第６６回北数教数学実践教育研究会

兼　第１４回数実研”夏期セミナー”

レポート

「大学と高校の数学の間」

２００８、８，９

会場「小樽桜陽高等学校」

清水高等学校　長谷川貢

平成１８年度　東北大学大学院　理学研究科数学専攻入学試験問題

数学－共通問題

1　関数 $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ において２回微分可能で，すべての x に対し $f''(x) > 0$ を満たすものとする。さらに，$f(x)$ はある１点 a において最小値を取るものと仮定する。また、非負定数 λ に対して

$$F_\lambda(x) = \lambda f(x) + x^2 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

とおく。このとき，以下を証明せよ。

（ｉ）各 $\lambda \geqq 0$ に対し，$F_\lambda(x)$ はある１点 x_λ でのみ最小値をとる。

（ⅱ）$\lambda \to \infty$ のとき，x_λ は a に収束する。

（証明）

（ｉ）　$F_\lambda(x) = \lambda f(x) + x^2$　より

$F'_\lambda(x) = \lambda f'(x) + 2x$ ････①

$F''_\lambda(x) = \lambda f''(x) + 2$ ････②　　とおく。

また，仮定より，$f(x)$ はある１点 a において最小値を取るから，

$f'(a) = 0$

$f'(x) < 0 \qquad (x < a)$

$f'(x) > 0 \qquad (x > a)$

となる。

次に，$F_\lambda(x)$ の増減を調べる。

（あ）　$a > 0$ のとき

x		0		a	
$F'_\lambda(x) = \lambda f'(x) + 2x$	$-$	$\lambda f'(x)$		$2a$	$+$
$F_\lambda(x) = \lambda f(x) + x^2$	↘	$F_\lambda(0)$		$F_\lambda(a)$	↗

増減表より、$F'_\lambda(x) =$ は連続であり、$x < 0$ のとき $F'_\lambda(x) < 0$ かつ $x > a$ のとき $F'_\lambda(x) > 0$ であるから $F'_\lambda(x)$ は区間 $(0, a)$ で少なくとも１つの解をもつ。よって、$F_\lambda(x)$ は区間 $(0, a)$ で少なくとも１つの極小値をもつから、$F_\lambda(x)$ は区間 $(0, a)$ で少なくとも１つの最小値をもつことが分かる。

次に，区間 $(0, a)$ に $F_\lambda(x)$ が最小値を取る点が２点あると仮定する。それを x_1，x_2 とする。つまり、$F'_\lambda(x_1) = 0$，$F'_\lambda(x_2) = 0$ とする。これより平均値の定理から次のような t（$x_1 < t < x_2$）が存在する。

$F''_\lambda(t) = 0$

ところが条件より、$F''_\lambda(x) = \lambda f''(x) + 2 > 2$　（$\lambda > 0$，$f''(x) > 0$ より）

よって、矛盾である。

これより，区間 $(0, a)$ に $F_\lambda(x)$ が最小値を取る点が１点だけであることが示された。

この点のｘ座標をｘλとする。これをまとめると.、

各$\lambda \geqq 0$に対し，Ｆλ（ｘ）はある１点ｘλでのみ最小値をとることが示された。

（い）　　ａ＜０のとき　（あ）と同様に示すことが出来る。

（う）　　ａ＝０のとき，ｘλ＝０となるから、自明である。

$\boxed{\text{完}}$

（ⅱ）　$F'_\lambda(x_\lambda)=0$より

$F'_\lambda(x_\lambda)=\lambda f'(x_\lambda)+2x_\lambda=0$より

$\lambda f'(x_\lambda)=2x_\lambda$よって

$$f'(x_\lambda)=-\frac{x_\lambda}{\lambda}$$

よって，$\lambda\to\infty$とすると，

$$\lim_{\lambda\to\infty}-\frac{x_\lambda}{\lambda}=0 \quad \text{より} \quad \lim_{\lambda\to\infty}f'(x_\lambda)=0$$

よって　$f'(x)=0$の解は$x=a$ただ一つであるから

$$\lim_{\lambda\to\infty}x_\lambda=a \quad \text{である。}$$

これより、$\lambda\to\infty$のとき，ｘλはａに収束することが示された。

$\boxed{\text{完}}$

$\boxed{2}$　次の設問に答えよ。

（ｉ）　級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$が収束することを証明せよ。

（ⅱ）上の級数との差を考えることによって，関数項級数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n+\sin nx}$$

が区間（－∞，∞）おいて一様収束することを証明せよ。

（証明）

（ｉ）　$\cos n\pi=(-1)^{n-1}$……①より

$$I_{2m}=\sum_{n=1}^{2m}\frac{\cos n\pi}{n} \quad \text{とおく。}$$ 　これを具体的に書くと

$$I_{2m}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m}=-\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right) \quad \cdots②$$

上の②式を数学的帰納法により示す。

（Ⅰ）ｍ＝１のとき

$$\text{左辺}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\quad,\ \text{右辺}=\frac{1}{2\times 1}=\frac{1}{2}$$

