ところが$\alpha(n_1-1)<1$より$\alpha(n_1-1)-1<0$より矛盾。よって

$\langle \alpha n_1\rangle<\alpha$ これより$\langle \alpha n_1\rangle=\alpha_1$とおく。同様に$n_2$を

$\alpha_1(n_2-1)<1, 1<\alpha_1 n_2$を満たす自然数とする。すると前回と同様に

$\langle \alpha_1 n_2\rangle<\alpha_1$ これより順番に$\alpha_k, n_k, \alpha_{k+1}, n_{k+1}$を同様に定めていく。

この結果として、単調減少な数列$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$が作られる。

また、仮定より, $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\cdots>\alpha_n>\cdots>b$ より

$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=b$となり, (1)に矛盾する。

よって ある自然数nで $\langle \alpha n\rangle<b$を満たすものが存在する。

(3) $b<\alpha<2b$を満たすbが存在したと仮定する。すると、(2)よりある自然数n_1で

$\langle \alpha n_1\rangle<b$を満たすものが存在する。この$\alpha n_1$を$\alpha_2$とおく。つまり$\alpha n_1=\alpha_1$とおく。

同様にb_1を$b_1\in(0, 1/2]\setminus A$かつ $b_1<\alpha_1<2b_1$を満たすとする。$\alpha_1\in A$より

これを繰り返すことにより$b_n<b/2^n$, これがすべての自然数nについて成り立つから

$\inf A=0$となる。　　　完

問題28 の解答

$(1/2\pi)=\alpha$とおく。$\cos(2\pi\times n\alpha)=\cos n$ となる。

問題27より$b=0.1$とおくと、$0.1<\alpha<0.2$

よって $\inf A=0$より $\sup \cos n=1$となる。

また、nを$(n-1)\alpha<\frac{1}{2}, n\alpha>\frac{1}{2}$を満たす最小の

自然数とする。($n=3$ となる。)

$\beta=n\alpha-0.5$, とおく。すると $\inf\langle\beta n\rangle=0$より

$\inf\langle(\alpha-0.5)n\rangle=0$ よって

$\inf \cos n=-1$となる。