北数教　第 103 回数学教育実践研究会　平成 29 年 11 月 25 日（土）
アスティ 45 10F

折り紙の数理

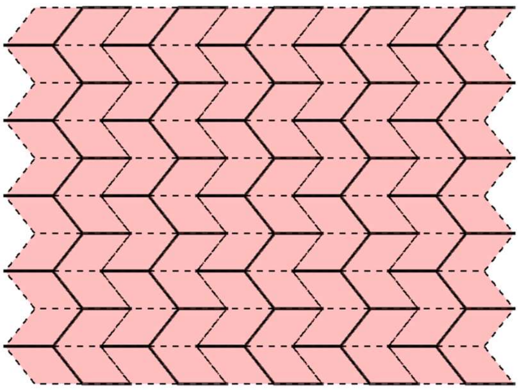
ミウラ折りとナマコ折りとねじり折りの実験

松本睦郎（札幌啓成高等学校　講師）

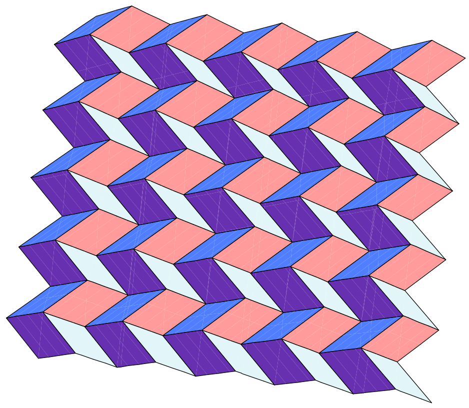
Episode1 ミウラ折りの数理

第 101 回数実研で、有朋高校の大谷健介先生の「ミウラ折りわんもあしんぐ」を聞いて、改めて紙を折ることに興味を持ちました。札幌北高校在職中に、SSH 毎年サイエンス・アプローチという数学講座で実施した教材を、少し加筆しました。

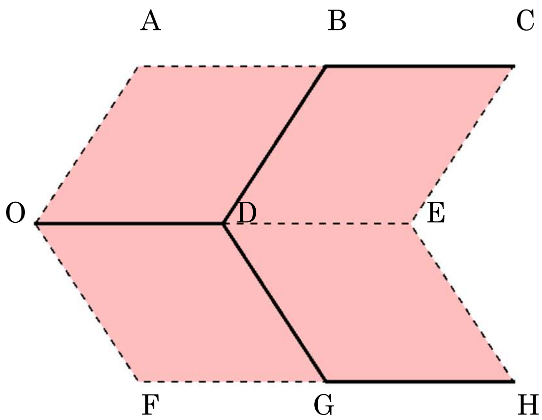
ミウラ折りは、下図のような展開図です。実線を山折り、点線を谷折りにすると完成します。



