

微分積分の拡張

2 変数関数問題へのアプローチ

予選決勝優勝法からラグランジュ未定乗数法

松本睦郎 (札幌北高等学校)

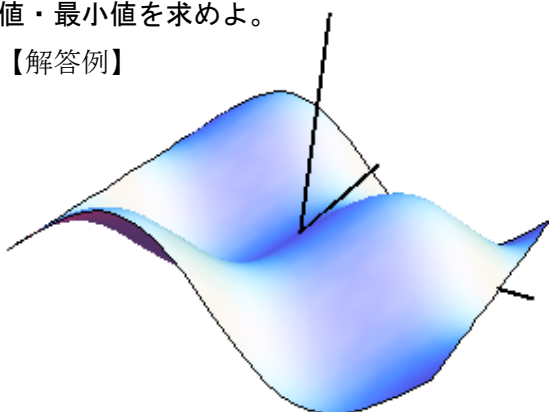
2 変数関数の最大値・最小値に関する問題には多様なアプローチ法がある。1 文字を固定した「予選決勝優勝法」、計算のみで解法する「1 文字消去法」、微分積分を利用した「ラグランジュ未定乗数法」がある。大学入試問題を題材として、色々なアプローチをしてみた。

1 文字固定法

関数 $f(x, y) = \sin x \cos y$ について

定義域 $-\pi < x < \pi$, $-\pi < y < \pi$ における最大値・最小値を求めよ。

【解答例】



(i) $\cos y \geq 0$ の場合

つまり、 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ のときについて、この範囲で変数 y を固定する。

$$f(x, y) = \sin x \cos y \quad -\pi < x < \pi$$

(ア) $x = \frac{\pi}{2}$ で最大値を取る

$$f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \cos y \quad -\pi < y < \pi$$

$y = 0$ のとき最大となる。

$$\text{最大値 } f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 1$$

(イ) $x = -\frac{\pi}{2}$ で最小値を取る

$$f\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = -\cos y$$

$y = 0$ のとき最小となる。

$$\text{最大値 } f\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) = -1$$

(ii) $\cos y < 0$ の場合

つまり、 $-\pi < y < -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < y < \pi$ のときについて、

この範囲で変数 y を固定する。

$$f(x, y) = \sin x \cos y \quad -\pi < x < \pi$$

(ウ) $x = -\frac{\pi}{2}$ で最大値を取る

$$f\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = -\cos y$$

$y = -\pi$ のとき最大となるが、 $y = -\pi$ は範囲外なので、最大値はない。

(エ) $x = \frac{\pi}{2}$ で最小値をとる

$$f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \cos y$$

$y = -\pi, \pi$ のとき最小となるが、 $y = -\pi, \pi$ は範囲外なので、最小値はない。

札幌医科大学 2010 年

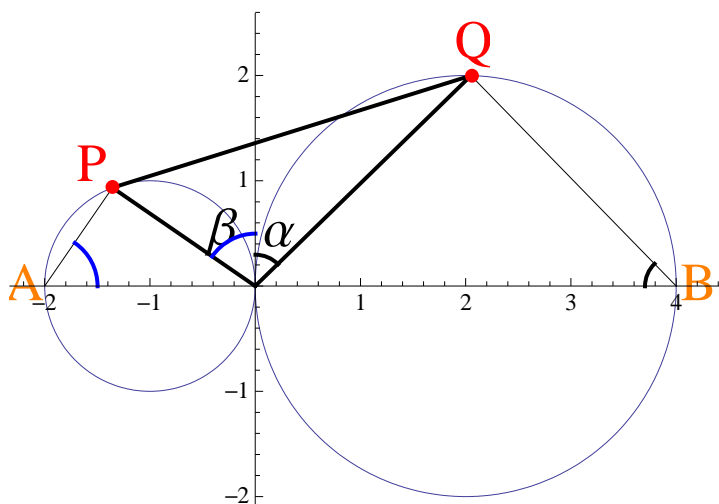
a, b を正の定数とする。平面上において $(-a, 0)$

を中心とする円 C_1 と、 $(b, 0)$ を中心とする円 C_2 が、
 原点 O で外接している。また、 P を円 C_1 上の点と
 し、 Q を円 C_2 上の点とする。

