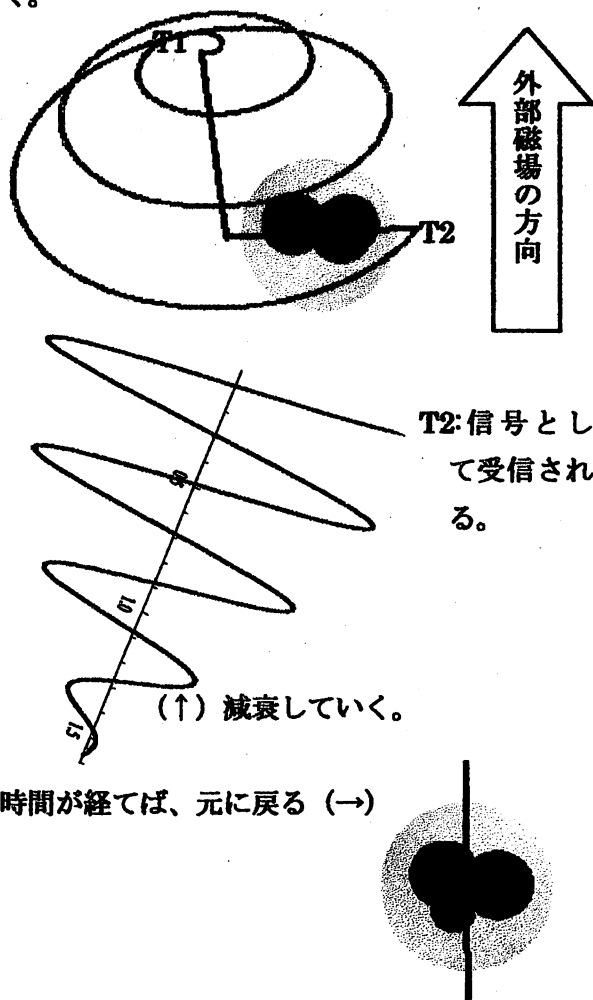
振子の共鳴現象と同じ。振子は徐々に動き出し、共鳴する力を止めると、やがて減衰運動し止まる。



Step4 ラジオ波 (RF パルス) を止める。

プロトンは、エネルギーを放出しながら、静磁場の方向へ戻って行く過程を「緩和」と呼ぶ。

静磁場の方向を中心に回転しているので、水平面での回転から電磁波 (自由誘導減衰 FID 信号) が発生する。コイルに誘導電流が流れる。90° パルスのとき最大振幅になり、時間とともに減衰していく。



T1 縦緩和時間 ; 信号放出能力が 63.2%まで回復するのに要する時間。

T1 が短い程回復能力が高く、次のパルス波を照射されたときに、強い NMR 信号を出す。NMR 信号を放出する能力が、どのくらい回復する指標。

T2 横緩和時間 ; 90° パルスの状態から減衰して最初の 36.8%まで減衰するのに要する時間。

T2 が短い程信号は速く減衰する。T2 が長いと信号は、なかなか弱くならない。

「NMR 信号」

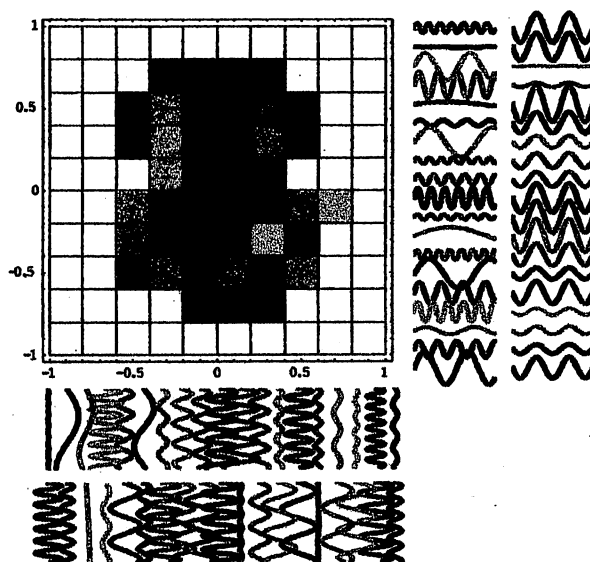
とは、共鳴した原子核が放出する電波の強さを表す。

「勾配コイル」

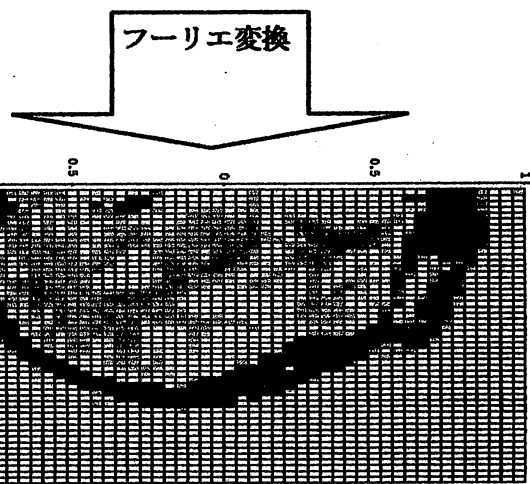
検出信号に発生部位のコードをつけるために、少しずつ磁場強度を変化させる。郵便番号のようなもの。勾配コイルは X 軸、Y 軸、Z 軸の 3 方向に対応して設置している。

