北数教　第101回数学教育実践研究会　平成29年6月3日（土）
北海道大学情報教育館3F

難しい重複円順列の一般的解法

重複円順列の考え方

周期解決法とコーシー・フロベニウス定理

松本睦郎（札幌啓成高等学校　講師）

Episode1 難しい重複円順列

大学への数学2014年10月号「秋の夜長に数え歌」（Ｐ12〜）に次のような重複円順列の問題があった。

2014年名城大学・法学部

（1）〜（4）省略

（5）Ａ，Ａ，Ｂ，Ｂ，Ｃ，Ｃの６文字を円形に並べる方法は何通りあるか。

【解答例】

２つのＡを区別してA_1, A_2とする。A_1の位置を固定する。A_2を並べる位置の選び方は5通り、Ｂ，Ｂの選び方は${}_4C_2$通りで、$5\times{}_4C_2=30$通りある。いま、2つのＡに区別はないので、求める場合の数をxとすると、２つのＡにA_1, A_2と名前をつける方法は2通りあるので、$x\times2=30$

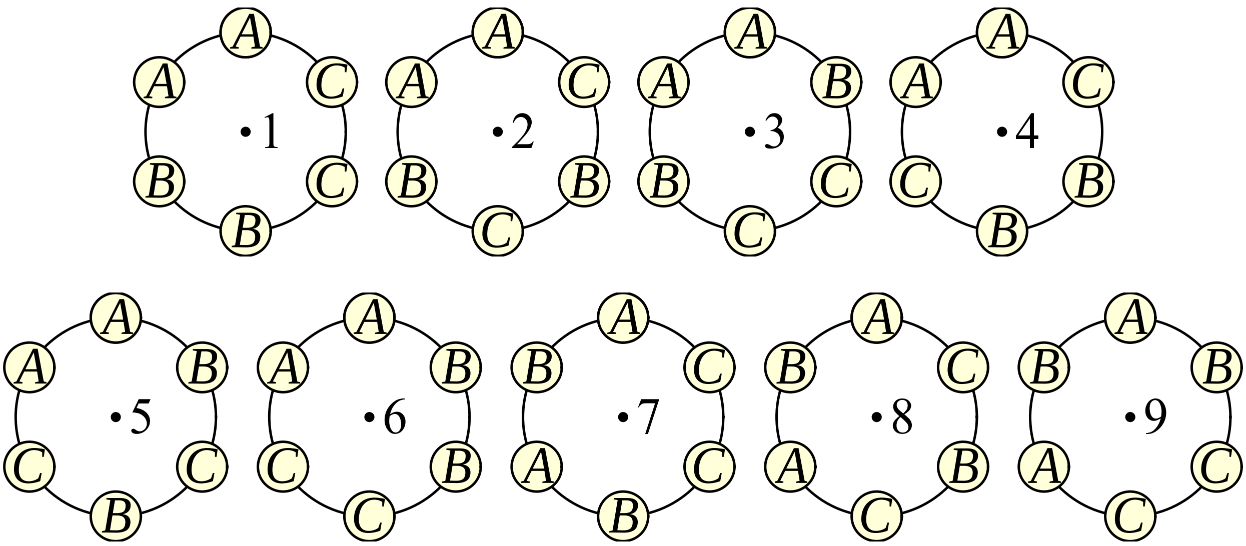
よって、x=15通り。

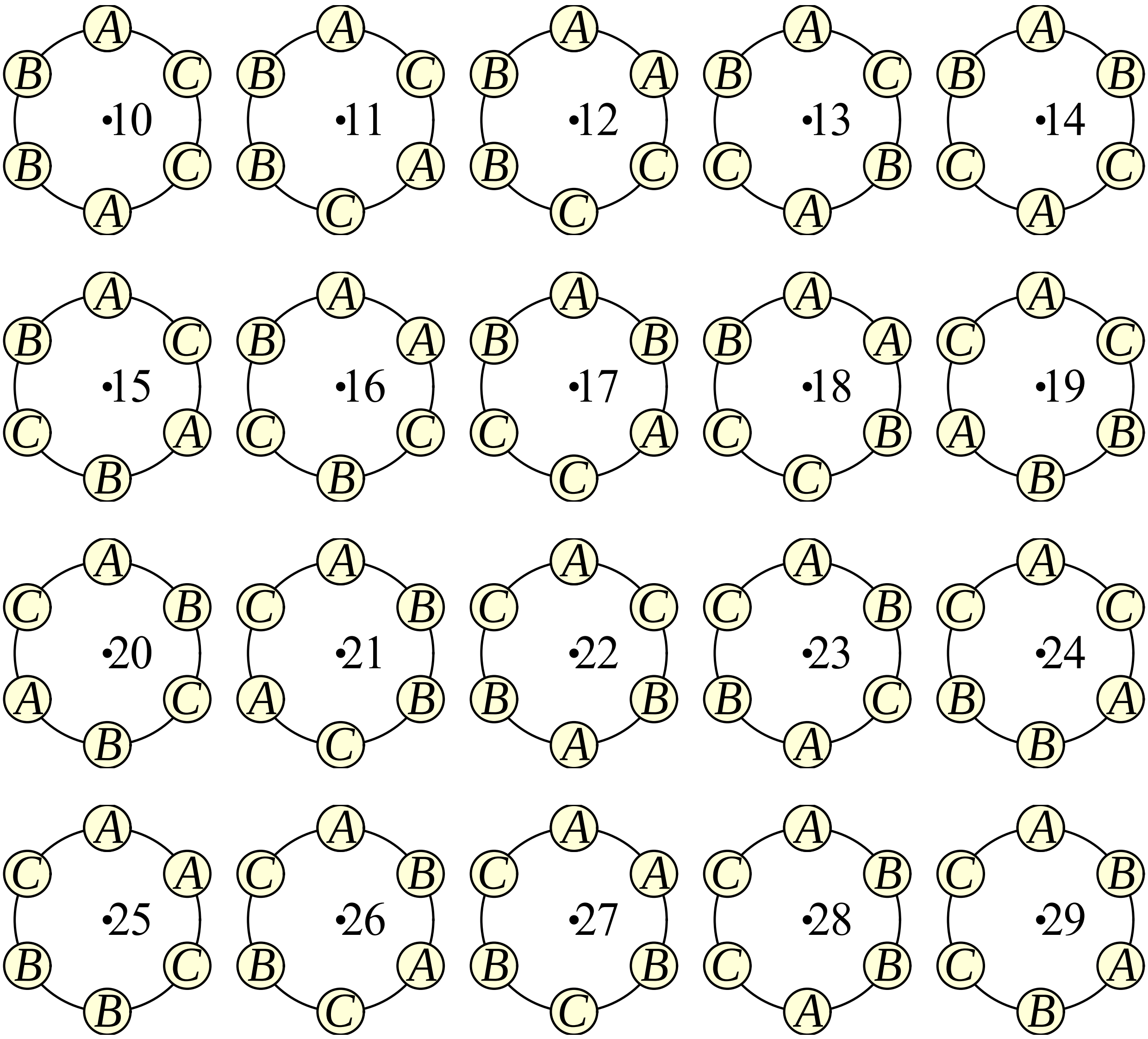
　という【別解】の記述があった。（Ｐ15右欄の記事）

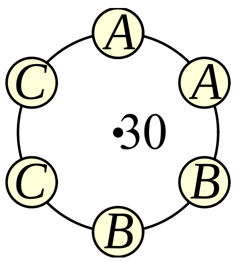
教科書傍用問題集には、この「重複円順列」問題はほとんど扱われていないが、大学入試問題で出題