ただし、2 点 P, Q は x 軸上にないものとする。

- (1) P と Q が x 軸に対して同じ側にあるとき、三
 角形 OPQ の面積の最大値を a, b を用いて
 表せ。
- (2) P と Q が x 軸に対して異なる側にあるとき、
 三角形 OPQ の面積の最大値を a, b を用い
 て表せ。ただし、3 点 O, P, Q は同一直線
 上にないものとする。

【解答例】



上図より

$$OQ = 2b \sin \alpha \dots \textcircled{1}$$

$$OP = 2a \sin \beta \dots \textcircled{2}$$

$\triangle OPQ$ の面積を S とする。

$$S = \frac{1}{2} OP \times OQ \times \sin(\alpha + \beta)$$

①②を代入して

$$S = \sin \alpha > 0, \sin \beta > 0, \sin(\alpha + \beta) > 0$$

$$\frac{1}{2} \times 2a \times \sin \alpha \times 2b \times \sin \beta \times \sin(\alpha + \beta)$$

$$S = 2ab \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \quad \alpha, \beta \text{ に関する}$$

2 変数関数となる。

ただし、 P と Q が x 軸に対して同じ側にあるの
 で、

$$0 < \alpha + \beta < \pi, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \dots (\text{条件 I})$$

$$f(\alpha, \beta) = 2ab \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \dots \textcircled{3} \text{ とおく。}$$

α, β に関する 2 変数関数である。

β を固定して α に関して微分すると

$$\frac{df}{d\alpha} = 2ab \cos \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$$

$$+ 2ab \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$$

=

$$2ab \sin \beta \{ \cos \alpha \sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) \}$$

加法定理より

$$= 2ab \sin \beta \times \sin(2\alpha + \beta)$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ から}$$

$$0 < 2\alpha + \beta < \frac{3\pi}{2} \text{ となる。} \sin(2\alpha + \beta) = 0 \text{ のとき、}$$

つまり $2\alpha + \beta = \pi$ のとき $\frac{df}{d\alpha}$ の符号が正から負

になるので極大となる。

同様にして

③について α を固定して β に関して微分すると

$$\frac{df}{d\beta} = 2ab \sin \alpha \cos \beta \sin(\alpha + \beta)$$

$$+ 2ab \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$$

$$= 2ab \sin \alpha \sin(\alpha + 2\beta)$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ から } 0 < \alpha + 2\beta < \frac{3\pi}{2}$$

$\alpha + 2\beta = \pi$ のとき $\frac{df}{d\beta}$ の符号が正から負になる

ので極大となる。

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = \pi \\ 2\alpha + \beta = \pi \end{cases} \text{ のとき } S \text{ は最大となる。} \alpha, \beta \text{ に関}$$

する連立方程式を解くと

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最大値をとる。最大値は、}$$

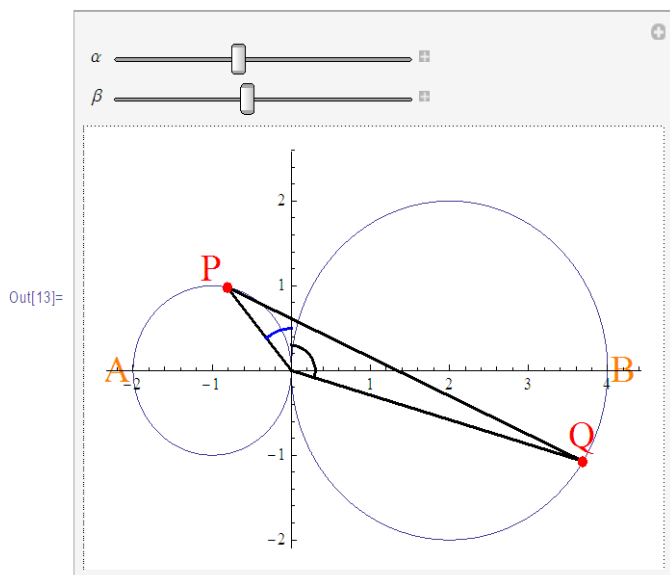
$$S = 2ab \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$$

$$= 2ab \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} ab \dots (\text{答})$$