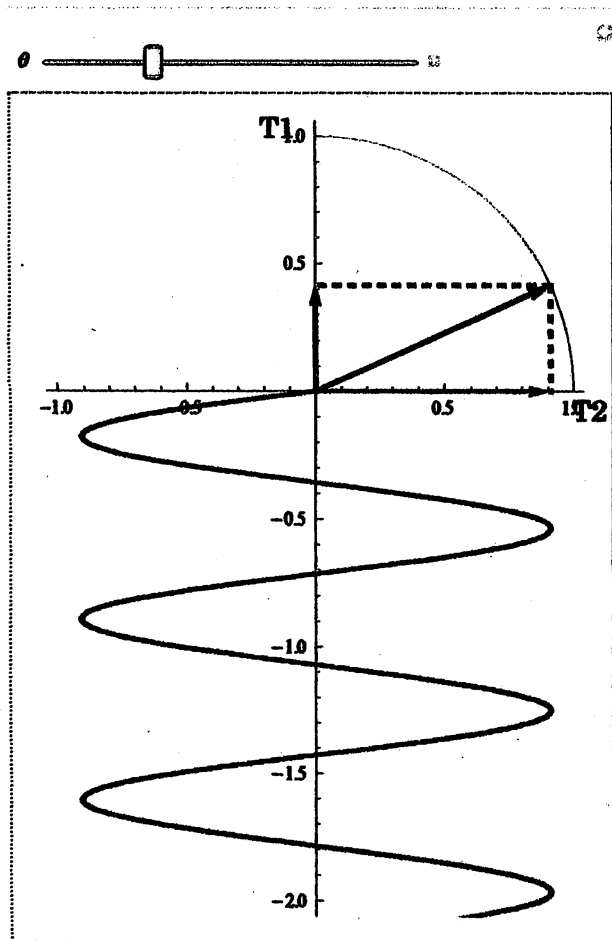
「MRI 信号」

NMR 信号に位置情報 (郵便番号) を加えた信号。



MRI 信号をフーリエ変換して、各ボクセルに配置。この原理は、CT スキャンを同じ原理。



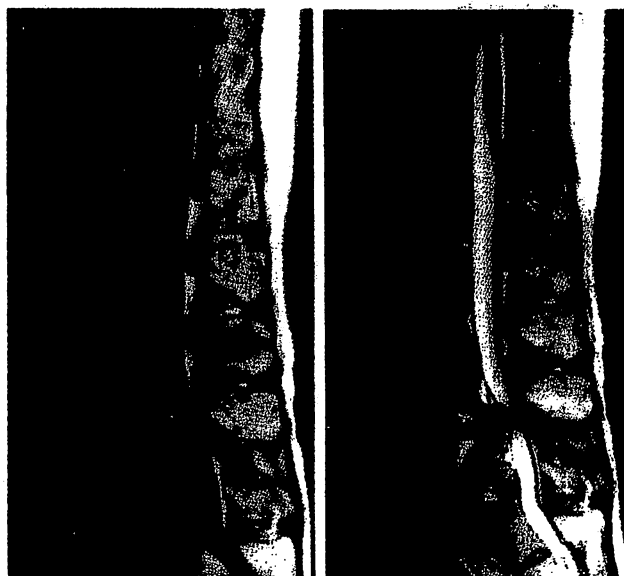


NMR 信号はプロトンの密度に比例して、緩和時間に関係している。T2 が長い組織の方が信号強く、T1 の短い組織の方が信号は強い。

組織	緩和時間 (ms)
脳皮質	377
脳髄質	285
脳浮腫	500
脳脊髄液	1155
甲状腺	275
肝臓	211
肝がん	432

(↑) T1 緩和時間

MRI では、共鳴周波数のラジオ波 (RF パルス) を照射したり、切断したりを繰り返すが、その一周期を「繰り返し時間」という。繰り返し時間の設定を変えると、緩和時間の大きい組織と小さい組織の画像コントラストが変化する。



T1 強調画像 (↑)

短い繰り返し時間

T2 強調画像 (↑)

長い繰り返し時間

分子が自由に運動できる状態⇒T1,T2 長くなる。

T1 強調；低信号 (黒)

