第７２回数実研レポート

留数を用いた級数の和の求め方

２０１０．２．６．ニッセイＭＫビル

札幌平岡高校　　長谷川　貢

級数の和の求め方

長谷川　貢

級数の和は、数学Ⅲの科目で初めて目にする不思議な計算であるが、その方法は数学Bで学習した数列の和の公式を直接使うことのできる方法と、数学Ⅲで学習する区分求積法の２種類に限られる。しかし、それらの方法を使うことのできない問題も数多くある。

今回は留数を用いた方法について考察する。そのために必要な道具から始める。

「岩波講座　応用数学　複素関数論Ⅱ　森　正武　　杉浦正顕　著」を参考にした。

定義７．２　$f(z)$ が $0<|z-a|<R$ で正則であり、そこで

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad (7.1)$$

の形に Laurent 級数に展開されたとする。このとき、展開係数 c_{-1} を $f(z)$ の $z=a$ における**留数**という。

c_{-1} は $f(z)$ をCで囲んで積分した値に他ならない。

定義７．２　$f(z)$ が $0<|z-a|<R$ で正則なとき、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(\zeta)d\zeta \qquad (0<r<R)$$

を $f(z)$ の $z=a$ における留数という。

定理７．１　（留数定理）$f(z)$ は、単純閉曲線Cの内部で有限個の孤立特異点 a_1、a_2、…，a_m を持つが，それらを除けば周も含めてCの内部で正則であるとする。このとき

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f,\ \alpha_k)$$

無限遠点における留数

定義７．３　$f(z)$ は $R<|z|<\infty$ において正則で，Γ_r を $|z|=r$ $(R<r<\infty)$ なる正の向きの円周とするとき，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r^{-1}} f(z)dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} f(z)dz$$

を $f(z)$ の無限遠点における留数という。ただし、Γ_r^{-1} は Γ_r の向きを逆にした円周である。

定理７．２　単純閉曲線Cの外部にある有限個の点 a_k $(k=1,2,\cdots,m)$ および無限遠点∞を除いて，$f(z)$ はCの外部ではその周上を含めて正則であるとする。このとき，

$$\int_C f(z)dz=-2\pi i\left(\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(a_k,\ f)+\mathrm{Res}(\infty,\ f)\right)$$

（無限遠点における留数は，$\mathrm{Res}(f,\infty)$，$\mathrm{Res}(\infty,\ f)$ で表す。）

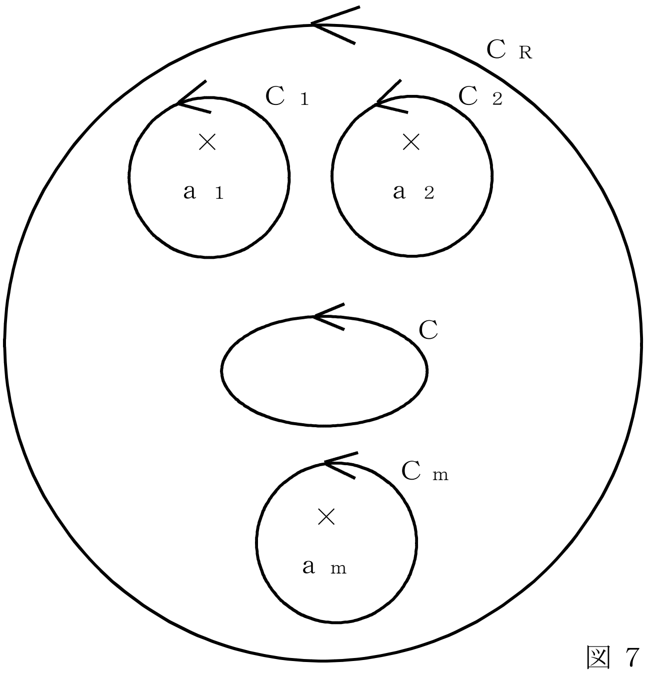


図７．１

証明】

$$\int_{C_R} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz+\cdots+\int_{C_m} f(z)dz+\int_{C} f(z)dz$$