(2) P と Q は x 軸に関して反対側にあるので

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \dots (\text{条件 II})$$

$$\text{より、} \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$$



$$OQ = 2b \sin(\pi - \alpha) = 2b \sin \alpha$$

$$OP = 2a \sin \beta$$

$$S = \frac{1}{2} |OP \times OQ \times \sin(\alpha + \beta)|$$

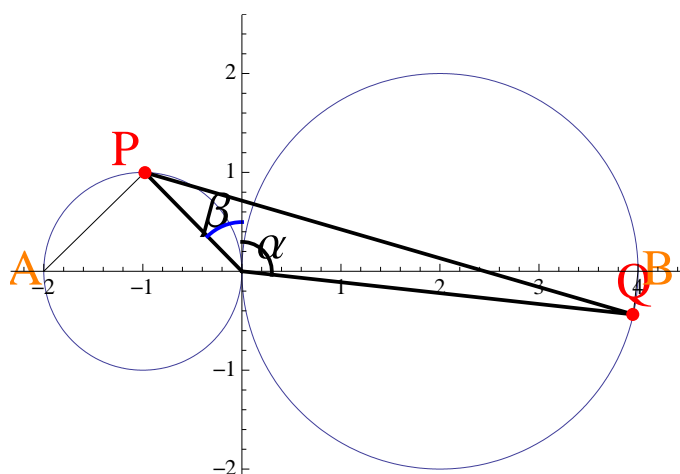
$$S = 2ab |\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)|$$

$$S = 2ab \sin \alpha \sin \beta |\sin(\alpha + \beta)|$$

$\alpha + \beta = \pi$ の時は、 $S = 0$ となるので除外する。

(i) $\sin(\alpha + \beta) > 0$ の時、つまり

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi \text{ のとき}$$



$$S = 2ab \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$$

β を固定し α に関して微分すると、

$$\frac{dS}{d\alpha} = 2ab \sin(2\alpha + \beta)$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$$

$$\therefore \pi < 2\alpha + \beta < 2\pi \dots \textcircled{5}$$

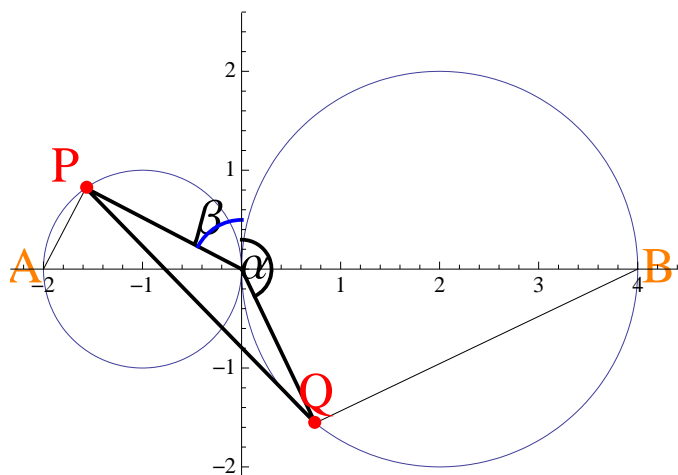
$\frac{dS}{d\alpha} < 0$ となり S は単調減少関数となる。

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大となるが、} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

より最大値は存在しない。

(ii) $\sin(\alpha + \beta) < 0$ の時、つまり

$$\pi < \alpha + \beta < \frac{3}{2}\pi \text{ のとき}$$



$$S = -2ab \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$$

β を固定して α に関して微分すると、

$$\frac{dS}{d\alpha} = -2ab \sin \beta \sin(2\alpha + \beta)$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \pi < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{3\pi}{2} < 2\alpha + \beta < \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0$$

$\sin(2\alpha + \beta) = 0$ から、 $2\alpha + \beta = 2\pi \dots \textcircled{6}$

$\frac{dS}{d\alpha}$ は正から負へ変化するので極大となる。

α を固定し β に関して微分すると

$$\frac{dS}{d\beta} = -2ab \sin \alpha \sin(\alpha + 2\beta),$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \pi < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2} \text{ から}$$

$$\pi < \alpha + 2\beta < 2\pi$$

$\sin(\alpha + 2\beta) < 0$ より、 $\frac{dS}{d\beta} > 0$ となり、単調増

加関数となる。

$$\beta = \frac{\pi}{2} \text{ で最大となるが、} 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ より 最大}$$