よって，左辺＝右辺となりｍ＝１のときは成り立つ 。

（Ⅱ）ｍ＝ｋのとき成り立つと仮定する。つまり

$$I_{2k}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}=-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)$$

ｍ＝ｋ＋１のとき

$$I_{2k+1}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k}$$

$$=-\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

$$=-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}\right)$$

よって，ｍ＝ｋ＋１のときも成り立つ。よって（Ⅰ）（Ⅱ）より、全てのｍについて②が成り立つ。
これより、この問題に戻る。

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}\quad \text{とおく。}$$

$$I=\lim_{m\to\infty} I_m\quad \text{より}$$

$$\lim_{m\to\infty} I_{2m}=\lim_{m\to\infty}\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m}\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}-\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)$$

$$=-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=-\left[\log(1+x)\right]_0^1=-\log 2$$

よって， $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n+\sin nx}$ **は$-\log 2$に収束することが示された。**

$\boxed{\text{完}}$

$$\frac{\cos n\pi}{n}-\frac{\cos n\pi}{n+\sin nx}=\frac{\cos n\pi\cdot\sin nx}{n(n+\sin nx)}\quad \text{より}$$

$$\left|\frac{\cos n\pi}{n}-\frac{\cos n\pi}{n+\sin nx}\right|=\left|\frac{\cos n\pi\cdot\sin nx}{n(n+\sin nx)}\right|\leqq\frac{1}{n(n-1)}\quad\cdots\text{（あ）}$$

よって， $\displaystyle f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n+\sin nx}$ **とおく。**

$$f_m(x)=\sum_{n=2}^{m}\frac{\cos n\pi}{n+\sin nx}$$ とおく。

これより，$f_m(x)$ が $f(x)$ に一様収束するということは，任意の $\varepsilon>0$ に対して x に関係なくある正の整数Nが存在して、$n\geqq N$ を満たす全ての n に対して $|f(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ が成り立つことを示せばよいから、（あ）より

$$\left|\sum_{n=k}^{m}\frac{\cos n\pi}{n}-\sum_{n=k}^{m}\frac{\cos n\pi}{n+\sin nx}\right|\leqq\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{m}$$ より

$$|(I-I_m)-\{f(x)-f_m(x)\}|$$

$$=\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}-\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n+\sin nx}\right|\leqq\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{\infty}=\frac{1}{m}$$

これより，**任意の** $\frac{\varepsilon}{2}>0$ に対して次の条件を満たすMが存在して、

$m\geqq M\geqq\frac{2}{\varepsilon}$ を満たす全てのmに対して、$|(I-I_m)-\{f(x)-f_m(x)\}|\leqq\frac{1}{m}\leqq\frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ。

また，$|(I-I_m)-\{f(x)-f_m(x)\}|\geqq|f(x)-f_m(x)|-|I-I_m|$ が成り立つ。

そして，（ｉ）より，Ｉｍ がＩに収束するか

任意の $\frac{\varepsilon}{2}>0$ に対してあるＫが存在して、$k\geqq K$ を満たす全ての k に対して

$|I-I_k|\leqq\frac{\varepsilon}{2}$ **が成り立つ。**

ここで，$|I-I_m|=J_m$，$|f(x)-f_m(x)|=h_m(x)$ とおくと，

よって，$|(I-I_m)-\{f(x)-f_m(x)\}|\geqq h_m(x)-J_m$

これより，$|(I-I_m)-\{f(x)-f_m(x)\}|+J_m\geqq h_m(x)$ より

$N=\max(M,K)$ とおくと、$n\geqq N$ を満たす全ての n に対して

$$h_n(x)\leqq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

また、$h_n(x)=|f(x)-f_n(x)|\leqq\varepsilon$ かつ ε は任意の正の数より

$f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束する。

完

3　n 次実正方行列Ａに対し，その転置行列を ${}^tA$ で表し，${}^tAA$ を $|A|^2$ と表す。さらに

$$\mathrm{Re}A=\frac{1}{2}(A+{}^tA),\quad \mathrm{Im}A=\frac{1}{2}(A-{}^tA),\quad N(A)=|A|^2-|\mathrm{Im}A|^2$$

$$[\mathrm{Re}A,\ \mathrm{Im}A]=(\mathrm{Re}A)(\mathrm{Im}A)-(\mathrm{Im}A)(\mathrm{Re}A)$$

と定める。Oは n 次零行列を表すものとする。このとき、次を証明せよ。

（ｉ）等式｜Ａ｜^{2}＝｜ＲｅＡ｜^{2}＋｜ＩｍＡ｜^{2}＋〔ＲｅＡ，ＩｍＡ〕が成り立つ。
（ⅱ）Ａが対称行列であることと，Ｎ（Ａ）＝｜Ａ｜^{2}であることは同値である。
（ⅲ）Ａが歪対称行列（交代行列）であることと，Ｎ（Ａ）＝Ｏであることは同値である。

