平成 22 年 11 月 27 日（土）第 75 回数学教育実践研究会
アスティ 45 ビル 10F セミナールーム

微分積分の拡張

２変数関数問題へのアプローチ

予選決勝優勝法からラグランジュ未定乗数法

松本睦郎（札幌北高等学校）

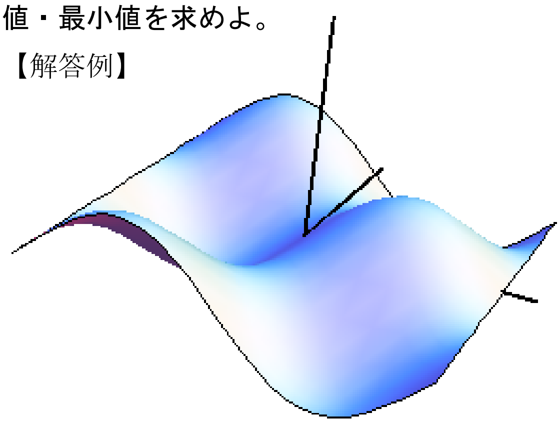
２変数関数の最大値・最小値に関する問題には多様なアプローチ法がある。1 文字を固定した「予選決勝優勝法」，計算のみで解法する「1 文字消去法」，微分積分を利用した「ラグランジュ未定乗数法」がある。大学入試問題を題材として、色々なアプローチをしてみた。

１文字固定法

関数 $f(x,y)=\sin x\cos y$ について

定義域 $-\pi<x<\pi$， $-\pi<y<\pi$ における最大値・最小値を求めよ。

【解答例】



（ｉ） $\cos y\geqq 0$ の場合

つまり、$-\dfrac{\pi}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のときについて、この範囲で変数 y を固定する。

$f(x,y)=\sin x\cos y \quad -\pi<x<\pi$

（ア） $x=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値を取る

$f\left(\dfrac{\pi}{2},y\right)=\cos y \quad -\pi<y<\pi$

$y=0$ のとき最大となる。

最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)=1$

（イ） $x=-\dfrac{\pi}{2}$ で最小値を取る

$f\left(-\dfrac{\pi}{2},y\right)=-\cos y$

$y=0$ のとき最小となる。

最大値 $f\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)=-1$

（ii） $\cos y<0$ の場合

つまり、$-\pi<y<-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}<y<\pi$ のときについて、この範囲で変数 y を固定する。

$f(x,y)=\sin x\cos y \quad -\pi<x<\pi$

（ウ） $x=-\dfrac{\pi}{2}$ で最大値を取る

$f\left(-\dfrac{\pi}{2},y\right)=-\cos y$

$y=-\pi$ のとき最大となるが、 $y=-\pi$ は範囲外なので、最大値はない。

（エ） $x=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値をとる

$f\left(\dfrac{\pi}{2},y\right)=\cos y$

$y=-\pi,\pi$ のとき最小となるが、$y=-\pi,\pi$ は範囲外なので、最小値はない。

札幌医科大学 2010 年

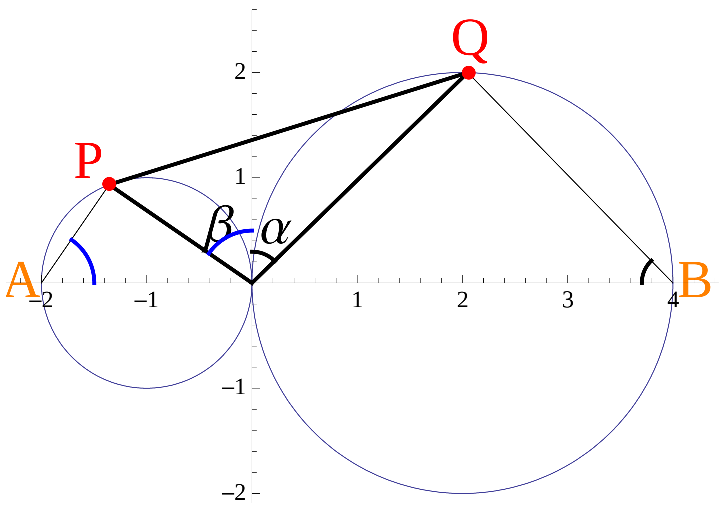
a,b を正の定数とする。平面上において $(-a,0)$ を中心とする円 C_1 と、$(b,0)$ を中心とする円 C_2 が、原点 O で外接している。また、P を円 C_1 上の点とし、Q を円 C_2 上の点とする。