値は存在しない。

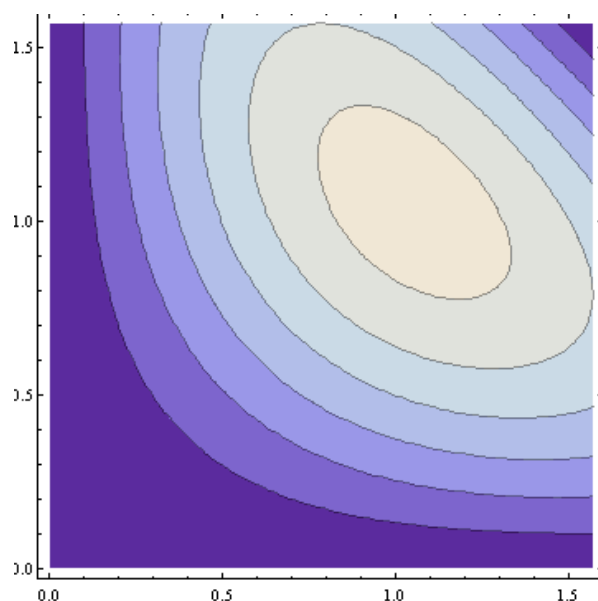
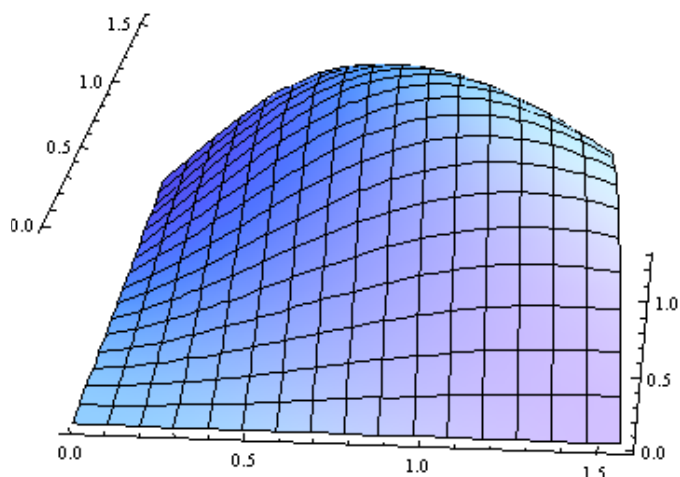
(i) (ii) より最大値は存在しない。… (答)

【2変数関数の最大・最小問題】

$$(1) f(\alpha, \beta) = 2ab \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

の 2 変数関数のグラフを作成すると、等高線の頂点が存在して、最大値が存在する。

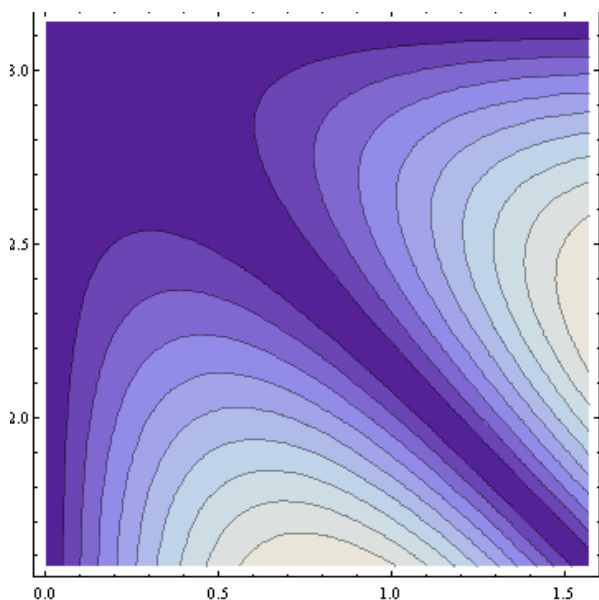
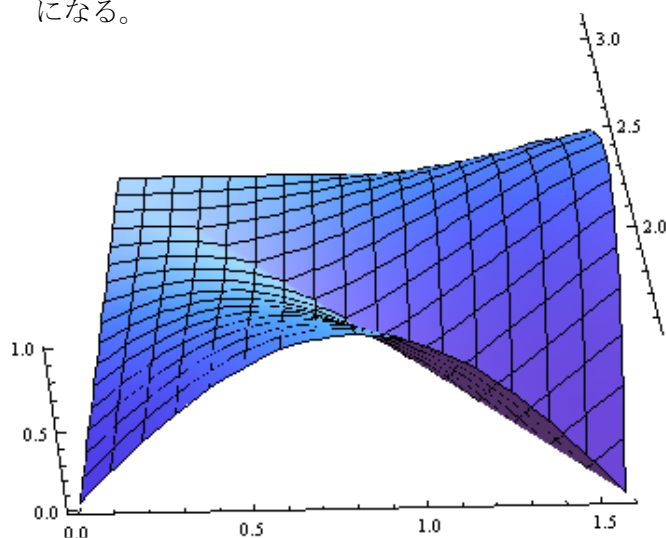