重複円順列は、単純円順列よりもかなり思考能力を必要とする。

円の最上部（12時部分）をＡに固定して円順列を作成すると、下図の様になる。







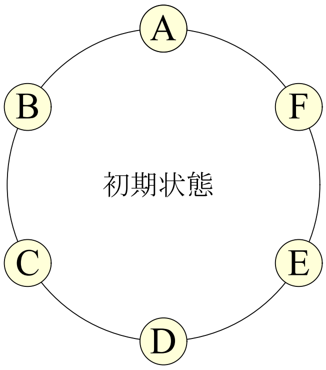
（Mathematica による作図）

やはり、最上部をＡに固定すると、30 通りの円順列が完成する。２個のＡとＡの入れ替えが可能なので、２で割り 15 通りと答えを求めることができる。

　この解答は、誤りである。１ケ月後の「大学への数学 11 月号 2014 年」（Ｐ96）に訂正が掲載され、答えは 16 通り。

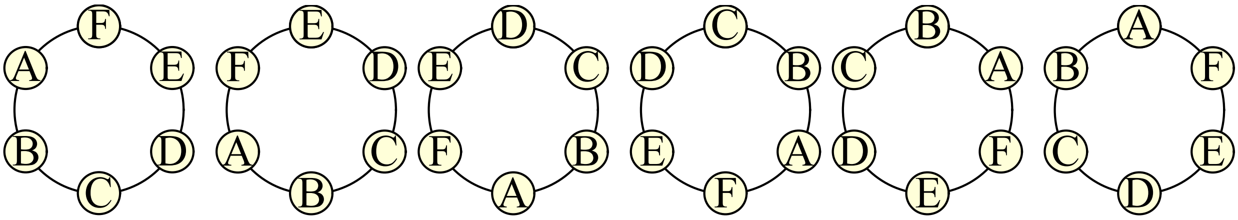
さて、この 15 通りの誤答の原因は何か？重複円順列の一般的思考方法は、どうすればよいのか？

Episode2 円順列の意味



異なる 6 個の A,B,C,D,E,F を円形に並べる円順列を求める。
右大図（→）のように A,B,C,D,E,F を円形に配置した。
この円順列を反時計方向に 60°回転する操作をρする。

ρ^2は、60°×2=120°, ρ^3は、60°×3=180°
ρ^4は、60°×4=240° ρ^5は、60°×5=300°
ρ^6は、60°×6=360°の回転となり、元に戻る。
eは、恒等変換とする。



ρ　　ρ^2　　ρ^3　　ρ^4　　ρ^5　　$\rho^6 = e$

6 回の回転によって、初めて元の状態に戻るので、この円順列を周期 6 であると定義する。
A,B,C,D,E,F は異なる 6 個の順列なので、周期 6 の順列を$T(6)$とおくと、

$$T(6) = 6!$$

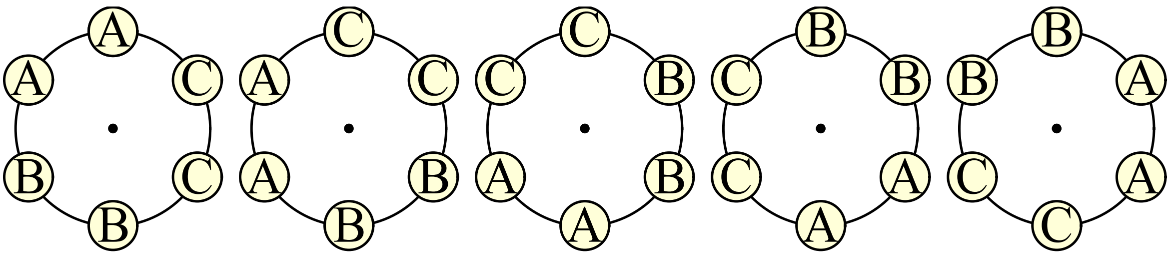
更に、これらの回転による 6 個の円順列（↑）を同じものと扱うので、
よって、異なる 6 個の円順列は、