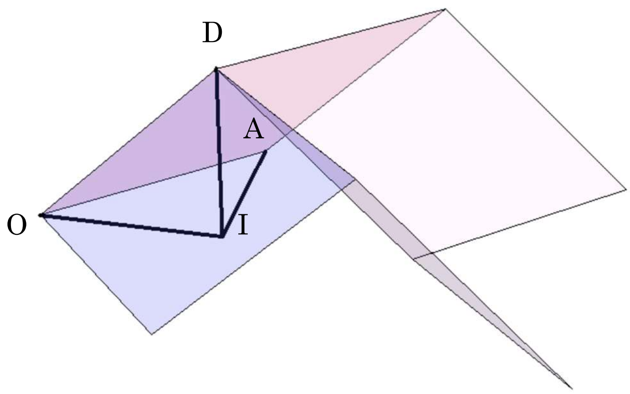
【展開図↑】



【ミウラ折り↑】



【基本 Unit↑】



【基本 Unit の動き↑】

∠AOD=60°の平行四辺形を 4 個組み合わせた【基本 Unit】がミウラ折りの基本であることが分かる。

この基本 Unit の縦横平行移動のタイリングが展開図となる。

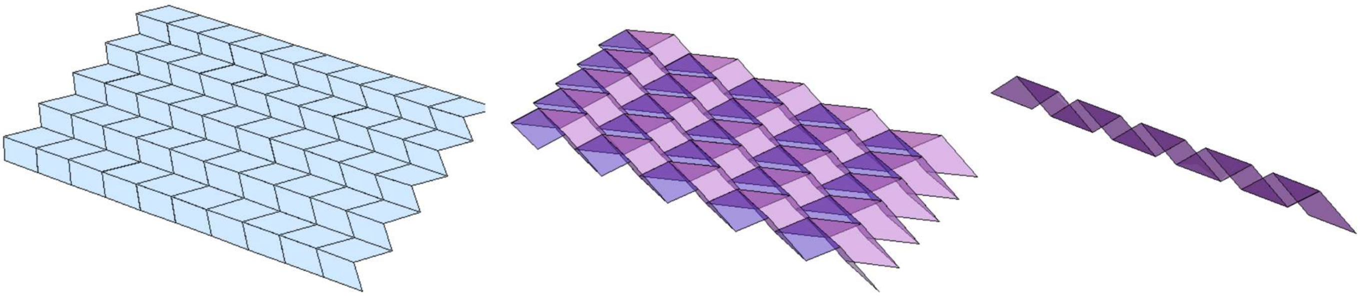
∠AOD=θ として、基本 Unit の空間座標を計算する。∠DOI=α ,∠AOI=β とおく。

$$\mathrm{A}(\cos\beta, \sin\beta, 0), \mathrm{D}(\cos\alpha, 0, \sin\alpha), \mathrm{B}(\cos\alpha+\cos\beta, \sin\beta, \sin\alpha), \mathrm{C}(2\cos\alpha+\cos\beta, \sin\beta, 0), \mathrm{E}(2\cos\alpha, 0, 0)$$

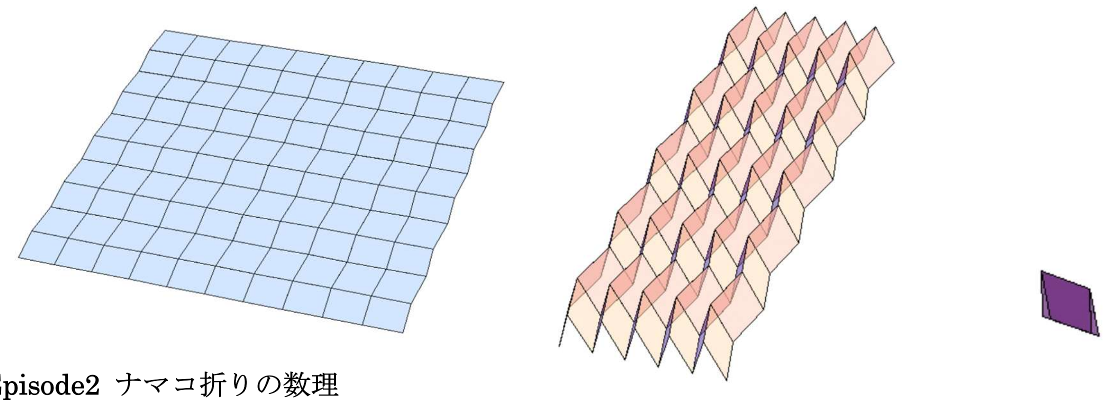
三角形 OAD に関する余弦定理から、

$$\cos\beta = \frac{cos\theta}{cos\alpha}$$

が導かれる。θ =60°の場合で、座標入力し Mathematica で展開シュミレーションすると、下図（↓）になる。畳んだ形が長くなり、折りたたみの地図には適していない。

