# 第６９回　数学実践研究会レポート

日時　　　　　２００９年6月１３日

場所　　　　　北海道大学

札幌平岡高等学校　教諭
長谷川　貢

今回は、２題を解いてみました。

　１問目は、私の子どもが受けている授業で出された中から、以前この話題を扱った東大の入試問題と同じ内容であったことも重なって、取り上げました。内容は対照群に関する問題と考えています。

　２問目は、今年度の東大の入試問題です。内容は二項係数に関する問題です。

　２問とも、整数に関する問題です。

　このように、整数に関する問題はいろいろあります。

　楽しんでください。

問8．12．積まれた2n枚のカードに対して次の操作を行うことを完全シャッフルということにする。

カードを，下n枚と上n枚の二つの山に分ける。次に下の山の1枚目のカードが新しい1枚目，上の山の1枚目が新しい2枚目とし，以下二つの山からカードを交互に混ぜ合わせていく。

2n枚のカードは，完全シャッフルを何回（≧1）か繰り返すともとの状態に戻ることを示せ。

n x 26では最低何回でもとの状態に戻るか？

【解】2n枚のカードを1列に並べる並べ方は全部で(2n)!通りより，完全シャッフルを(2n)! O 1回行うと，その中にカードが同じ並び方になるのは少なくとも1組はある。その1組ををk回目と(k O m)回目とする。そのときの並び方を($k_1$ , $k_2$ , $k_3$ , … , $k_{2n}$ )とする。よって$k_1$ x 1 , $k_2$ x 2, $k_3$ x 3 , … , $k_{2n}$ x 2n とすれば、完全シャッフルをm回行えば，もとの状態に戻る。

完

2n x 26のとき、

2のカードが何番目に移るか図示する。

2 ! 3 ! 5 ! 9 ! 17 ! 8 ! 15 ! 4 ! 7 ! 13 ! 25 ! 24 ! 22 ! 18 ! 10 ! 19 ! 12 ! 23 ! 20 ! 14 ! 2

6のカードが何番目に移るか図示する。

6 ! 11 ! 21 ! 16 ! 6

1のカードおよび16のカードが何番目に移るか図示する。

1 ! 1 , 26 ! 26

よって、2のカードのときは、20回の完全シャッフルで2 , 3 , 5 , 9 ,17 , 8 , 15 , 4 , 7 , 13 , 25 , 24 , 22 , 18 , 10 , 19 , 12 , 23 , 20 , 14 のカードがもとの場所に戻ることが分かる。また6のカードのときは4回の完全シャッフルで6 , 11 , 21 , 16のカードがもとの場所に戻ることが分かる。また、1のカードも26のカードも完全シャッフルでは場所を変えないから，1と4と20の最小公倍数である20回でもとの状態に戻ることが分かった。

答　20回

第　　　1　　　問

自然数$m \geqq 2$に対し，$m-1$個の二項係数

$${}_mC_1, {}_mC_2, \cdots, {}_mC_{m-1}$$

を考え，これらすべての最大公約数を$d_m$とする。すなわち$d_m$は

これらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) $m$が素数ならば，$d_m=m$であることを示せ。

(2) すべての自然数$k$に対し，$k^m-k$が$d_m$で割り切れることを，

$k$に関する数学的帰納法によって示せ。

(3) $m$が偶数のとき$d_m$は1または2であることを示せ。

【解】(1) ${}_mC_1=m$ (素数)

$${}_mC_k=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}=m\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

$=mz$ ($z$は整数…$\frac{m}{k!}$は既約分数，${}_mC_k$は整数より)

よって、$d_m=m$である。　　　　　　完

(2) 数学的帰納法にて示す。

(Ⅰ) $k=1$のとき　$1^m-1=0$より成り立つ。

$k=2$のとき，$2^m-2=(1+1)^m-2={}_mC_1+{}_mC_2+\cdots+{}_mC_{m-1}$

よって、$d_m$の定義より，成り立つ。

(Ⅱ) $k=n$のとき$n^m-n$が$d_m$で割り切れると仮定する。

$k=n+1$のとき $(n+1)^k-(n+1)$

$=n^k+{}_kC_1n^{k-1}+{}_kC_2n^{k-2}+\cdots+{}_kC_{k-1}n+1-n-1$

$=(n^k-n)+({}_kC_1n^{k-1}+{}_kC_2n^{k-2}+\cdots+{}_kC_{k-1}n)$

また，仮定より$n^k-n$は$d_m$で割り切れる。

また定義より${}_kC_i$ ($1\leqq i\leqq k-1$)は$d_m$で割り切れる。

よって，$(n+1)^k-(n+1)$は$d_m$で割り切れるから，　$k=n+1$のときも成り立つ。

より(Ⅰ)(Ⅱ)より、すべての自然数$k$に対し，$k^m-k$が$d_m$で割り切れることが示された。

完

(3)