ただし、2 点 P, Q は x 軸上にないものとする。

(1) P と Q が x 軸に対して同じ側にあるとき、三角形 OPQ の面積の最大値を a,b を用いて表せ。

(2) P と Q が x 軸に対して異なる側にあるとき、三角形 OPQ の面積の最大値を a,b を用いて表せ。ただし、3 点 O, P, Q は同一直線上にないものとする。

【解答例】



上図より

$OQ = 2b\sin\alpha \cdots$①

$OP = 2a\sin\beta \cdots$②

△OPQ の面積を S とする。

$$S=\frac{1}{2}OP\times OQ\times\sin(\alpha+\beta)$$

①②を代入して

$$S=\sin\alpha>0,\sin\beta>0,\sin(\alpha+\beta)>0$$

$$\frac{1}{2}\times 2a\times\sin\alpha\times 2b\times\sin\beta\times\sin(\alpha+\beta)$$

$S=2ab\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$　α，βに関する 2 変数関数となる。

ただし、P と Q が x 軸に対して同じ側にあるので、

$0<\alpha+\beta<\pi$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}, 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\cdots$（条件Ⅰ）

$f(\alpha,\beta)=2ab\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\cdots$③とおく。

α，βに関する 2 変数関数である。

β を固定して α に関して微分すると

$$\frac{df}{d\alpha}=2ab\cos\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$$
$$+2ab\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$=2ab\sin\beta\{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)\}$$

加法定理より

$$=2ab\sin\beta\times\sin(2\alpha+\beta)$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ から

$0<2\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$ となる。$\sin(2\alpha+\beta)=0$ のとき、

つまり $2\alpha+\beta=\pi$ のとき $\dfrac{df}{d\alpha}$ の符号が正から負になるので極大となる。

同様にして

③についてαを固定してβに関して微分すると

$$\frac{df}{d\beta}=2ab\sin\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)$$
$$+2ab\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$= 2ab\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$　$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ から $0<\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2}$

$\alpha+2\beta=\pi$ のとき $\frac{df}{d\beta}$ の符号が正から負になるので極大となる。

$\begin{cases}\alpha+2\beta=\pi\\ 2\alpha+\beta=\pi\end{cases}$ のとき S は最大となる。α、β に関する連立方程式を解くと

$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3}$　のとき最大値をとる。最大値は、

$S=2ab\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$

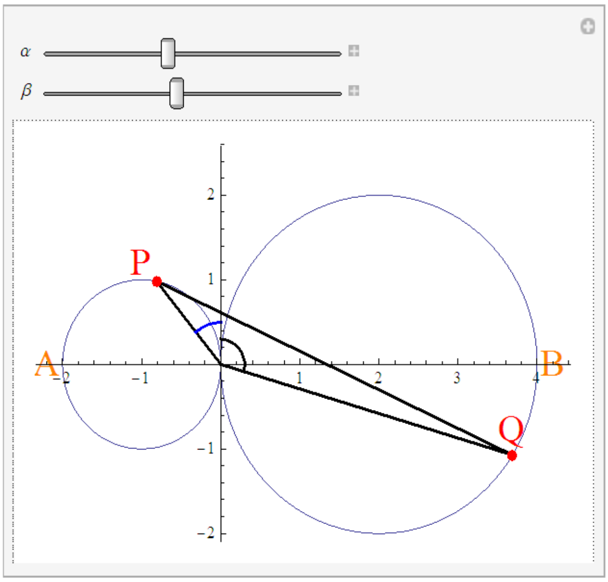
$=2ab\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab\cdots$（答）

（２）P と Q は x 軸に関して反対側にあるので

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi, 0<\beta<\frac{\pi}{2}\cdots$（条件Ⅱ）