(2)

$$S = f(\alpha, \beta) = |2ab \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)|$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

の 2 変数関数のグラフを作成すると、 $\alpha + \beta = \pi$ の部分が 0 となり、等高線の頂点の部分は端の部分に 2ヶ所存在するが、範囲外になるので不適になる。

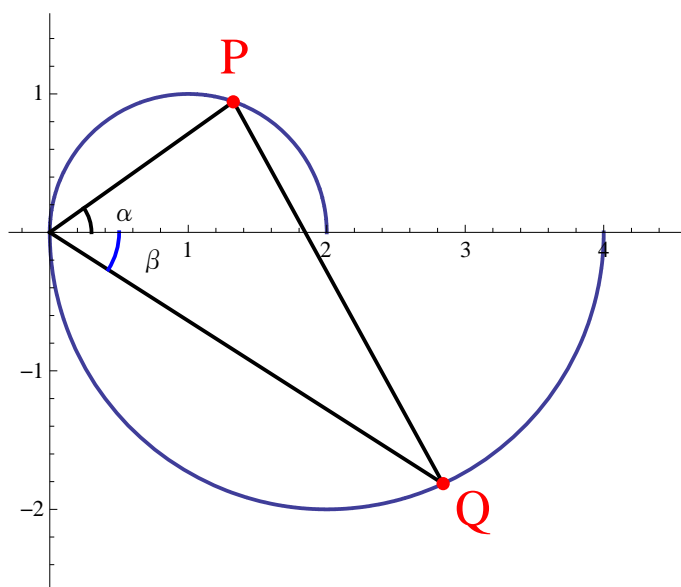


島根大学

2つの円 $C_1; (x-1)^2 + y^2 = 1$ と

$C_2; (x-2)^2 + y^2 = 4$ がある。点 P は第 1 象限において円 C_1 上を動き、点 Q は第 4 象限において円 C_2 上を動くとする。ただし、2 点 P, Q は原点 O とともに三角形 OPQ を作るものとする。このとき三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ。

【解答例】



$\angle xOP = \alpha, \angle xOQ = \beta$ とする。上図より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

円周角の定理より

$$OP = 2 \cos \alpha, OQ = 4 \cos \beta$$

$\triangle OPQ$ の面積 S とすると。

$$S = \frac{1}{2} OP \times OQ \times \sin(\alpha + \beta)$$

$$S = 4 \cos \alpha \cos \beta \sin(\alpha + \beta) \cdots \textcircled{1}$$

(i) α を固定し β を変数として扱う。

①を β で微分すると

$$\frac{dS}{d\beta} = -4 \cos \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) + 4 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta)$$

$$= -4 \cos \alpha \{ \sin \beta \sin(\alpha + \beta) - \cos \beta \cos(\alpha + \beta) \}$$

$$= 4 \cos \alpha \{ \cos \beta \cos(\alpha + \beta) - \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \}$$

加法定理より

$$= 4 \cos \alpha \cos(2\beta + \alpha)$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$0 < \alpha + 2\beta < \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{dS}{d\beta} = 0 \text{ のとき } \cos(2\beta + \alpha) = 0$$

$$2\beta + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

β	0	...	$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\beta}$		+	0	-	
S		増加	極大	減少	

S は $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ のとき極大かつ最大となる。

$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ を①へ直接代入すると複雑になるので、

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \beta$ を代入する、

$$S = 4 \cos \alpha \cos^2 \beta$$

$$= 2 \cos \alpha (1 + \cos 2\beta)$$

$$= 2 \cos \alpha \left\{ 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right\}$$