より、C_Rに沿う積分は$-2\pi i\times$（無限遠点における留数）を与えるから，これからただちに上式を得る。

留数の計算法

$p(z)$，$q(z)$を$z=a$で正則かつ，$q(a)=0$，$q'(a)\neq 0$，$p(a)\neq 0$をみたす関数として，関数$f(z)$が$p(z)/q(z)$の形に表されるとする。このとき，$f(z)$は$z=a$に単純な極をもち

$$\lim_{z\to a}(z-a)\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(a)}{\displaystyle\lim_{z\to a}\frac{q(z)-q(a)}{z-a}}=\frac{p(a)}{q'(a)}$$

である。したがって，そこでの留数は

$$c_{-1}=\frac{p(a)}{q'(a)}$$

によって計算できる。

三角関数の留数

$$f(z)=\pi\cot\pi z=\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}$$

とする。このとき，$z=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ k,\ \cdots$は$f(z)$の留数の単純な極であり，

$$\lim_{z\to k}(z-k)\pi\cot\pi z=\lim_{z\to k}\frac{(z-k)\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\pi h\cos\pi(k+h)}{\sin\pi(k+h)}=\frac{\cos k\pi}{\cos k\pi}=1 \quad \text{（但し、} z=k+h \quad \text{とおいた）}$$

$$f(z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

とする。このとき，$z=0$，± 1，± 2，…，k，…は$f(z)$の留数の単純な極であり，そこでの留数は次のようになる。

$$c_{-1}=\frac{\pi}{\pi \cos k\pi}=(-1)^k$$ 　　　となる。

とする。このとき，$z=0$，± 1，± 2，…，k，…は$f(z)$の留数の単純な極であり，そこでの留数は

$$c_{-1}=\frac{\pi}{\frac{d}{dz}\sin \pi z}_{z=k}=\frac{\pi}{\pi \cos k\pi}=(-1)^k$$

となる。

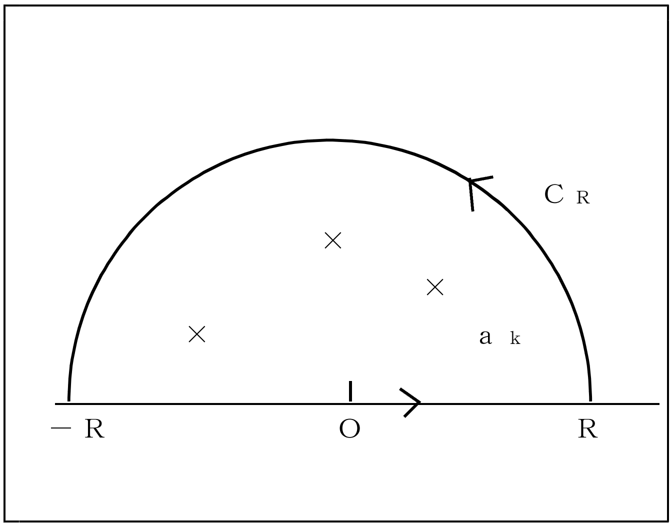
有理関数の無限区間における積分

$P(x)$はm次，$Q(x)$はn次の多項式で，$n \geqq m+2$かつ$Q(z)$は実の零点をもたないとする。このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\left(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},\ a_k\right)\right) \quad \cdots ①$$

ただし，a_k（$k=1, 2, \ldots, N$）は$P(z)/Q(z)$の上半平面にある極である。

証明】右の図のように積分路Cを考える。積分路Cは，実軸上の積分（$-R$，R）と原点を中心とする半径Rの半円周Γ_Rをつないだものである。ただし，極a_kはすべてCの内部に入るようにRは十分大きくとる。このとき，留数定理より



$$\int_{C}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx+\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz$$

$$=2\pi i\left(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},\ a_k\right)\right) \quad \cdots ②$$

となる。一方，仮定$n \geqq m+2$より，Rを十分大きくとればMをRによらないある定数として$\left| z^2 P(z)/Q(z) \right| \leqq M$が成り立つから

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| \leqq \int_{\Gamma_R}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right||dz|=\int_{\Gamma_R}\left|z^2\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\frac{1}{|z^2|}|dz|$$