より、$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$

Out[13]=



$OQ=2b\sin(\pi-\alpha)=2b\sin\alpha$

$OP=2a\sin\beta$

$S=\frac{1}{2}\left|OP\times OQ\times\sin(\alpha+\beta)\right|$

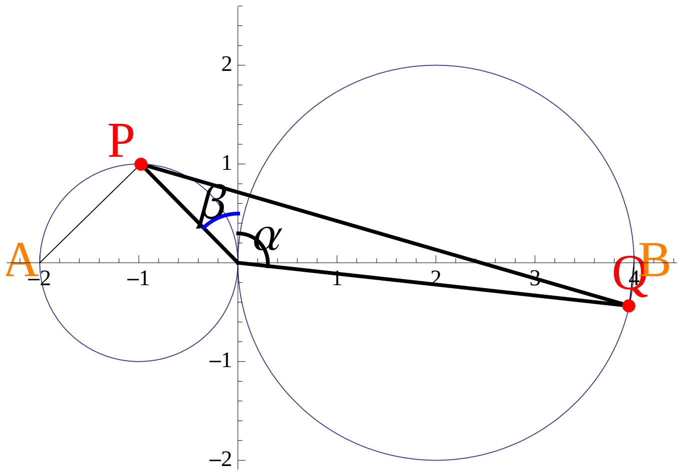
$S=2ab\left|\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\right|$

$S=2ab\sin\alpha\sin\beta\left|\sin(\alpha+\beta)\right|$

$\alpha+\beta=\pi$ の時は、$S=0$ となるので除外する。

（ｉ）$\sin(\alpha+\beta)>0$ の時、つまり

$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$ のとき



$S=2ab\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$

β を固定し α に関して微分すると、

$\frac{dS}{d\alpha}=2ab\sin(2\alpha+\beta)$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$

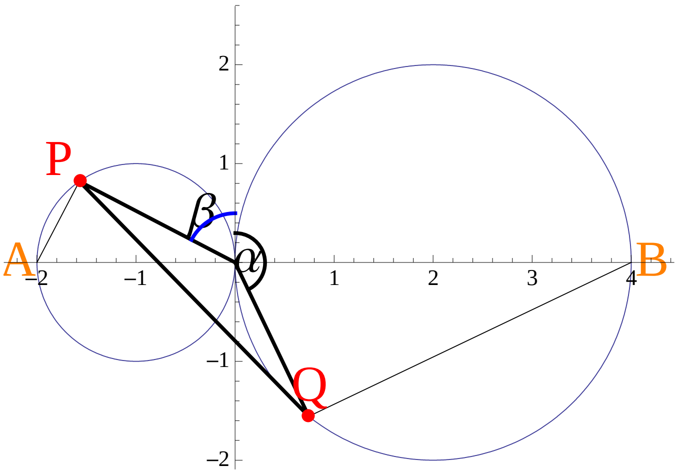
$\therefore \pi<2\alpha+\beta<2\pi\cdots$⑤

$\frac{dS}{d\alpha}<0$ となり S は単調減少関数となる。

$\alpha=\frac{\pi}{2}$ のとき最大となるが、　$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より最大値は存在しない。

（ⅱ）$\sin(\alpha+\beta)<0$ の時、つまり

$\pi<\alpha+\beta<\frac{3}{2}\pi$ のとき



$$S=-2ab\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$$

β を固定して α に関して微分すると、

$$\frac{dS}{d\alpha}=-2ab\sin\beta\sin(2\alpha+\beta)$$

$$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi,\pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore\frac{3\pi}{2}<2\alpha+\beta<\frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{dS}{d\alpha}=0$$

$\sin(2\alpha+\beta)=0$ から、$2\alpha+\beta=2\pi$ …⑥

$\frac{dS}{d\alpha}$ は正から負へ変化するので極大となる。

α を固定し β に関して微分すると

$$\frac{dS}{d\beta}=-2ab\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta),$$

$0<\beta<\frac{\pi}{2},\pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$ から

$$\pi<\alpha+2\beta<2\pi$$

$\sin(\alpha+2\beta)<0$ より、$\frac{dS}{d\beta}>0$ となり、単調増加関数となる。

$\beta=\frac{\pi}{2}$ で最大となるが、$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ より　最大値は存在しない。

