北数教　第108回数学教育実践研究会　平成31年1月26日（土）
ニッセイ MK ビル

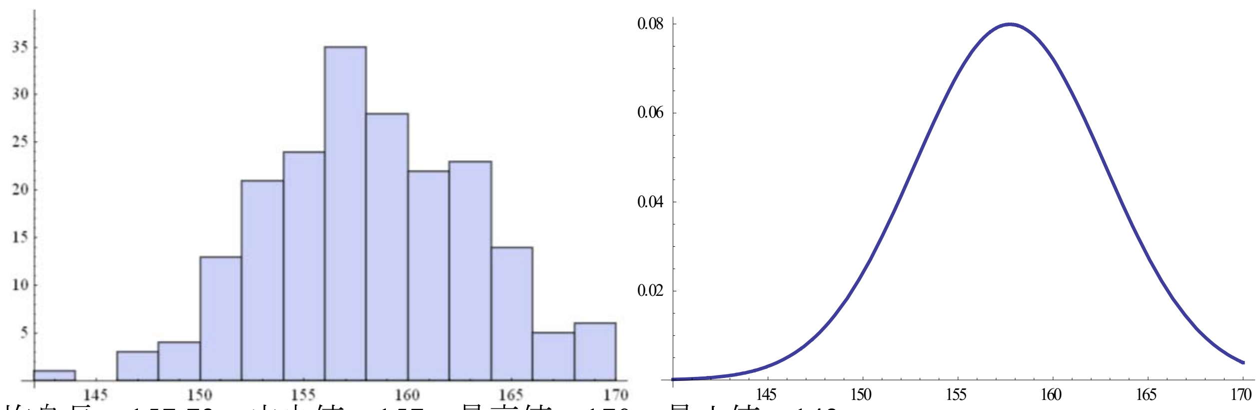
ベイズ推定の思想

AIはどのようにして意思決定をするのか

松本睦郎（札幌啓成高等学校　講師）

Episode1 世界は確率分布でできている。

ある大学の女子学生200人の身長のヒストグラムを作成した。



平均身長＝157.73，中央値＝157，最高値＝170，最小値＝143
分散＝24.9217，標準偏差＝4.99 の正規分布に従っていることがわかる。
自然現象等は、何かの分布曲線に従っていることがわかる。

Episode２ 10円玉にも個性がある。

「同様に確からしい」と仮定すると、表の出る確率も、裏の出る確率も$\frac{1}{2}$であり、高校数学確率は、この「同様に確からしい」ことを出発点としている。

【問題】財布にある多くの10円硬貨から1枚の10円硬貨を取り出し投げ、更に2回目を投げる試行において、1回目に表が出たとき、2回目に表が出る確率を求めよ。

P：1回目表の事象、$\overline{\mathrm{P}}$：1回目裏の事象、Q：2回目表の事象、$\overline{\mathrm{Q}}$：2回目裏の事象とする。

$$\mathrm{P(P)} = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{P}}) = \frac{1}{2}\ , \mathrm{P(Q)} = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{Q}}) = \frac{1}{2}$$

コイン投げの試行は、独立試行と考えるので、

$$P_P(Q) = \frac{P(P \cap Q)}{P(P)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

と結論を導きだす。

ベイズ統計の思考法は、事前確率分布を設定する。つまり、「いろいろな個性ある10円硬貨がある。」としてスタートする。表の出易い10円硬貨、裏の出易い10円硬貨が現実社会には存在することを前提

とする。

人間の身長ように「10 円硬貨にも個性がある。」と発想を切り変えてみよう。表の確率が、0.5 だけではなく、多種多様な確率を持つ 10 円硬貨があるとして考える。

今、簡単に考えるために、社会には、概ね 3 種類のタイプの 10 円硬貨があるものと仮定する。

表の出る確率pとする。

$$p = 0.3, 0.5, 0.7$$

の 3Type の 10 円硬貨がそれぞれ、同じ割合つまり等確率で世の中に流通しているとする。

これを離散型事前確率分布という。

p＝0.3 の Type の 10 円硬貨を取り出す事象を A、p＝0.5 の Type の 10 円硬貨を取り出す事象を B、p＝0.7 の Type の 10 円硬貨を取り出す事象を C とすると、同じ割合で流通しているので、