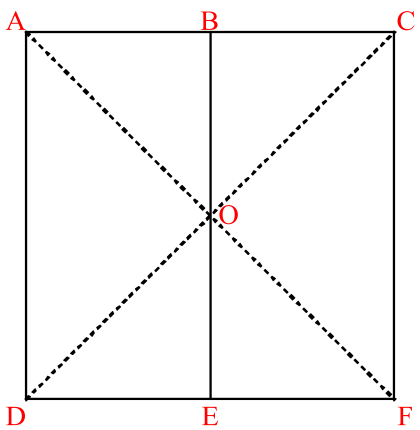


θ =86°～88°の値をとると、畳んだ大きさが、下右端図（↓）のように小さくなる。

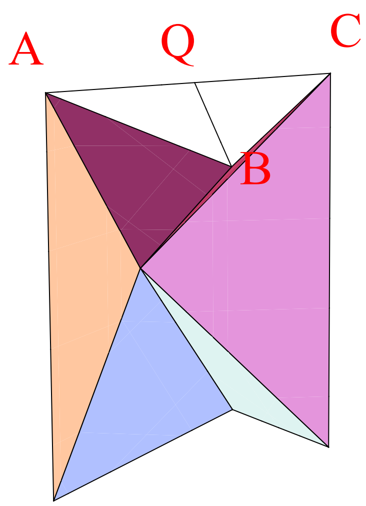


Episode2 ナマコ折りの数理

ナマコ折りの基本 Unit は、下図の正方形である。AD=DF=FC=CA=2 とすると、OA=OC=$\sqrt{2}$。

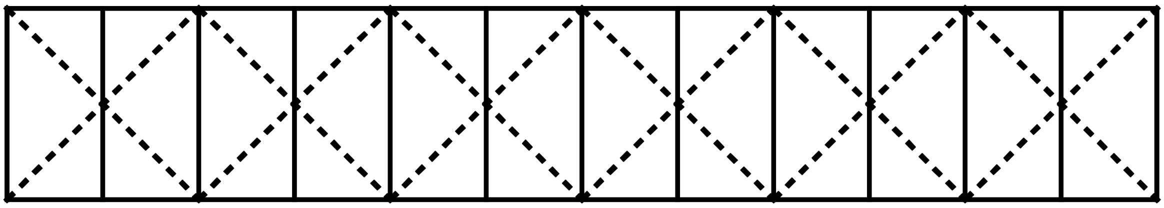


（ 山折, 谷折）

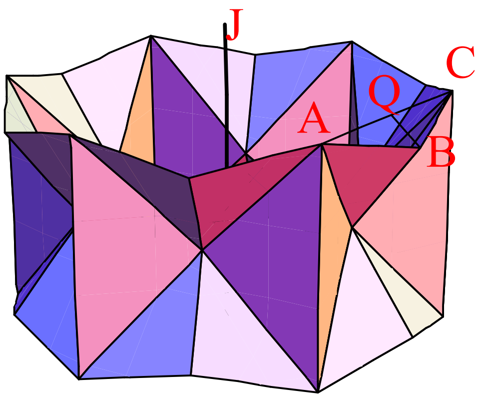


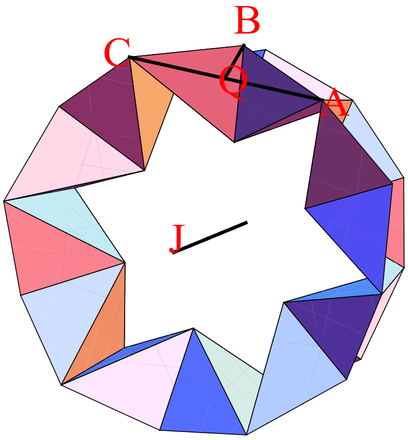
BC を山折り、AF、DC を谷折りにすると、ナマコ折の基本 Unit が動く。