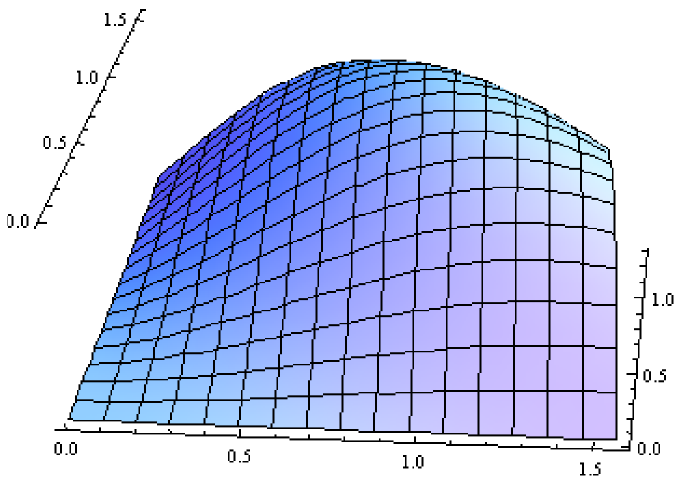
（ⅰ）（ⅱ）より最大値は存在しない。…（答）

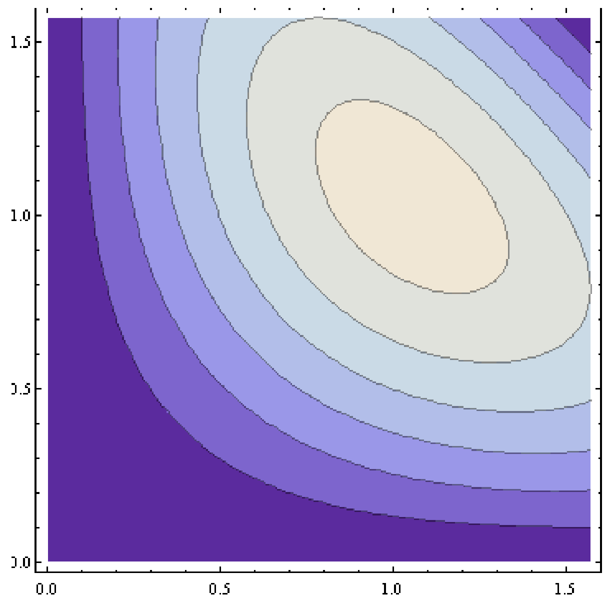
【２変数関数の最大・最小問題】

（１）　$f(\alpha,\beta)=2ab\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2}$

の 2 変数関数のグラフを作成すると、等高線の頂点が存在して、最大値が存在する。



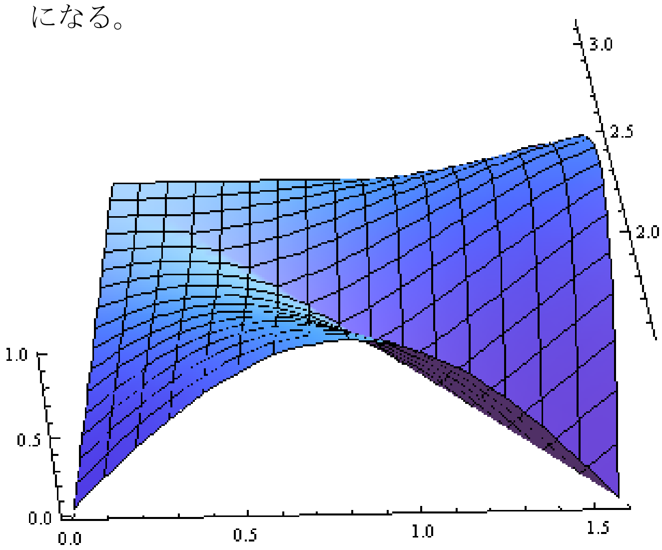


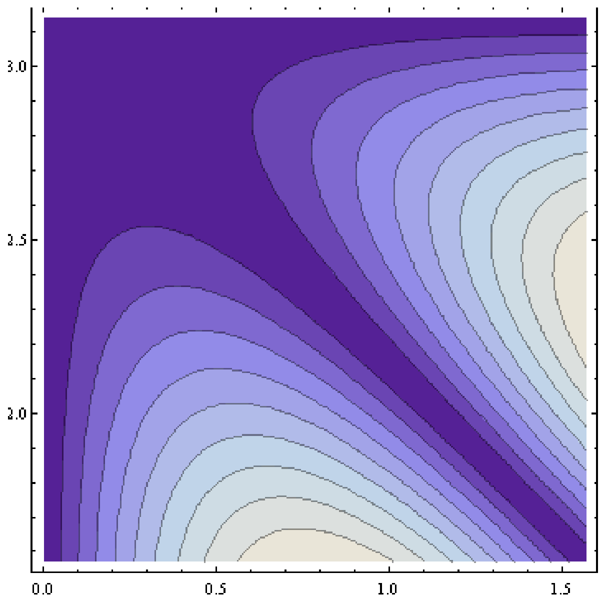
（2）

$$S = f(\alpha,\beta) = \left| 2ab\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta) \right|$$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