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

表が出る事象を X、裏が出る事象を Y とすると 6 つの世界に分岐する。

$$P(A \cap X) = P_A(X) \times P(A) = 0.3 \times \frac{1}{3}$$

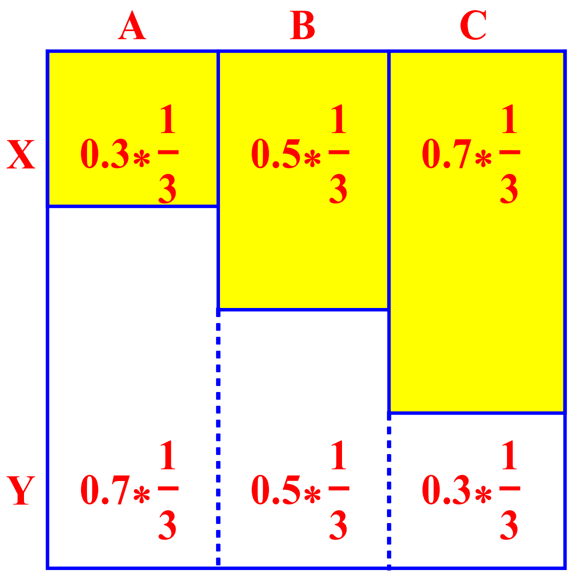
$$P(B \cap X) = P_B(X) \times P(B) = 0.5 \times \frac{1}{3}$$

$$P(C \cap X) = P_C(X) \times P(C) = 0.7 \times \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap Y) = P_A(Y) \times P(A) = 0.7 \times \frac{1}{3}$$

$$P(B \cap Y) = P_B(Y) \times P(B) = 0.5 \times \frac{1}{3}$$

$$P(C \cap Y) = P_C(Y) \times P(C) = 0.3 \times \frac{1}{3}$$



これらの確率の合計は 1 となる。1 回目に表が出る確率を求める。

右上図より、

$$P(X) = P(A \cap X) + P(B \cap X) + P(C \cap X) = \frac{0.3 + 0.5 + 0.7}{3} = 0.5$$

「1 回目に表が出た。」事実があるので、1 回目に裏が出る Y は消去される。（上図の白の部分）

$$P_X(A) = \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \frac{0.3 \times \frac{1}{3}}{0.5} = 0.2$$

$$P_X(B) = \frac{P(B \cap X)}{P(X)} = \frac{0.5 \times \frac{1}{3}}{0.5} = 0.333\cdots$$

$$P_X(C) = \frac{P(C \cap X)}{P(X)} = \frac{0.7 \times \frac{1}{3}}{0.5} = 0.4666\cdots$$

これを事後確率分布という。

10 円硬貨のベイズ更新

タイプ p=0.3 の事前確率=$\frac{1}{3}$
タイプ p=0.5 の事前確率=$\frac{1}{3}$
タイプ p=0.7 の事前確率=$\frac{1}{3}$