$$= \sin 2\alpha + 2 \cos \alpha$$

S を α で微分すると

$$\frac{dS}{d\alpha} = 2 \cos 2\alpha - 2 \sin \alpha$$

$$= 2(1 - 2 \sin^2 \alpha) - 2 \sin \alpha$$

$$= -2(2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1)$$

$$= -2(2 \sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 1)$$

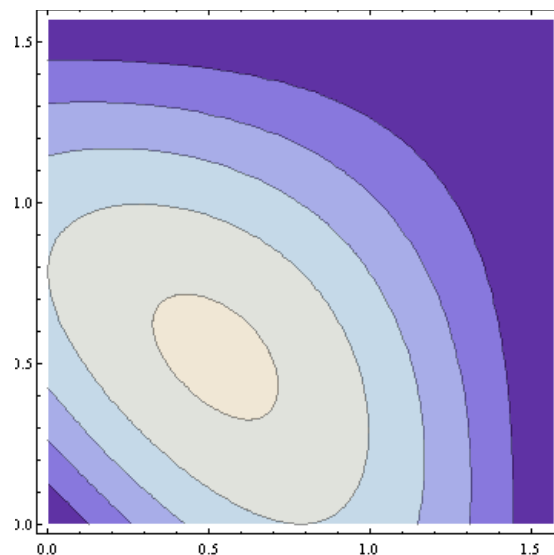
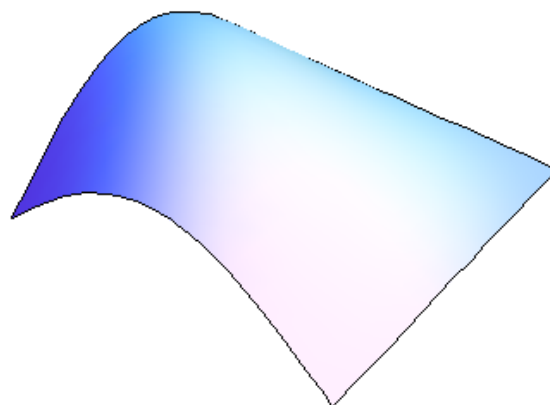
α	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\alpha}$		+	0	-	
S		増加	極大	減少	

増減表より

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき極大かつ最大となる。

このとき $\beta = \frac{\pi}{6}$ より ①より最大値は

$$S = 4 \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ となる。}$$



埼玉大学

x, y は実数で $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ であるとき、

$x^2 + (1 - y)^2$ の最大値, 最小値を求めよ。

【一文字消去法による解答例】

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 + (1 - y)^2 = k \cdots \textcircled{2}$$

①②から x を消去して

$$6y^2 + 2(2k - 3)y + k^2 - 3k + 2 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

y は実数解をもつので判別式

$$\frac{D}{4} = (2k - 3)^2 - 6(k^2 - 3k + 2) = -2k^2 + 6k - 3 \geq 0$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{2} \leq k \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \cdots (\text{答})$$

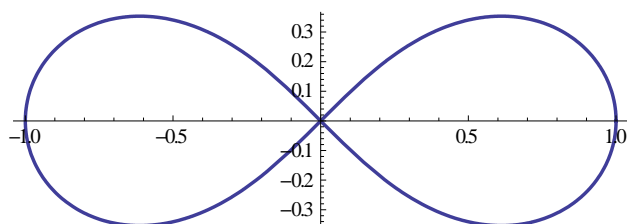
【条件付き極値問題による解答例】

「 $g(x, y) = 0$ のとき、 $f(x, y)$ の極大・極小値を
求める。」ことを条件付き極値問題という。

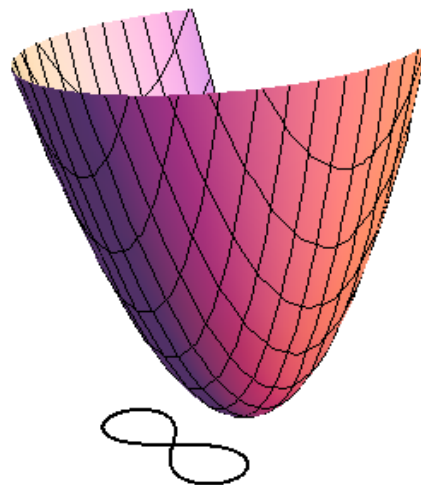
$$g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$$