の 2 変数関数のグラフを作成すると、α＋β＝π の部分が 0 となり、等高線の頂点の部分は端の部分に 2 ヶ所存在するが、範囲外になるので不適になる。



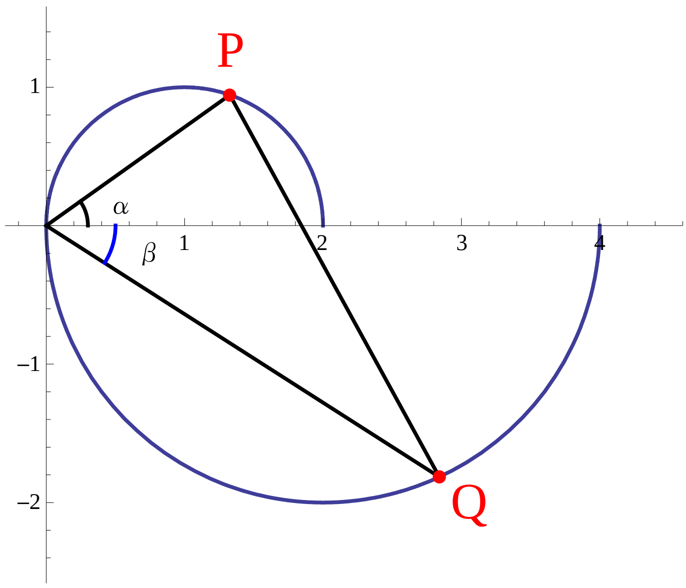


島根大学

2 つの円 $C_1;(x-1)^2+y^2=1$ と

$C_2;(x-2)^2+y^2=4$ がある。点 P は第 1 象限おいて円 C_1 上を動き、点 Q は第 4 象限において円 C_2 上を動くとする。ただし、2 点 P, Q は原点 O とともに三角形 OPQ を作るものとする。このとき三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ。

【解答例】



$\angle xOP = \alpha, \angle xOQ = \beta$ とする。上図より

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

円周角の定理より

$OP = 2\cos\alpha, OQ = 4\cos\beta$

△ OPQ の面積 S とすると。

$$S = \frac{1}{2}OP \times OQ \times \sin(\alpha+\beta)$$

$$S = 4\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta) \cdots ①$$

（i） α を固定し β を変数として扱う。

①を β で微分すると

$$\frac{dS}{d\beta} = -4\cos\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta) + 4\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$=-4\cos\alpha\left\{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)-\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\right\}$$

$$=4\cos\alpha\left\{\cos\beta\cos(\alpha+\beta)-\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\right\}$$

加法定理より

$$=4\cos\alpha\cos(2\beta+\alpha)$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}, 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$0<\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2}$$

$\dfrac{dS}{d\beta}=0$ のとき $\cos(2\beta+\alpha)=0$

$$2\beta+\alpha=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \beta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$$

β	0	・・・	$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$	・・・	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dS}{d\beta}$		＋	0	－	
S		増加	極大	減少	

S は $\beta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$ のとき極大かつ最大となる。

$\beta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$ を①へ直接代入すると複雑になるので、

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}-\beta$ を代入する、

$$S=4\cos\alpha\cos^2\beta$$

$$=2\cos\alpha(1+\cos2\beta)$$

$$=2\cos\alpha\left\{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\}$$

$$=\sin2\alpha+2\cos\alpha$$

S を α で微分すると

$$\frac{dS}{d\alpha}=2\cos2\alpha-2\sin\alpha$$

$$=2(1-2\sin^2\alpha)-2\sin\alpha$$

$$=-2(2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1)$$

$$=-2(2\sin\alpha-1)(\sin\alpha+1)$$

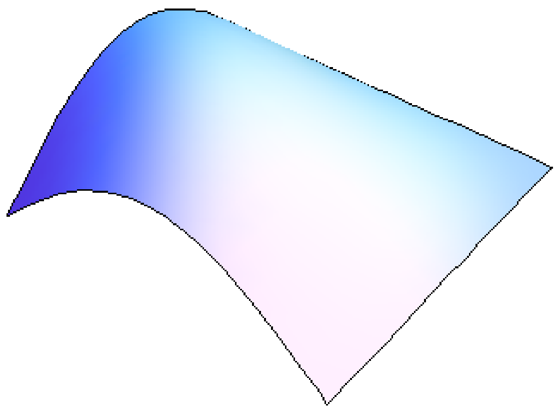
α	0	・・・	$\dfrac{\pi}{6}$	・・・	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dS}{d\alpha}$		＋	0	－	
S		増加	極大	減少	