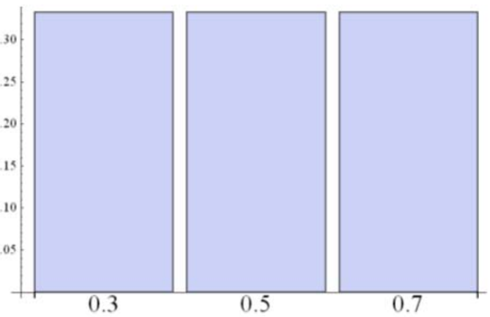
⇨

1 回目
表
が出た

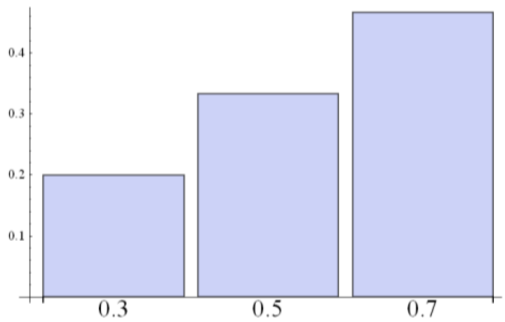
⇨

タイプ p=0.3 の事後確率= 0.2
タイプ p=0.5 の事後確率=0.33
タイプ p=0.7 の事後確率= 0.46

事前確率分布



事後確率分布



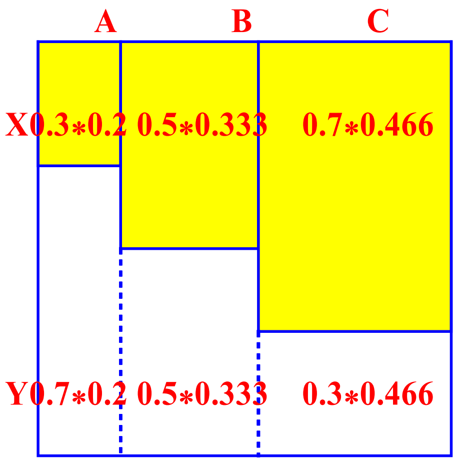
結局、1 回目に表が出たとき、2 回目に表が出る確率は？との疑問について
この数値として「期待値」を利用する。
事前確率分布の期待値は

$$0.3 \times \frac{1}{3} + 0.5 \times \frac{1}{3} + 0.7 \times \frac{1}{3} = 0.5$$

事後確率分布の期待値は

$$0.3 \times 0.5 + 0.5 \times 0.3333 + 0.7 \times 0.4666 = 0.55312$$

期待値は、0.5 から 1 回目に表が出ると 0.55312 に微小に増加する。
更に、2 回目に硬貨を投げた結果が表が出たとき、3 回目に硬貨を投げたとき表が出る確率を求める。
事後確率分布を新たな事前確率分布として同じ計算を行う



$$P_X(A) = \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \frac{0.3 \times 0.2}{0.3 \times 0.2 + 0.5 \times 0.333 + 0.7 \times 0.466} = 0.10846$$

$$P_X(B) = \frac{P(B \cap X)}{P(X)} = \frac{0.5 \times 0.333}{0.3 \times 0.2 + 0.5 \times 0.333 + 0.7 \times 0.466} = 0.301209$$

$$P_X(C) = \frac{P(C \cap X)}{P(X)} = \frac{0.7 \times 0.466}{0.3 \times 0.2 + 0.5 \times 0.333 + 0.7 \times 0.466} = 0.590344$$

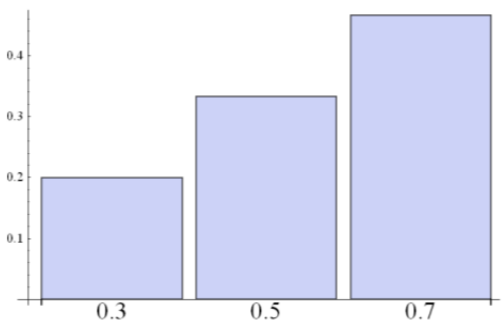
タイプ p=0.3 の事前確率= 0.2
タイプ p=0.5 の事前確率=0.33
タイプ p=0.7 の事前確率= 0.46

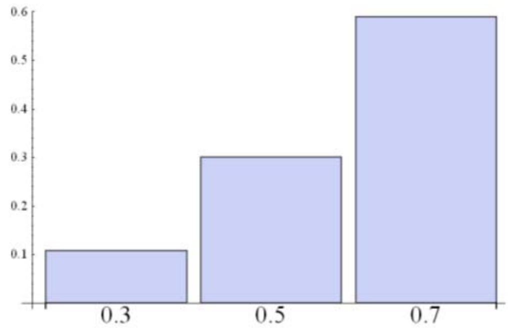
⇨

2 回目
表
が出た

⇨

タイプ p=0.3 の事後確率= 0.1084
タイプ p=0.5 の事後確率=0.3012
タイプ p=0.7 の事後確率= 0.5903





事後確率分布の期待値は

$$0.3 \times 0.1084 + 0.5 \times 0.3012 + 0.7 \times 0.5903 = 0.59633$$

Episode3　事前確率分布を変えてみよう。

Episode2 では、10 円硬貨を表の出る確率 p を 0.3,0.5,0.7 の 3Type が同じ割合で存在すると仮定した。この離散型事前分布から、自然界に多い連続型事前分布として、問題を考えてみよう。