この基本 Unit を横に 6 個接続した展開図は下図になる。

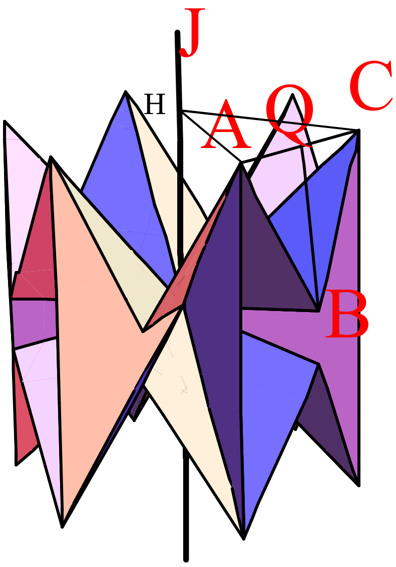


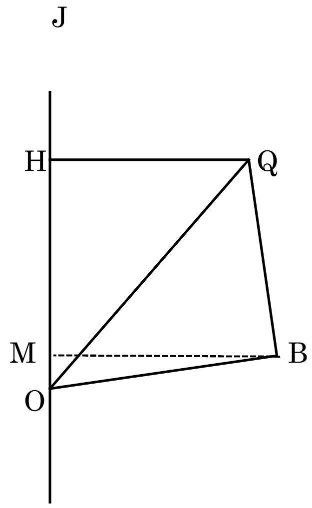
展開図を組み立てると、このようなナマコ折りが完成する。中心軸 J とし、拡張したり、収縮する。





（ｉ）完全に収縮し、折りたたまれたとき





点 A から軸 J へ垂線を引き交点を H とする。

このとき、$\angle ABC = \angle AHC = 60°$となり、△AHC と△ABC は一辺が 1 の正三角形となる。

$$\mathrm{QH} = \mathrm{QB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, OH = 1$$

△OHQ は直角三角形なので、

$$OQ^2 = OH^2 + HQ^2$$

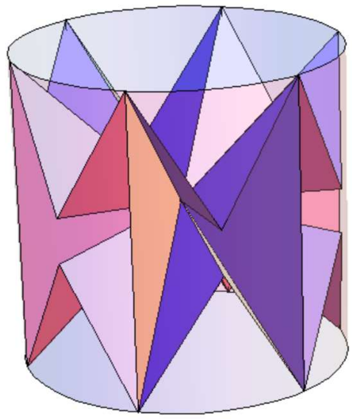
$$\mathrm{OQ} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

∠HOQ=∠BOQ=α　とおく

$$\sin\alpha=\frac{QH}{OQ}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ \cos\alpha=\frac{OH}{OQ}=\frac{2}{\sqrt{7}},\ \sin2\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

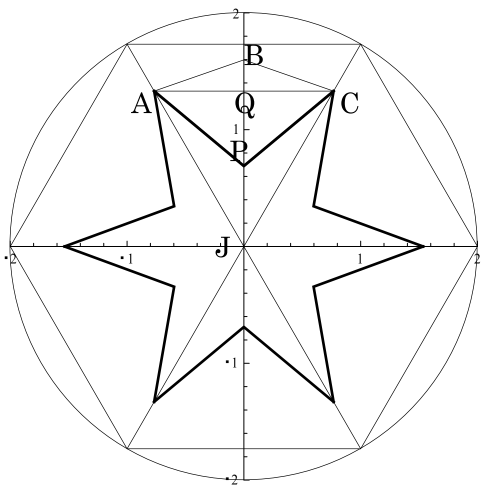
点 B から軸 J へ垂線を引き交点を M とする。

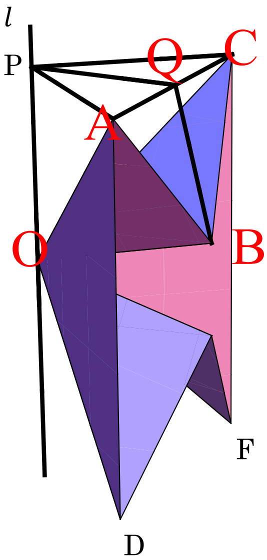
$$\mathrm{BM}=\mathrm{OB}\sin2\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}=0.9897$$