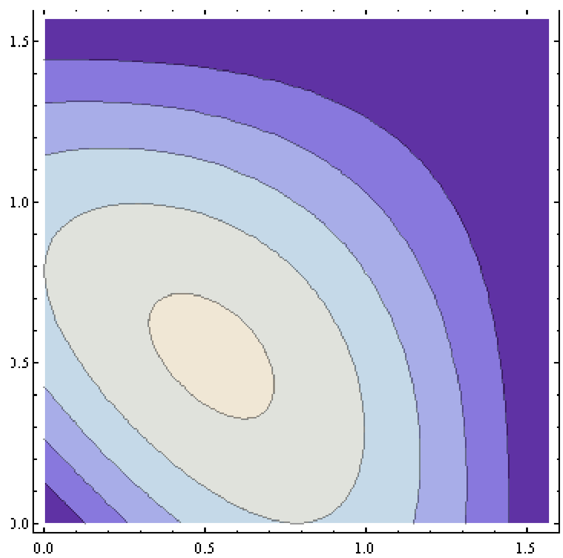
増減表より

$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ のとき極大かつ最大となる。

このとき $\beta=\dfrac{\pi}{6}$ より　①より最大値は

$S=4\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ となる。





埼玉大学

x, y は実数で $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$　であるとき、

$x^2+(1-y)^2$ の最大値，最小値を求めよ。

【一文字消去法による解答例】

$\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2 \cdots$①

$x^2+(1-y)^2=k \cdots$②

①②から x を消去して

$6y^2+2(2k-3)y+k^2-3k+2=0 \cdots$③

y は実数解をもつので判別式

$$\frac{D}{4}=(2k-3)^2-6\left(k^2-3k+2\right)=-2k^2+6k-3 \geqq 0$$

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2} \leqq k \leqq \frac{3+\sqrt{3}}{2} \cdots$$ （答）

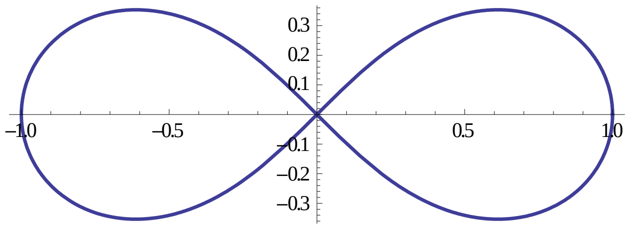
【条件付き極値問題による解答例】

「$g(x,y)=0$ のとき、$f(x,y)$ の極大・極小値を求める。」ことを条件付き極値問題という。

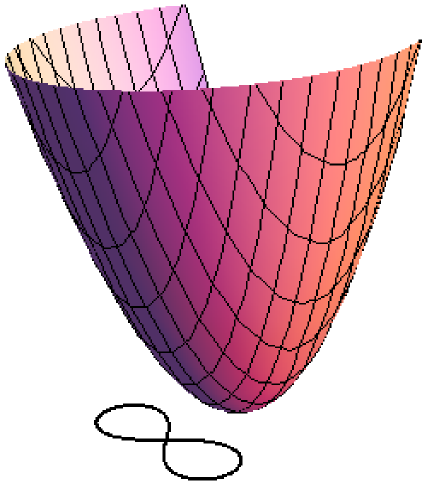
$g(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)$