(ⅰ) $m=2^n$のとき ${}_{2^n}C_1=2^n$,

また，${}_mC_u$ ($u=p2^q$, $1\leqq p2^q\leqq 2^{n-1}$)のとき

$_mC_u = {}_{2^n}C_{p2^q} = \dfrac{2^n(2^n-1)(2^n-2)\cdots(2^n-p2^q+1)}{p2^q(p2^q-1)(p2^q-2)\cdots2\cdot1} = v2^{n-q}$ (vは奇数)

よって, $p=1$, $q=n-1$のとき$_mC_u=2v$ , $q<2^{n-1}$のとき$_mC_u=v2^{n-q+1}$

よって, $d_m=2$である。

(ii) $m=a^bc2^d$ (ただし, aは奇数の素数, b,dは正の整数, cは奇数)とする。

$${}_{a^bc2^d}C_{2^d} = \frac{a^bc2^d(a^bc2^d-1)(a^bc2^d-2)\cdots\{(a^bc-1)2^d+2\}\{(a^bc-1)2^d+1\}}{2^d(2^d-1)(2^d-2)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

$$= \frac{a^bc2^d(a^bc2^d-1)(a^bc2^d-2)\cdots\{(a^bc-1)2^d+2\}\{(a^bc-1)2^d+1\}}{2^d\cdot1\cdot2\cdot3\cdots(2^d-2)(2^d-1)}$$

ここで分子と分母の$2^f$を考えると, 分母が$g2^f$ $(f<d)$のとき, それに対応して $a^bc2^d-g2^f=2^f(a^bc2^{d-f}-g)$であるから、ここは約分できて$\dfrac{a^bc2^{d-f}-g}{g}$は分数となり、分子も分母も奇数となる。(ただし、約分できるかもしれない。)

これより, ${}_{a^bc2^d}C_{2^d}$は奇数の自然数である。

$${}_{a^bc2^d}C_{a^b} = \frac{a^bc2^d(a^bc2^d-1)(a^bc2^d-2)\cdots\{(c2^d-1)a^b+2\}\{(c2^d-1)a^b+1\}}{a^b(a^b-1)(a^b-2)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

$$= \frac{a^bc2^d(a^bc2^d-1)(a^bc2^d-2)\cdots\{(c2^d-1)a^b+2\}\{(c2^d-1)a^b+1\}}{a^b\cdot1\cdot2\cdot3\cdots(a^b-2)(a^b-1)}$$

ここで, 分子と分母にあるaの累乗を考える。

分母が$xa^y$ (ただし$xa^y \leqq a^b$ , x,aは正の整数かつxとaは互いに素とする。)

また、$xa^y$に対しては分母の$a^bc2^d-xa^y=a^y(a^bc2^{d-y}-x)$となるから

$\dfrac{a^bc2^d-xa^y}{xa^y} = \dfrac{a^y(a^bc2^{d-y}-x)}{xa^y} = \dfrac{a^bc2^{d-y}-x}{x}$ (分子はaと互いに素である。)

よって$\dfrac{a^bc2^d(a^bc2^d-1)(a^bc2^d-2)\cdots\{(c2^d-1)a^b+2\}\{(c2^d-1)a^b+1\}}{a^b\cdot1\cdot2\cdot3\cdots(a^b-2)(a^b-1)}$…①

は整数であって, aとは互いに素である。これよりmを素因数分解したとき, 次のように表されたとする。$m=a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_x^{b_x}2^d$とし、$a_k^{b_k}=c_k$とおく。

①より${}_{c_1c_2\cdots c_x2^d}C_{c_k}$は整数であって, $a_k$と互いに素である。よって$k=1, 2,3,\cdots,x$は

$a_1,a_2,\cdots,a_x$と互いに素であるからこれらのすべての公約数と$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_x^{b_x}2^d$の公約数は$2^d$である。よって${}_{a^bc2^d}C_{2^d}$と$2^d$は互いに素であるから, $d_m=1$である。

よって、mが偶数のとき$d_m$は1または2であることが示された。

完