T2 強調；高信号 (白) 髄液、尿が強調

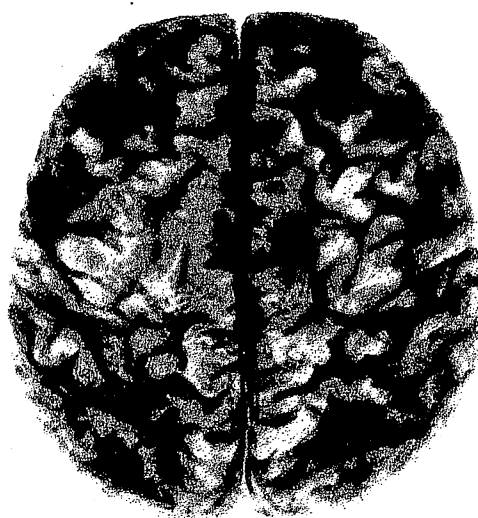
分子の運動が制限⇒T1,T2 短くなる。

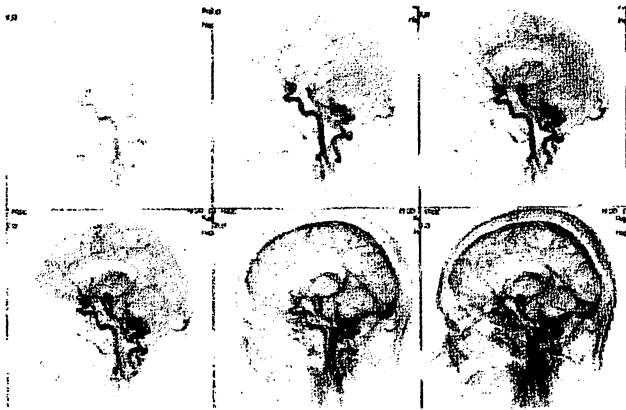
T1 強調；高信号 (白) 脂肪、濃い粘液

T2 強調；低信号 (黒)

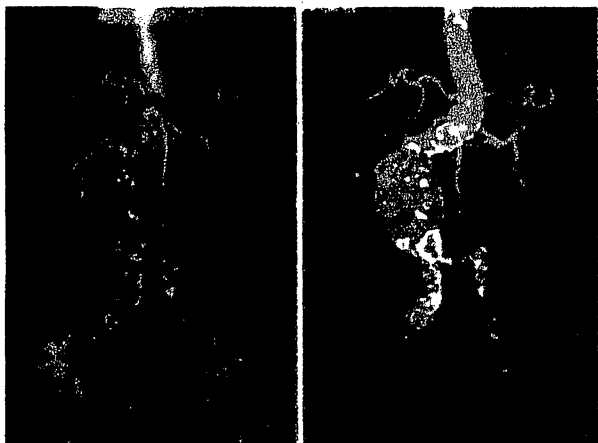
SAS(Surface Anatomy Scanning) (↓)

T2 を強調して、脳の表面を撮影した画像。

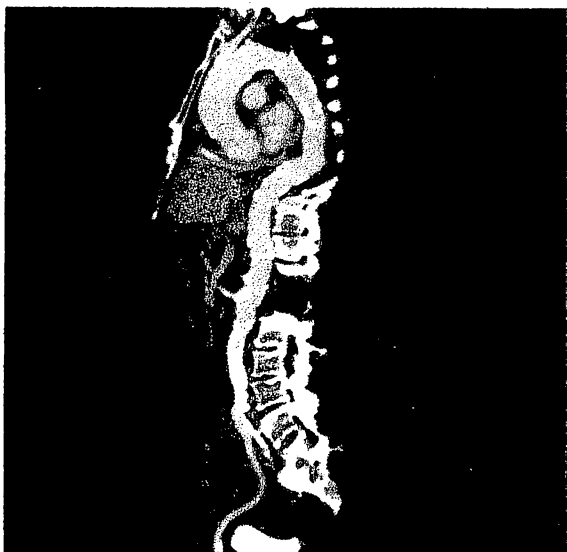




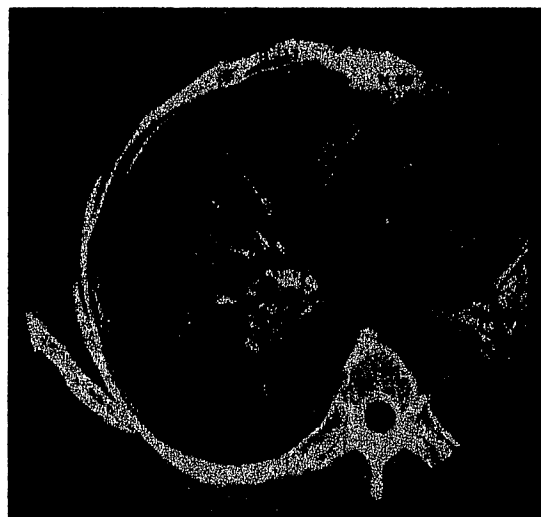
MRDSA(MR digital Subtraction angiography)
カテーテルを使用しないで MRI で血管を撮影。



3D 表示 (↑) 目的とする構造の表面データを
抽出して作成。



最近、磁場 3T~8T の装置が開発されつつある。
水素以外の元素リンやナトリウムの NMR 信号の
画像化も試作されている。



三次元画像処理もでき、病変部の立体形状の把握
に優れ、手術シュミレーションに活用されている。