半径 1 の円柱のなかに、収納できる。

∠ABQ=θ　とおく。30°　＜θ＜90°　のとき、点 O を通り辺 AD,CF と平行な直線をlとする。





点 Q からlへ垂線を引き、交点を P とする。

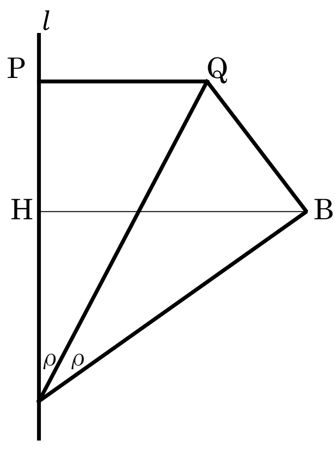
$\mathrm{PQ}=\mathrm{BQ}=\mathrm{AB}\cos\theta=\cos\theta$,$\mathrm{AQ}=\mathrm{AB}\sin\theta=\sin\theta$

∠POQ=∠BOQ= ρ とおく、△OPQ において

$$\tan\rho=\frac{PQ}{OP}=\cos\theta$$

$\therefore \tan\rho=\cos\theta\cdots$①

点 B から直線lへ垂線をひき交点を H とおく。



$$HB = OB\sin 2\rho = \sin 2\rho = 2\sin\rho\cos\rho$$

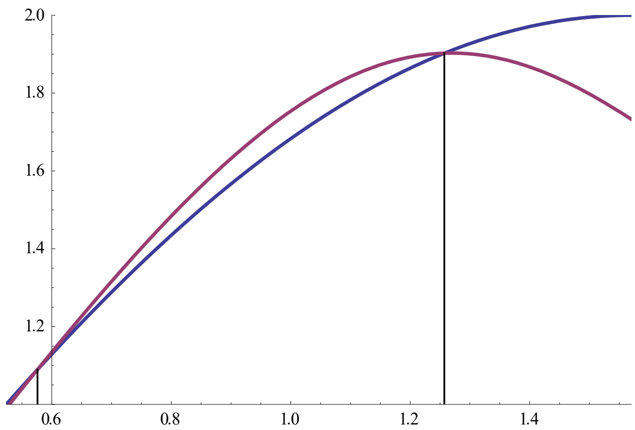
$$= 2\tan\rho\cos^2\rho$$

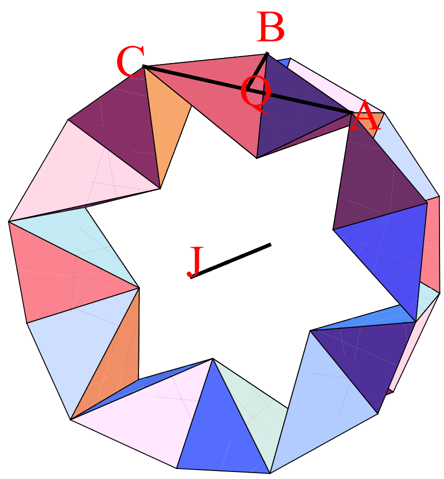
$$HB = \frac{2\tan\rho}{1+\tan^2\rho} \quad ①より \quad \therefore HB = \frac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$$

$$AQ = \sin\theta \ , \quad AJ = 2AQ = 2\sin\theta$$

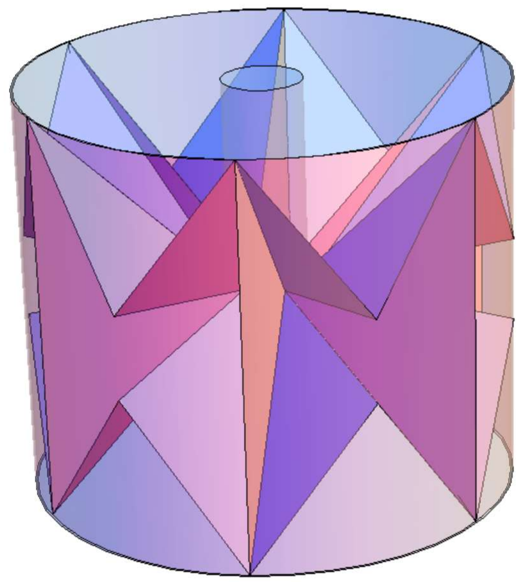
$$JB = JP + HB = JQ - PQ + HB = \sqrt{3}AQ - \cos\theta + HB = \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta + \frac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$$

$$BJ - AJ = \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta + \frac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta} - 2\sin\theta = \left(\sqrt{3}-2\right)\sin\theta - \cos\theta + \frac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$$