$f(x,y)=x^2+(1-y)^2$　とおく。

$g(x,y)=0$ は、xy 平面上において、レミニスケート曲線を描く。



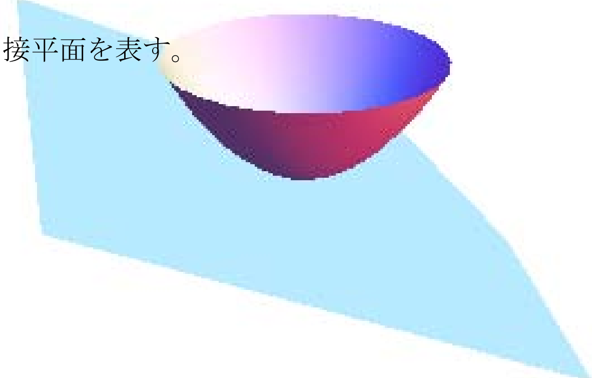
$z=f(x,y)$ は放物面を描く。

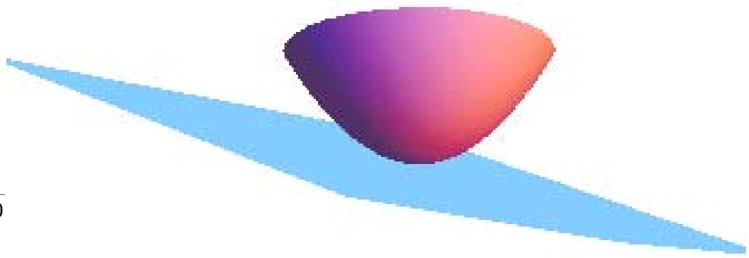


z

$$=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

は放物面上の点 $\left(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\right)$ を接点とする接平面を表す。



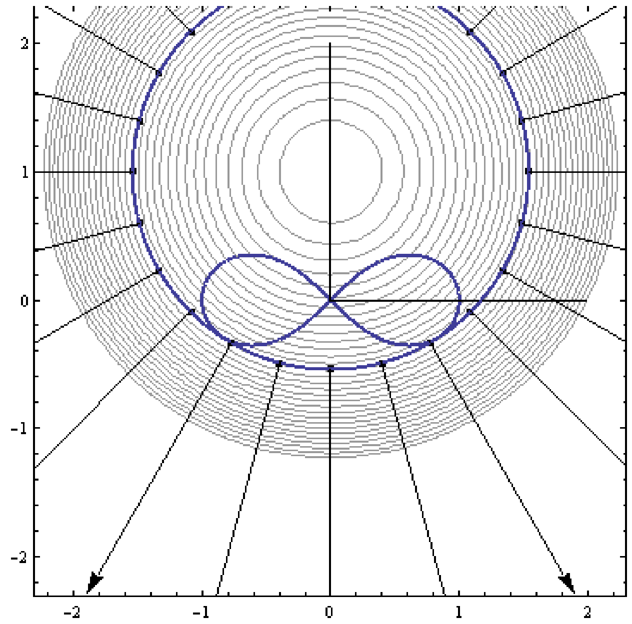


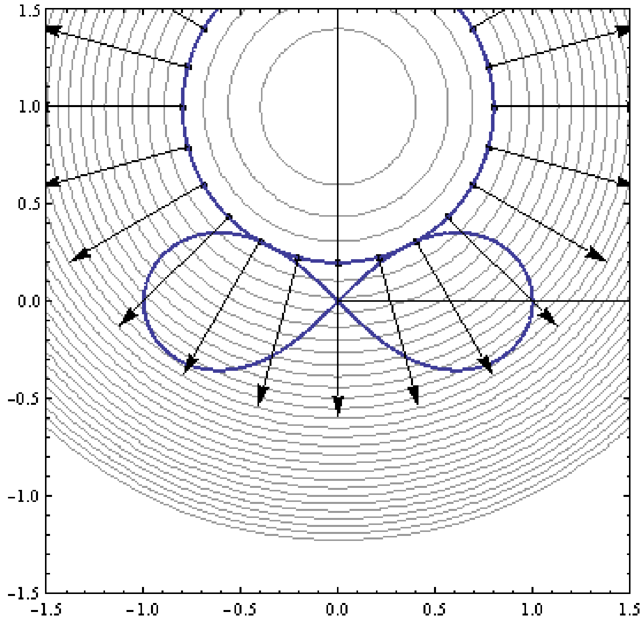
平面ベクトル

$g\ ar\ (df(x_0,y_0))=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

を勾配ベクトル。

等高線 $f(x,y)=c$ と $grad(f(x_0,y_0))$ を矢印で表した。$grad(f(x_0,y_0))$ が等高線と直交していることが分かる。