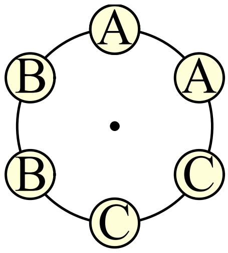
$$\frac{T(6)}{6} = 5!$$

$$\boxed{\text{円順列} = \frac{\text{座席の順列}}{\text{円順列の周期}}}$$

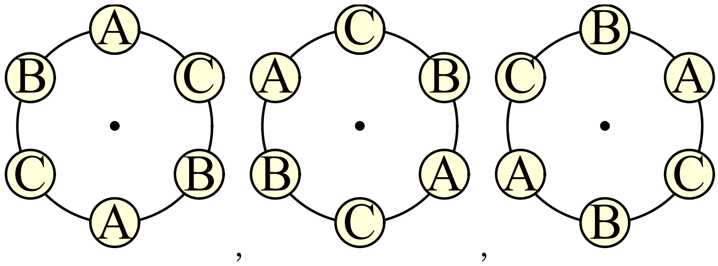
Episode 3　重複円順列の解き方

Episode1 の重複円順列について考える。作図した 30 個の円順列（Ep1）$\boxed{1}$番について、反時計方向 60°回転を考える。

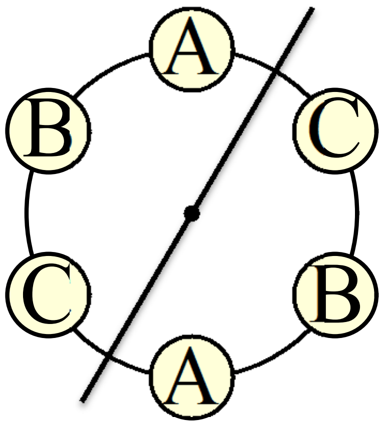




6 回の回転によって、初めて元の状態に戻るので、この円順列$\boxed{1}$を周期 6 であると判断する。
しかし円順列（Ep1）$\boxed{13}$と$\boxed{26}$は、中心 O に関して点対称な形状配列である（↓$\boxed{13}$）



この 3 回の回転によって、初めて元の状態に戻るので、周期が 3 であることがわかる。
上の円順列(Ep1)$\boxed{1}$～$\boxed{30}$には、周期 6 と周期 3 の配列が混在している。



周期 3 の順列を$T(3)$とおくと、左上図半分のⒶ, Ⓑ, Ⓒの順列であり、左上半分が決定されれば、

もう右下半分も決定されるので、

$$T(3) = 3! = 3 \times 2 = 6$$

周期 6 の順列を$T(6)$とおくと、Ⓐ, Ⓐ, Ⓑ, Ⓑ, Ⓒ, Ⓒの順列から、$T(3)$を除いたものなので、

$$\mathrm{T}(6) = {}_6C_2 \times {}_4C_2 - T(3) = 84$$

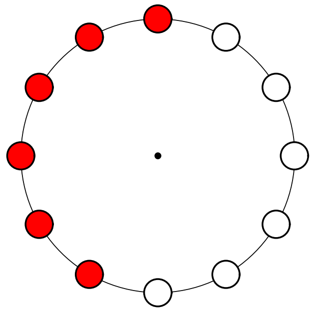
よって、求める円順列は、

$$\frac{T(6)}{6} + \frac{T(3)}{3} = \frac{84}{6} + \frac{6}{3} = 14 + 2 = 16$$

重複円順列の答えは、16 個である。

Episode4 円形座席の着色方法

12 個の椅子が円形に等間隔に並べてある。これらの椅子を 6 個赤色に塗り、残り 6 個を青色に塗る方法は、何通りあるか。



【解答例】

12 の約数を求める。$12 = 2^2 \times 3$　より 1,2,3,4,6,12

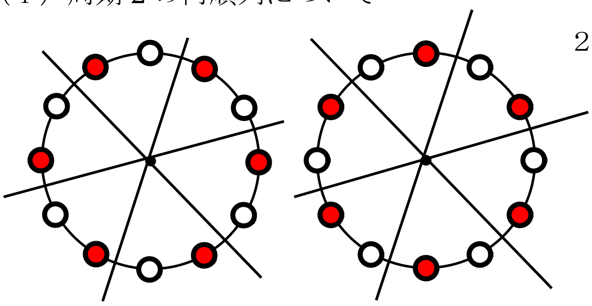
赤色と白色の 2 色に塗り分けるので、周期は 12 の約数の中で偶数となる

$$2,4,6,12$$

$$\frac{360°}{12} = 30°$$

1 回転を反時計方向に 30°回転するものとする。

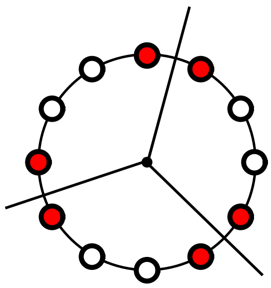
（ⅰ）周期 2 の円順列について



2 回転して、初めて初期状態になる配列を求める。
左図の様に 1 片が中心角 60°の扇形が 6 個集まっている。1 片の扇形の円弧上の 2 個の赤,白配列が決定されれば、周期 2 の円順列が決定されるので、

