北数教”第68回数学教育実践研究会” レポート

清水高校　長谷川貢

2009, 1, 31　ニッセイMKビル

題 「宿題の答(supとinf等)」

今回は, 大学で宿題で提出された問題の答を、それなりに作ってみましたので発表することにしました。以前、大学で解いたことのある問題ですから。懐かしく思われる人も多数いると考えます。昔を懐かしんで下さい。

問題27　非負の実数 x の小数部分 $\langle x \rangle \in [0, 1)$ を $\langle x \rangle = x - [x]$ で定める。

ただし、$[x]$は $p \leqq x$ を満たす最大の整数 p を表す(Gauss の記号) 。

$\alpha \in (0, 1) \setminus \mathrm{Q}$ に対して, 集合$\mathrm{A} \subset [0, 1)$を

$\mathrm{A} = \{ \langle \alpha n \rangle \mid n \in \mathrm{N} \}$ で定める。

(1) $\alpha \in \mathrm{A}$, $n \in \mathrm{N}$ のとき , $\langle \alpha n \rangle \in \mathrm{A}$ であることを示せ。

(2) $\alpha \in \mathrm{A}$, $b \in (0, 1/2] \setminus \mathrm{A}$ とする。$b < a < 2b$ ならば , $\langle \alpha n \rangle < b$ を

満たす$n \in \mathrm{N}$が存在することを示せ。

(3) $\inf \mathrm{A} = 0$ を示せ。

問題28　集合　$\mathrm{A} = \{ \cos n \mid n \in \mathrm{N} \}$ に対して , $\sup \mathrm{A} = 1$ と $\inf \mathrm{A} = -1$ を示せ。

問題27　の解答

(1) $\alpha \notin \mathrm{Q}$ より　$\alpha n \notin \mathrm{Q}$ よって $\langle \alpha n \rangle \in \mathrm{A}$

(2) $b < \alpha < 2b$ より, 全ての自然数 n に対して $b < \langle \alpha n \rangle$と仮定する。

ここで n_1 を次のように定める。

$\alpha (n_1 - 1) < 1$, $1 < \alpha n_1$ を満たす自然数とする。

仮定より, $b < \langle \alpha n_1 \rangle$ また, $\langle \alpha n_1 \rangle < \alpha$ を示す。

$\langle \alpha n_1 \rangle > \alpha$ と仮定すると、$\langle \alpha n_1 \rangle = \alpha n_1 - 1 > 0$ より

$\langle \alpha n_1 \rangle - \alpha = \alpha n_1 - 1 - \alpha = \alpha (n_1 - 1) - 1 > 0$となる。