数学実践研究会レポート

「図を使うことの有効性について」

2003．11．29

札幌月寒高等学校　　長谷川　責

問題を考えるとき，グラフを利用するとか図に描いてみる方法はとても大切です。今回も，条件として与えられたものを，数式を変形して解こうとしたところ，イメージが浮かばなくて同じところを堂々巡りしていました。ところが，グラフを描いたところ，何処が分かりにくかったかよく分かりました。その点についてまとめます。

【間】a．b，c は実数で $a≧0$，$b≧0$ とする。

$p(x)=ax^2+bx+c$,　　$q(x)=cx^2+bx+a$

とおく。$-1≦x≦1$ をみたすすべての x に対して $|p(x)|≦1$ が成り立つとき

$-1≦x≦1$

をみたすすべての x に対して $|q(x)|≦2$ が成り立つことを示せ。

(1995 年，京都大学・理系学部・後期日程)

この問題は条件が多すぎるため本質を見落としてしまう受験生が多かったと思われます。ここで大切なことは,

$-1≦f(1)≦1$．$-1≦f(0)≦1$，$-1≦f(-1)≦1$

より

$-1≦a+b+c≦1$，$-1≦c≦1$．$-1≦a-b+c≦1$

という条件が作られます。たったこれだけで証明ができます。

$q(x)=cx^2+bx+a$を微分して$q'(x)=2cx+b=0$ から軸は$x=-b/2c$これをx_1とおく。

（ｉ）$x_1≦-1$ または$x_1≧1$ のとき

$q(x)$は$-1≦x≦1$ で単調増加または単調減少より$-1≦x≦1$ をみたすすべての x に対して $|q(x)|≦1$ が成り立つから$-1≦x≦1$ をみたすすべての x に対して $|q(x)|≦2$ が成り立つ。(図より明らか)

（ii）$-1<x_1<1$ のとき

頂点を(x_1, y_1)とおく。このとき$\min\{|1-x_1|, |x_1-1|\}≦1$ より

$\min\{|x_1-(a+b+c)|, |x_1-(a-b+c)|\}≦|c|≦1$

また．$\max\{|a+b+c|, |a-b+c|\}≦1$ より

$\max\{|c|+|a+b+c|, |c|+|a-b+c|\}≦2$

よって$-1≦x≦1$ をみたすすべての x に対して $|q(x)|≦2$ が成り立つ

つまり，条件 $a≧0$．$b≧0$ はなくても良いと言うことになります。しかし，この条件を意識しすぎて，解き方を間違えた人がいたと思います。

私の勘違いについて

$|p(x)|≦1$，$a≧0$，$b≧0$ より

$-1≦p(-1)=a-b+c≦1$，$-1≦p(0)=c≦1$．$-1≦p(1)=a+b+c≦1$

この条件から $q(x)$の頂点の座標をαとおくと，α$=-b/2c$ より

$$q\left(-\frac{b}{2c}\right)=-\frac{b^2}{4c}+a>2$$

から矛盾を導き出そうとしたが，うまくいきませんでした。

やはり，この問題は図形に頼るのが一番でしょう。