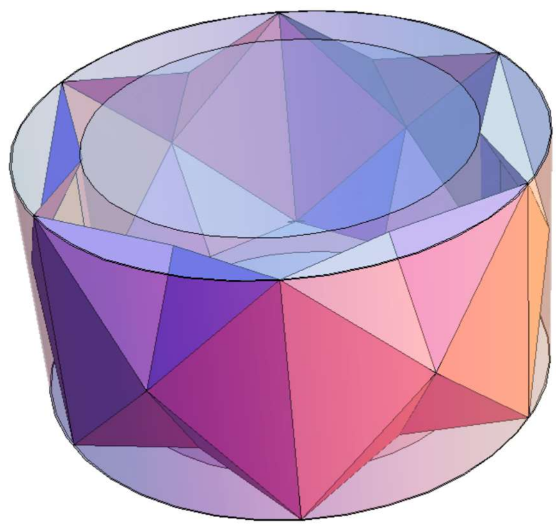




点 A と点 B の中心軸 J からの距離をグラフにしてみた。33°　,72°　（1.25718rad）のとき同じ長さになり、美しく円柱に内接する。

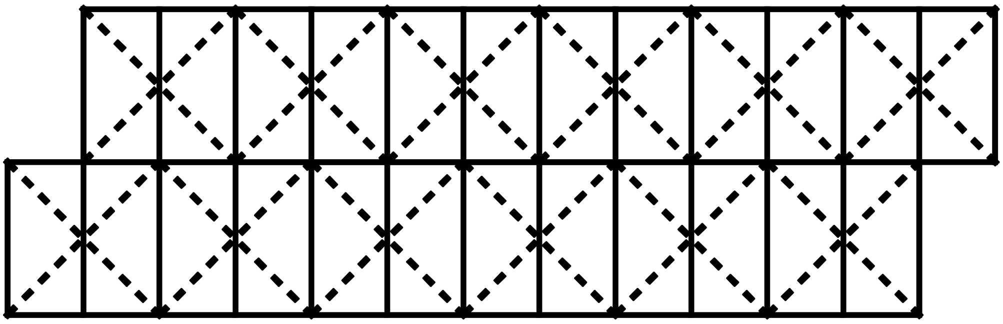


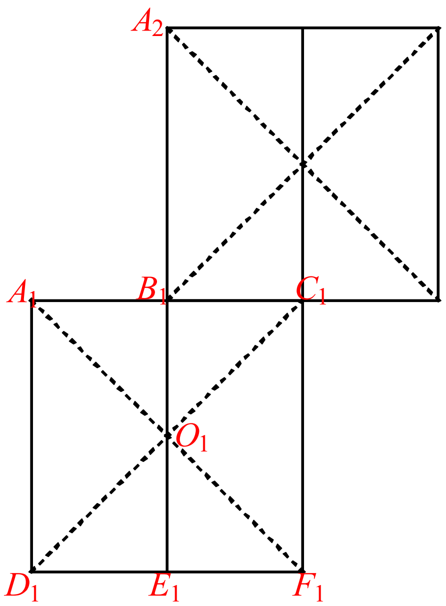
33°　↑

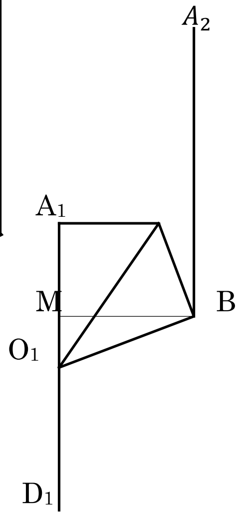


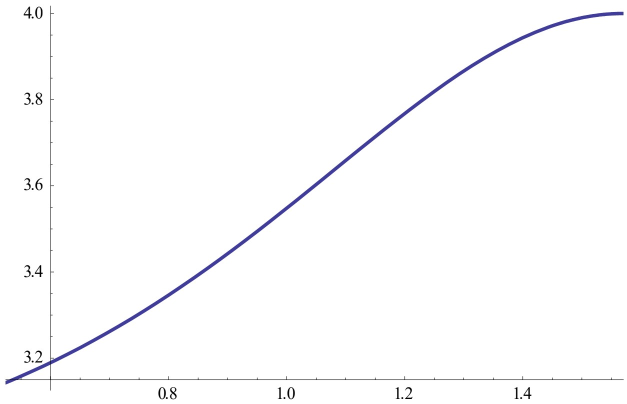
72°　↑

二段重ステントについて、下図の展開図を組み立てると