$\leqq \dfrac{M}{R^2}\pi R = \dfrac{M\pi}{R} \to 0 \qquad (R\to\infty)$ したがって、②でR→∞とすれば、①を得る。

定理７．４　ｆ（ｚ）は有理関数で，分母の次数は分母の次数より２以上大きく，ｆ（ｚ）は整数の極をもたないとする。このとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{j} \mathrm{Res}(f\sigma_1, \zeta_j)$$ 但し、$f(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}$ である。

ただし，ζ_jはｆ（ｚ）のすべての極で，和はすべての極についてとる。

具体的な例題

次の和を求めなさい。

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} \qquad (a>0)$$

解】 $f(z)\sigma_1(z)=\dfrac{\pi\cos\pi z}{(z^2+a^2)\sin\pi z}$ とおく。

$f(z)\sigma_1(z)$の孤立特異点は，$\pm ai$，０，±１，±２，±３，…，±ｎ，…である。また，その点での留数を求める。

ｚ＝ａｉのとき

$$\lim_{z\to ai}\frac{(z-ai)\pi\cos\pi z}{(z-ai)(z+ai)\sin\pi z}=\frac{\pi}{2ai}\frac{2i}{e^{-\pi a}-e^{\pi a}}\frac{e^{-\pi a}+e^{\pi a}}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2a}\frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}$$

$$\lim_{z\to -ai}\frac{(z+ai)\pi\cos\pi z}{(z-ai)(z+ai)\sin\pi z}=\frac{\pi}{-2ai}\frac{2i}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}\frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2a}\frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}$$

$$\lim_{z\to k}\frac{\pi(z-k)\cos\pi z}{(z^2+a^2)\sin\pi z}=\frac{\pi\cos k\pi}{(k^2+a^2)\cos k\pi}=\frac{1}{k^2+a^2}$$

よって

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=-\left(\frac{\pi}{2a}\frac{1+e^{-2a\pi}}{1-e^{-2a\pi}}+\frac{\pi}{2a}\frac{1+e^{-2a\pi}}{1-e^{-2a\pi}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{a}\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1}$$ また，$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}+\frac{1}{a^2}$ より

答 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1}-\frac{1}{a^2}\right)$$

この式の a を 0 に近づける。　ここではロピタルの定理を用いて計算する。

$$\lim_{a\to 0}\left\{\frac{\pi(e^{2\pi a}+1)}{a(e^{2\pi a}-1)}-\frac{1}{a^2}\right\}=\lim_{a\to 0}\frac{\pi a(e^{2\pi a}+1)-(e^{2\pi a}-1)}{a^2(e^{2\pi a}-1)}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{\pi(e^{2\pi a}+1)+\pi a\times 2\pi e^{2\pi a}-2\pi e^{2\pi a}}{2a(e^{2\pi a}-1)+a^2\times 2\pi e^{2\pi a}}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{\pi e^{2\pi a}+\pi+2\pi^2 a e^{2\pi a}-2\pi e^{2\pi a}}{2ae2\pi a-2a+2\pi a^2 e^{2\pi a}}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{-2\pi^2 e^{2\pi a}+2\pi^2 e^{2\pi a}+4\pi^3 a e^{2\pi a}}{2e^{2\pi a}+4\pi a e^{2\pi a}-2+4\pi a e^{2\pi a}+4\pi^2 a^2 e^{2\pi a}}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{4\pi^3 a e^{2\pi a}}{2e^{2\pi a}+8\pi a e^{2\pi a}-2+4\pi^2 a^2 e^{2\pi a}}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{4\pi^3 e^{2\pi a}+8\pi^4 a e^{2\pi a}}{4\pi e^{2\pi a}+8\pi e^{2\pi a}+16\pi^2 a e^{2\pi a}+8\pi^2 a e^{2\pi a}+8\pi^3 a^2 e^{2\pi a}}$$

$$=\frac{4\pi^3}{12\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

よって

$$\lim_{n\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\lim_{a\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1}-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{3}=\frac{\pi^2}{6}$$

このことは，$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ の答と一致することになる。

問題】次の級数の和を求めなさい。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$$ （ヒント… $\sigma_2(z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$，$f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$ とおく。）