$$f(x, y) = x^2 + (1 - y)^2 \quad \text{とおく。}$$

$g(x, y) = 0$ は、 xy 平面上において、レミニスケ
ート曲線を描く。

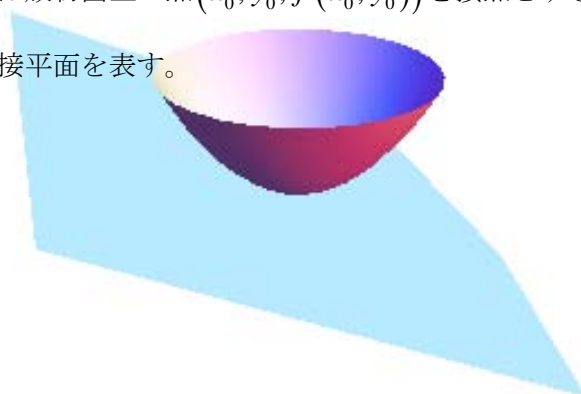


$z = f(x, y)$ は放物面を描く。



$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

は放物面上の点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ を接点とする
接平面を表す。



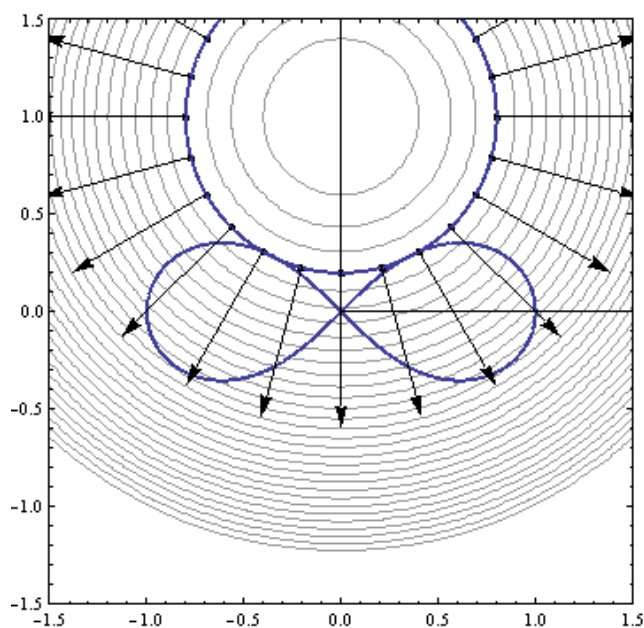
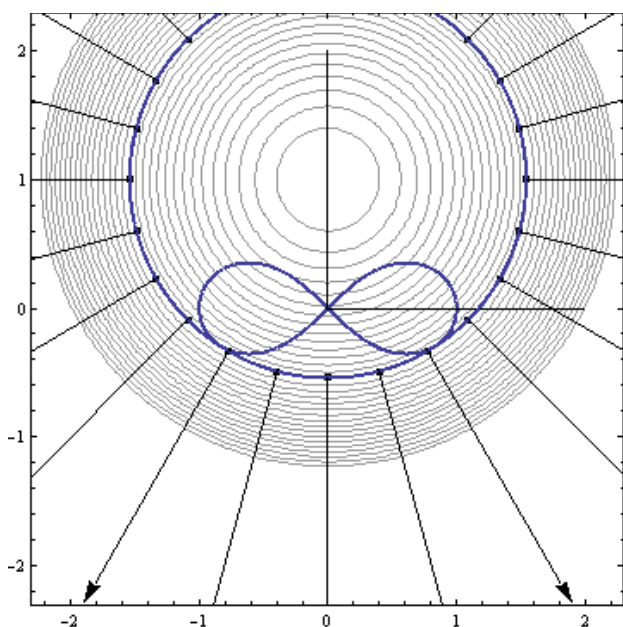
平面ベクトル