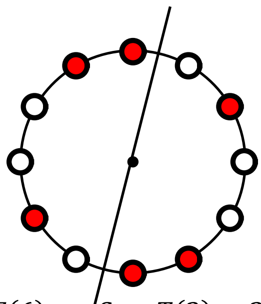
$$T(2) = {}_2C_1 = 2$$

（ⅱ）周期 4 の円順列について



$$T(4) = {}_4C_2 - T(2) = 4$$

（ⅲ）周期 6 の円順列について



$$T(6) = {}_6C_3 - T(2) = 20 - 2 = 18$$

（ⅳ）周期 12 の円順列について

$$T(12) = {}_{12}C_6 - T(2) - T(4) - T(6) = 924 - 24 = 900$$

（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）（ⅳ）より

$$\frac{T(2)}{2} + \frac{T(4)}{4} + \frac{T(6)}{6} + \frac{T(12)}{12} = \frac{2}{2} + \frac{4}{4} + \frac{18}{6} + \frac{900}{12} = 1 + 1 + 3 + 75 = 80$$

Episode5 巡回群とコーシー・フロベニウスの定理

重複円順列問題の解法に「コーシー・フロベニウスの定理」（バーンサイドの補題）を活用する方法があるが、群論を用いるので、高校数学範囲外にはなるが、検算するに用いると良い。
「コーシー・フロベニウスの定理」（バーンサイドの補題）とは、
集合M（円順列の配列）をG-軌道により類別したときの同値類の数は

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\lfloor M_g\rceil$$

M_g:「操作g」を行っても重複を無視した不動点の数

Episode1 を解いてみる。円順列を反時計方向に 60° 回転する操作をρすると、

$$G=\{e,\rho,\rho^2,\rho^3,\rho^4,\rho^5\}$$

とおくと、6 回回転すると初めて元の配列に戻るので、$\rho^6=e$　となり、
G は位数 6 の巡回群を形成する。ただし、eは、恒等変換を表す。

$$|G|=6$$

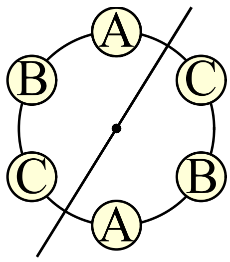
これを位数 6 は素数ではないので、巡回群$G=\{e,\rho,\rho^2,\rho^3,\rho^4,\rho^5\}$は部分巡回群を持つ

$$\rho^6=e$$

これを位数 1,2,3,6 の部分巡回群を持つが、3 種類の A,B,C が 2 個持つので、1,2 を位数にもつ部分巡回群は持たない。M_gは G の変換による不動点の数を表す。

（ｉ）位数 3 のとき　3 回回転すると元の配列に戻るので、$\rho^3=e$

$$g=\{e,\rho,\rho^2\}$$



このとき不動点の配置方法は、例えば、右図の様に
左上半分扇形 1 片に A,B,C の順列が決定されるので、

$$|M_g|=3!=6$$

（ｉ）位数 6 のとき、6 回回転すると元の配列に戻るので、$\rho^6=e$

$$g=\{e,\rho,\rho^2,\rho^3,\rho^4,\rho^5\}$$

このとき不動点の配置方法は、$|M_g|={}_6C_2\times{}_4C_2=30\times 9=90$
「コーシー・フロベニウスの定理より

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\lfloor M_g\rceil=\frac{6+90}{6}=16$$

Episode4 を解いてみる。

$$G=\{e,\rho,\rho^2,\rho^3,\rho^4,\rho^5,\rho^6,\rho^7,\rho^8,\rho^9,\rho^{10},\rho^{11}\}$$