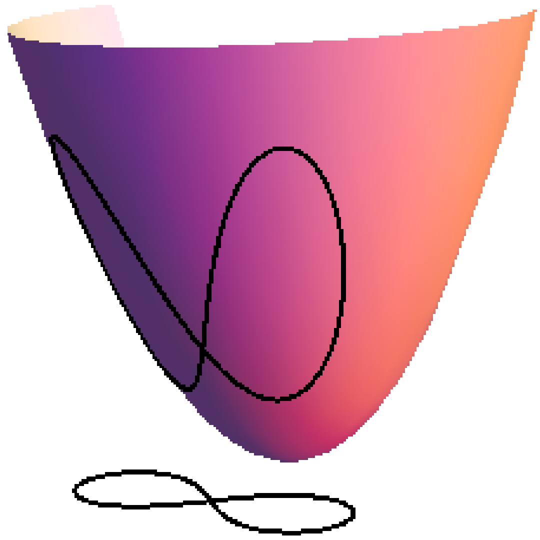




xy 平面上のレミニスケート曲線 $g(x,y)=0$ を t をパラメーターとして表示すると、

$x=p(t), y=q(t)$ とする時　空間上の曲線

$z=f(p(t),q(t))$ の変化を調べる。



$$\frac{d\,f(p(t),q(t))}{dt}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(p(t),q(t))\,p'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(p(t),q(t))\,q'(t)$$

レミニスケート曲線上の点 $(p(t),q(t))$ の速度ベクトル $(p'(t),q'(t))$ と $grad(f(x,y))$ との内積である。

$\vec{q}=(p(t),q(t))$，　$grad(f(x,y))$ とのなす角を θ とすると、

$f(p(t),q(t))$ が極大・極小になるとき、

$$\frac{d\,f(p(t),q(t))}{dt}=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{2}$$

$grad(f(x_0,y_0))$ と $grad(g(x_0,y_0))$ が平行である。

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

この方法を**「ラグランジュの未定乗数法」**という。

$$f(x, y) = x^2 + (1-y)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$$

$$grad\left(f(x, y)\right) = \left(2x, 2(y-1)\right)$$

$$g(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - \left(x^2 - y^2\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4x^3 + 4xy^2 - 2x\ , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 4x^2y + 4y^3 + 2y$$

$$grad\left(g(x, y)\right) = \left(2x^3 + 2xy^2 - x, 2x^2y + 2y^3 + y\right)$$

$$\det\begin{pmatrix} x & y-1 \\ 2x^3 - 2xy^3 - x & 2x^2y + 2y^3 + y \end{pmatrix} = 0$$

$$x\left(2x^2y + 2y^3 + y\right) - (y-1)\left(2x^3 + 2xy^2 - x\right) = 0$$

$x \neq 0$ のとき

$$2x^2y + 2y^3 + y - (y-1)\left(2x^2 + 2y^2 - 1\right) = 0$$

展開してまとめると、

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} - y \cdots ①$$

レミニスケート曲線 $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$ と①より x を消去すると

$$\left(\frac{1}{2} - y\right)^2 = \frac{1}{2} - y - 2y^2$$

$$y^2 = \frac{1}{12}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{6}$$

（ i ） $y = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ のとき

①へ代入して、$x^2 + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$$x^2 = \frac{5}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

放物面 $f(x, y) = x^2 + (1-y)^2$ へ代入すると

$$x^2 + (1-y)^2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

（ ii ） $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ のとき

①へ代入して、$x^2 + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

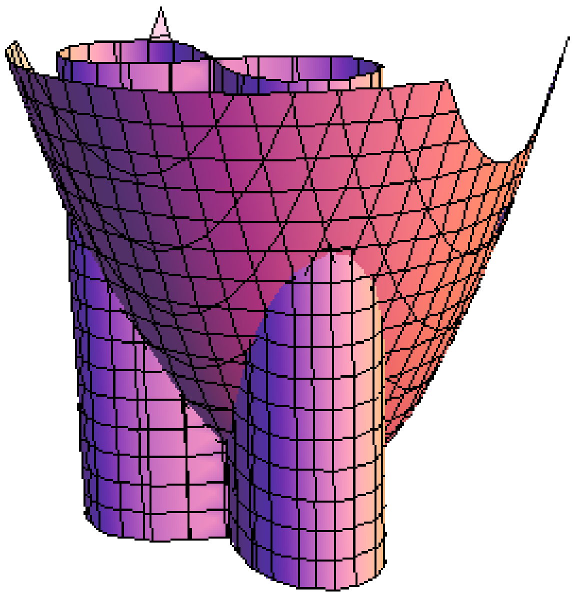
$$x^2 = \frac{5}{12} + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

放物面 $f(x, y) = x^2 + (1-y)^2$ へ代入すると

$$x^2 + (1-y)^2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2} \leqq x^2 + (1-y)^2 \leqq \frac{3+\sqrt{3}}{2} \cdots \text{（答）}$$

となる。



松本睦郎（札幌北高等学校）