ベータ関数　　α, β は自然数とする。

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}$$

は有名な積分である。これを基本にして連続型事前分布を求める。

ベータ分布

$$w(x) = C \times x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

C を定数とする。

確率密度関数なので、タイプの変数 0 から 1 まで積分すると 1 になる。（正規化）

$$\int_0^1 w(x)\,dx = 1$$

$$C\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = 1$$

$$C \times B(\alpha,\beta) = 1$$

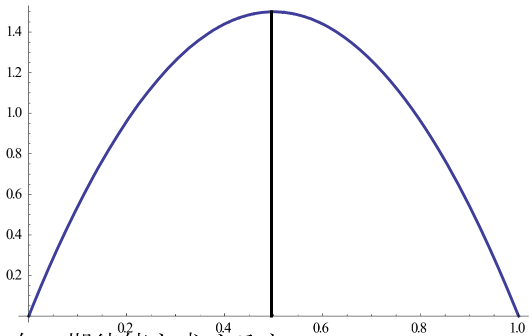
$$C = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}$$

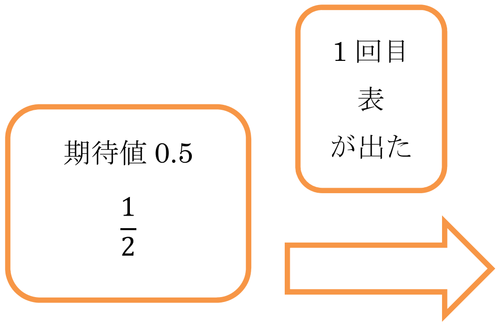
$$C = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}$$

$$\alpha = 2, \beta = 2$$

として、事前確率分布を設定する。

$$w(x) = 6x(1-x)$$





この分布の期待値を求めると、

$$E = \int_0^1 x \times w(x)dx = 6\int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{2}$$

10 円硬貨の表の出る確率 0.5 が一番多く、中央の 0.5 から離れていくに従って少なくなっている。つまり確率 0 から 1 までの無限タイプの 10 円硬貨があるとする。

これを事前確率分布とするとき、1 回目に表が出たとき、2 回目に表が出る期待値を求める。

事後確率分布$w'(x)$ とする。

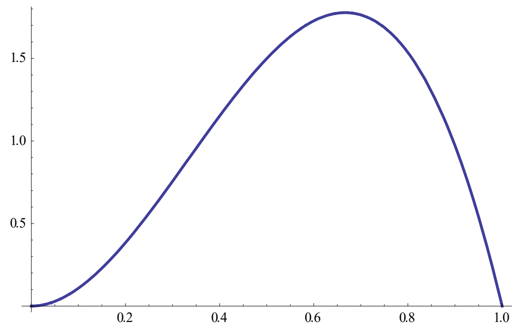
$$p([タイプx] \cap 表) = p([タイプx]) \times p_{[タイプx]}(表) = 6x^2(1-x)$$