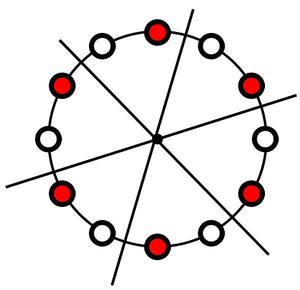
$$|G|=12$$

G の部分巡回群の位数は、2 色に塗り分けるので 12 の約数のなかで、偶数となるので、
2,4,6,8,10,12 となる。

（ｉ）位数 2 のとき 2 回回転すると元の配列に戻るので、$\rho^2=e$

$$g=\{e,\rho\}$$

このとき不動点の配置方法は、$|M_g|=2!=2$

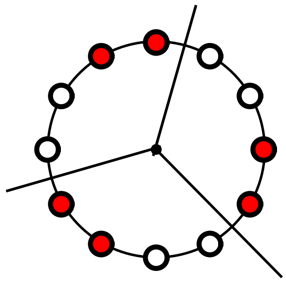


（ｉ）位数 4 のとき、4 回回転すると元の配列に戻るので、$\rho^4 = e$

$$g = \{e, \rho, \rho^2, \rho^3\}$$

右図の扇形 1 片の円弧上の 4 点を決定すれば良い。

このとき不動点の配置方法は、$|M_g| = {}_4C_2 = 6$

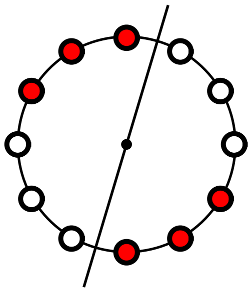


（ｉ）位数 6 のとき、6 回回転すると元の配列に戻るので、$\rho^6 = e$

$$g = \{e, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5\}$$

右図の扇形 1 片の円弧上の 6 点を決定すれば、良い。

このとき不動点の配置方法は、$|M_g| = {}_6C_3 = 20$



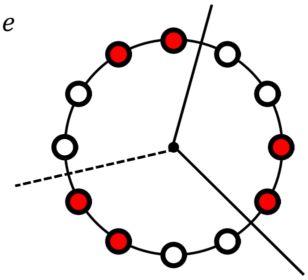
（ｉ）位数 8 のとき、8 回回転すると元の配列に戻るので、$\rho^8 = e$

$$g = \{e, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6, \rho^7\}$$

右図の実線で囲まれた扇形 1 片の円弧上の 8 点を自由に決定しても、元の配列に戻るとは、限らない。

このとき不動点の配置方法は、位数 4 の配置法と同じになる。

$$|M_g| = 6$$



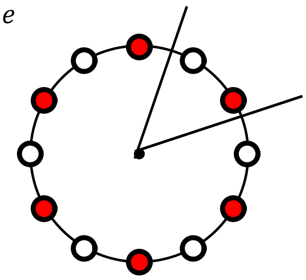
（ｉ）位数 10 のとき、10 回回転すると元の配列に戻るので、$\rho^{10} = e$

$$g = \{e, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6, \rho^7, \rho^8, \rho^9\}$$

扇形 1 片の円弧上の 10 点を自由に決定しも、元の配列に戻るとは限らない。

このとき不動点の配置方法は、位数 2 の配置法と同じになる。

$$|M_g| = 2$$



（ｉ）位数 12 のとき、12 回回転すると元の配列に戻るので、$\rho^{12} = e$

$$g = \{e, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6, \rho^7, \rho^8, \rho^9, \rho^{10}, \rho^{11}\}$$

円周上の 12 点を自由に配列しても、12 回回転すると、必ず元の配列に戻る。

このとき不動点の配置方法は、

$$|M_g| = {}_{12}C_6 = 924$$

以上より

「コーシー・フロベニウスの定理」（バーンサイドの補題）より

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \lfloor M_g \rfloor = \frac{2+6+20+6+2+924}{12} = \frac{960}{12} = 80$$

周期解決方法と同じ答えが得られた。

【終わり】