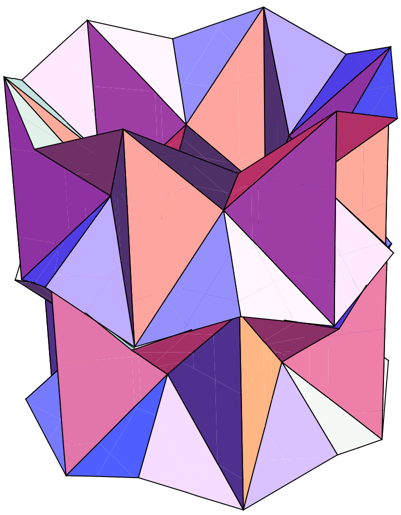


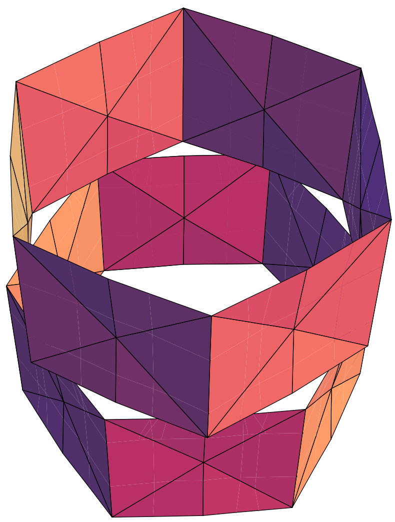
２段 Unit を組み立てると、上下に収縮する。展開角が大きくなると、上下方向に伸びている。

高さ$= A_2B + AD_1 - AM = 2+2-\left(1-\cos 2\rho\right) = 3+\cos 2\rho = 2\cos^2\rho + 2 = \dfrac{4+2\tan^2\rho}{1+\tan^2\rho} =$

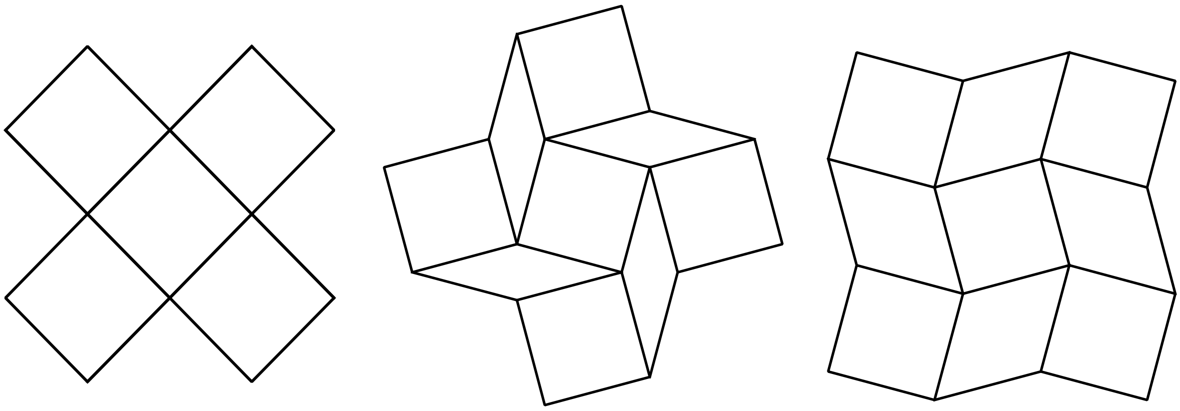
$$\frac{4+2\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}$$