【証明】
（ｉ）$^t({}^tA)=A$より

$$|\mathrm{Re}A|^2+|\mathrm{Im}A|^2+[\mathrm{Re}A,\ \mathrm{Im}A]$$

$$=\frac{1}{4}(A+{}^tA)({}^tA+A)+\frac{1}{4}({}^tA-A)(A-{}^tA)+\frac{1}{4}(A+{}^tA)(A-{}^tA)+\frac{1}{4}(A-{}^tA)(A+{}^tA)$$

$$=\frac{1}{4}(A\,{}^tA+AA+{}^tA\,{}^tA+{}^tAA)+\frac{1}{4}({}^tAA-{}^tA\,{}^tA-AA+A\,{}^tA)$$

$$+\frac{1}{4}(AA-A\,{}^tA+{}^tAA-{}^tA\,{}^tA)-\frac{1}{4}(AA+A\,{}^tA-{}^tAA-{}^tA\,{}^tA)$$

$$=\frac{1}{4}\times 4\,{}^tAA={}^tAA=|A|^2$$

完

（ⅱ）
→　Ａが対称行列より，　$^tA=A$　よって，$\mathrm{Im}A=\frac{1}{2}(A-{}^tA)=\frac{1}{2}(A-A)=O$

よって，$N(A)=|A|^2-|\mathrm{Im}A|^2=|A|^2-|O|^2=|A|^2$

←　$N(A)=|A|^2$　より，$|\mathrm{I_m}A|^2=O$，よって$\frac{1}{2}(A-{}^tA)=O$，より$A={}^tA$

完

（ⅲ）Ａが歪対称行列（交代行列）であるから、行列Ａは，$^tA=-A$を満たす。
→　$^tA=-A$より

$$N(A)=|A|^2-|\mathrm{Im}A|^2={}^tAA-\frac{1}{4}({}^tA-A)(A-{}^tA)$$

$$=-AA-\frac{1}{4}(-A-A)(A+A)=-AA+\frac{4}{4}AA=O$$

よって，Ｎ（Ａ）＝Ｏが示された。
←　行列Ａを成分で表すとする。

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$${}^tA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

よって，$N(A)=|A|^2-|\mathrm{Im}A|^2={}^tAA-\frac{1}{4}({}^tA-A)(A-{}^tA)$

$$={}^tAA-\frac{1}{4}({}^tAA-{}^tA{}^tA-AA+A{}^tA)=\frac{1}{4}(3{}^tAA+{}^tA{}^tA+AA-A{}^tA)=O$$

これより，上の行列式のｉｊ成分について調べる。

$$3\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{jk}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}-\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=0$$

これを３個に分けると

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}(a_{kj}+a_{jk})+2\sum_{k=1}^{n}a_{kj}(a_{ki}+a_{ik})-\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(a_{kj}+a_{jk})=O$$

がすべてのa_{ij}について成り立つから，

$a_{ij}+a_{ji}=0$より正方行列Ａは${}^tA=-A$となることが示された。

これで、Ａが歪対称行列（交代行列）であることと，Ｎ（Ａ）＝Ｏであることは同値であることが証明された。　$\boxed{完}$

$\boxed{4}$　集合Ａから集合Ｂへの写像ｆ：Ａ→Ｂが与えられたとき、Ｂの部分集合Ｃに対し，そのｆによる逆像を$f^{-1}(C)=\{x\in A \mid f(x)\in C\}$と定義する。次の命題が正しければ証明し，正しくなければ反例（写像ｆと部分集合Ｃを具体的に与えること）を１つ挙げよ。

（ⅰ）任意のＢの部分集合Ｃに対して，$f(f^{-1}(C))\subset C$が成り立つ。

（ⅱ）任意のＢの部分集合Ｃに対して，$f(f^{-1}(C))=C$が成り立つ。

（ⅲ）ｆが全射であるとき，任意のＢの部分集合Ｃに対して，$f(f^{-1}(C))=C$が成り立つ。

【解答】

（ⅰ）正しいから証明する。

任意の$x\in f^{-1}(C)$を取ると、$f(x)\in C$より$f(f^{-1}(C))\subset C$が成り立つ。

（ⅱ）正しくないから反例を示す。

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{6, 7, 8, 9, 10\}$とし、

$f(1)=6$，$f(2)=6$，$f(3)=7$，$f(4)=8$，$f(5)=9$とする。

$C=\{8, 9, 10\}$とすると、$f^{-1}(C)=\{4, 5\}$より

$f(f^{-1}(C))\{8, 9\}\neq C$となる。

（ⅲ）　正しいから証明する。

ｆが全射であるから、任意の$c\in C$に対してある$a\in A$が存在して、$f(a)=c$が成り立つ。

よって、任意の$c\in C$は$c\in f(f^{-1}(C))$であるから，$f(f^{-1}(C))\supset C$

よって（ⅰ）より$f(f^{-1}(C))\subset C$が成り立つから、それらを合わせると

$f(f^{-1}(C))=C$が成り立つ。　$\boxed{完}$

今回の内容は、微積分、級数、行列、集合の４問です。

レベルとしては、大学教養部程度と考えられます。

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$はそれなりの解答ができあがったと思っています。しかし$\boxed{4}$はなんだか屁理屈のような気がしてなりません。「数学」とはこんなものでしょうか。