$$\text{grad}(f(x_0, y_0)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

を勾配ベクトル。

等高線 $f(x, y) = c$ と $\text{grad}(f(x_0, y_0))$ を矢印で

表した。 $\text{grad}(f(x_0, y_0))$ が等高線と直交していることが分かる。

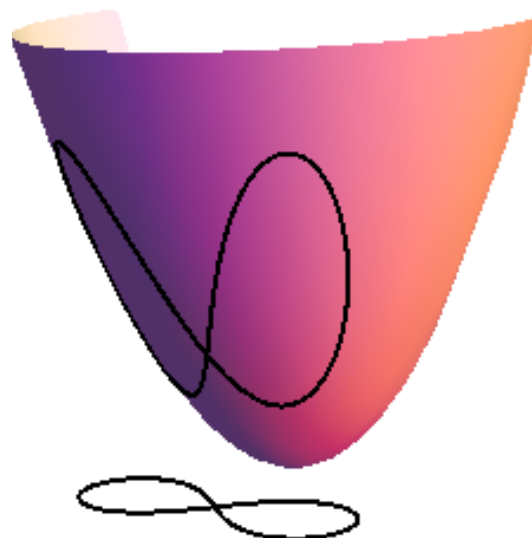


xy 平面上のレミニスケート曲線 $g(x, y) = 0$ を t

をパラメーターとして表示すると、

$x = p(t), y = q(t)$ とする時 空間上の曲線

$z = f(p(t), q(t))$ の変化を調べる。



$$\begin{aligned} & \frac{d f(p(t), q(t))}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(p(t), q(t)) p'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(p(t), q(t)) q'(t) \end{aligned}$$

レミニスケート曲線上の点 $(p(t), q(t))$ の速度ベ

クトル $(p'(t), q'(t))$ と $\text{grad}(f(x, y))$ との内積である。

$\vec{q} = (p(t), q(t))$, $\text{grad}(f(x, y))$ とのなす角を θ とすると、

$f(p(t), q(t))$ が極大・極小になるとき、

$$\frac{d f(p(t), q(t))}{dt} = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$$

$\text{grad}(f(x_0, y_0))$ と $\text{grad}(g(x_0, y_0))$ が平行である。

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

この方法を「ラグランジュの未定乗数法」という。

$$f(x, y) = x^2 + (1-y)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$$

$$\text{grad}(f(x, y)) = (2x, 2(y-1))$$

$$g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4x^3 + 4xy^2 - 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 4x^2y + 4y^3 + 2y$$

$$\text{grad}(g(x, y)) = (2x^3 + 2xy^2 - x, 2x^2y + 2y^3 + y)$$

$$\det \begin{pmatrix} x & y-1 \\ 2x^3 - 2xy^2 - x & 2x^2y + 2y^3 + y \end{pmatrix} = 0$$

$$x(2x^2y + 2y^3 + y) - (y-1)(2x^3 + 2xy^2 - x) = 0$$

$x \neq 0$ のとき

$$2x^2y + 2y^3 + y - (y-1)(2x^2 + 2y^2 - 1) = 0$$

展開してまとめると、

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} - y \cdots \textcircled{1}$$

レミニスケート曲線 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ と $\textcircled{1}$ より x を消去すると

$$\left(\frac{1}{2} - y\right)^2 = \frac{1}{2} - y - 2y^2$$

$$y^2 = \frac{1}{12}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$$

(i) $y = \frac{\sqrt{3}}{6}$ のとき

$$\textcircled{1} \text{へ代入して、} x^2 + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$x^2 = \frac{5}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

放物面 $f(x, y) = x^2 + (1-y)^2$ へ代入すると

$$x^2 + (1-y)^2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\quad}$$

(ii) $y = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ のとき

$$\textcircled{1} \text{へ代入して、} x^2 + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

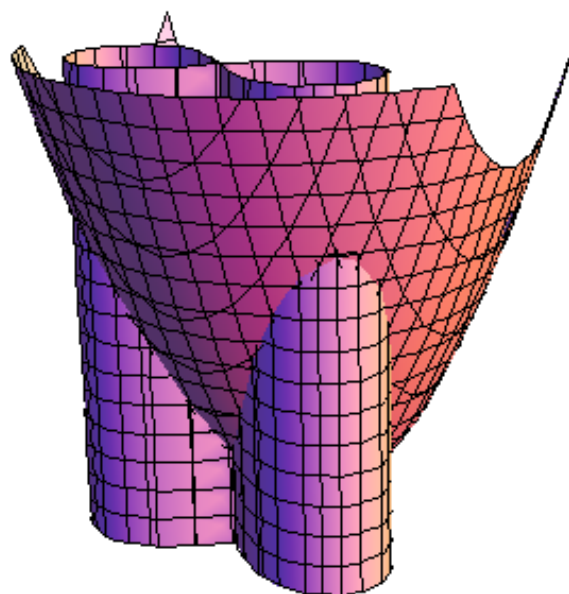
$$x^2 = \frac{5}{12} + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

放物面 $f(x, y) = x^2 + (1-y)^2$ へ代入すると

$$x^2 + (1-y)^2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2} \leq x^2 + (1-y)^2 \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2} \cdots (\text{答})$$

となる。



松本睦郎 (札幌北高等学校)