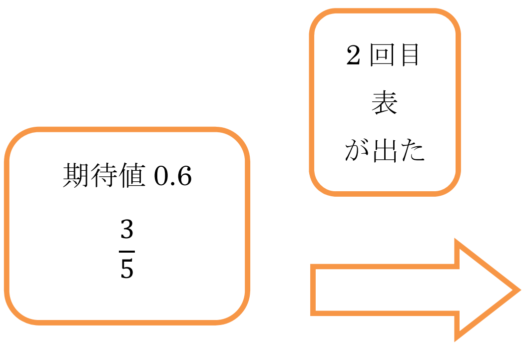
面積が 1 になるように正規化し係数を調整すると事後確率分布は、

$$w'(x) = 12x^2(1-x)$$

期待値

$$E = \int_0^1 12x^3(1-x)dx = \frac{3}{5}$$





$$w'(x) = 12x^2(1-x)$$

を事前確率分布として、2 回目に表が出たとき、3 回目に表が出る期待値を求める。

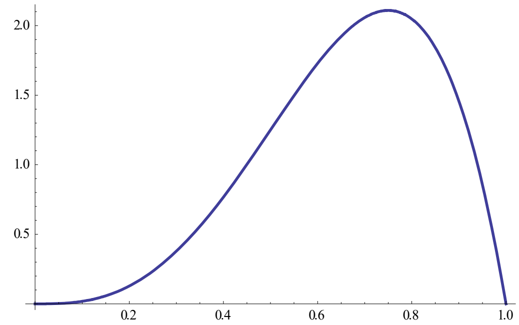
事後確率分布は、$p([タイプx] \cap 表) = p([タイプx]) \times p_{[タイプx]}(表) = 6x^3(1-x)$

面積が 1 になるように正規化し係数を調整すると事後確率分布は、

$$w''(x) = 20x^3(1-x)$$

期待値

$$E=\int_0^1 20x^4(1-x)dx=\frac{2}{3}$$



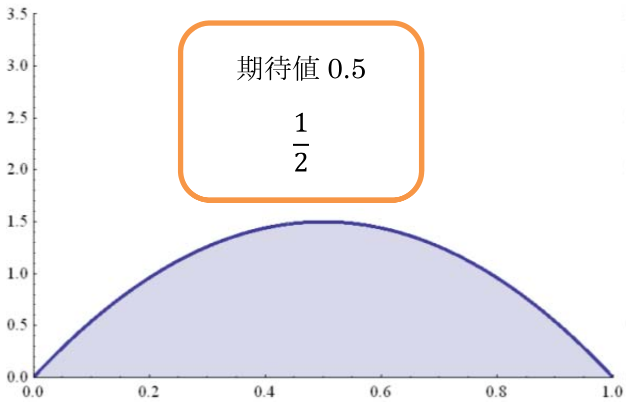
期待値 0.6666

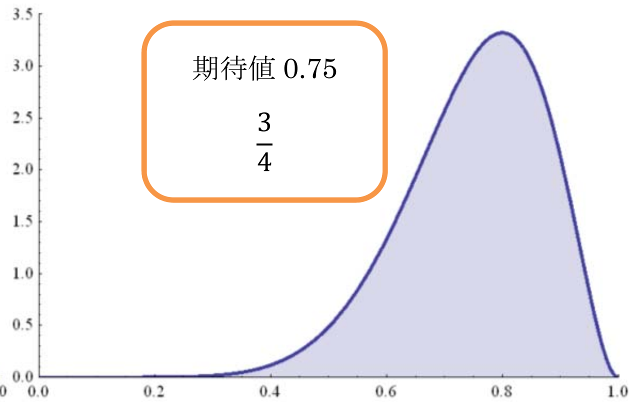
$\frac{2}{3}$

Episode 4　事前分布×尤度＝事後分布

事前確率分布を、$w(x)=6x(1-x)$とする。

実際に、「10 回硬貨を投げて、7 回表が出た。」との実験結果が出た。





係数無視
$w(x)=x(1-x)$
事前分布

×

10 回中 7 回表
$L(x)=x^7(1-x)$
尤度
実験データ

⇒

係数無視
$x^8(1-x)^2$
事後分布

正規化によって、事前分布と事後分布の係数を求める。上図の面積が 1 になるような係数を求める。

Integrate[x (1-x),{x,0,1}]=1/6　　Integrate[x^8 $(1-x)^2$,{x,0,1}]=1/495　より、

$$\text{事前分布}\ \ w(x)=6\,x(1-x)\quad \text{事後分布}\ \ w'(x)=495x^8(1-x)^2$$

事前分布の期待値は、Integrate[6 x^2 (1-x),{x,0,1}]=1/2

事後分布の期待値は、Integrate[495x^9 $(1-x)^2$,{x,0,1}]=3/4

となり、実験データによって期待値が$\frac{1}{2}$から$\frac{3}{4}$へ変化する。

10 円硬貨を投げる試行において、推定される事前分布を基礎に、実験データという結果に従って考えを改めて、10 円硬貨の真理に接近しようとする考え方が、ベイズ統計の思想である。（おわり）