90° 展開すると、2 段ステントは、右図のように亀裂する、(↓)



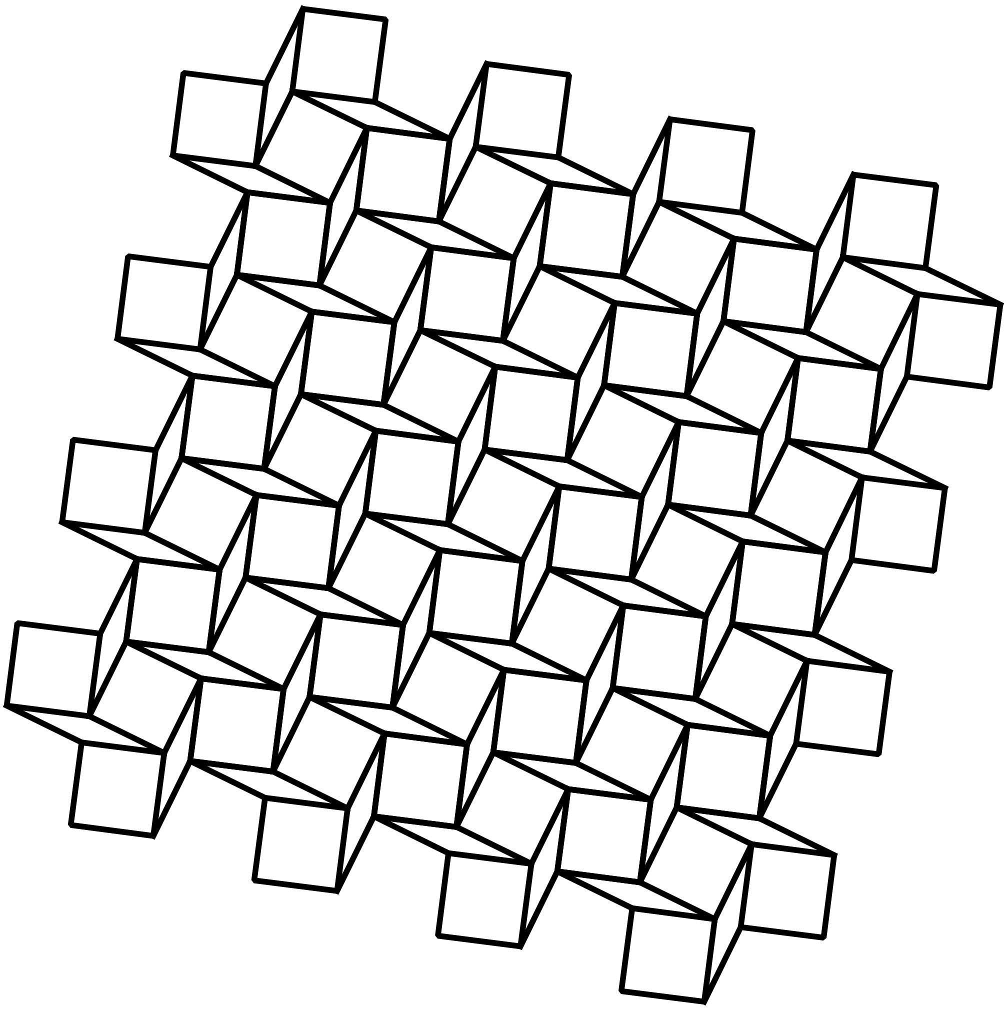


Episode3 ねじり折りの数理



基本 Unit は、上左図の中央の正方形の周囲に、4 個の正方形があるとする。周囲の 4 個の正方形が、上中央と右図のように、同じ角で回転するものとする。この図を展開図とする折り紙を、「ねじり折り」という。模型を作成すると、回転しながら収縮するモデルが完成する。

この基本 Unit を縦横にタイリングした展開図が、下図である。「平織り」と呼ばれている。



【終わり】