第７５回数学実践教育研究会

日　時　　２０１０年１１月２７日（土）
場　所　　アスティ４５ビル　　１０階

「無理数を有理数で近似する」　札幌琴似工業高等学校　長谷川 貢

無理数で表された数列の和は計算しにくいが、その和を不等式で評価する場合，その和の範囲を有理数で近似できれば，計算も楽になると考えた。無理数の和の近似は，無理関数の定積分を用いることになるが、この場合は「数学Ⅲ」の知識が必要となる。しかし，有理数の和であれば「数学B」の知識で間に合う。そのような問題を紹介します。2001年度　東京大学・理科Ⅰ類　後期入試問題　①番

任意の自然数$n \geqq 2$に対して，常に不等式$n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}} \geqq \frac{i}{10}$が成立するような最大の自然数$i$を求めよ。

解】$n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}=1+\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\right)=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\sqrt{k^2-1}-k}{\sqrt{k^2-1}}\right)$

$=1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k^2-1}}\times\frac{k+\sqrt{k^2-1}}{k+\sqrt{k^2-1}}\right)=1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k^2-1}\left(k+\sqrt{k^2-1}\right)}\right)$

$=1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k^2-1)+k\sqrt{k^2-1}}\right)$より各辺を移項してまとめると

$1-\frac{i}{10} \geqq \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k^2-1)+k\sqrt{k^2-1}}\right)$となる。ここで、右辺の式の値を評価する。

$k>\sqrt{k^2-1}$より，$k\sqrt{k^2-1}>\left(\sqrt{k^2-1}\right)^2=k^2-1$，よって

$(k^2-1)+k\sqrt{k^2-1}>(k^2-1)+(k^2-1)=2(k^2-1)$，よって

$\frac{1}{(k^2-1)+k\sqrt{k^2-1}}<\frac{1}{2(k^2-1)}$　これより

$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k^2-1)+k\sqrt{k^2-1}}\right)<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2(k^2-1)}=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}\right)+\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right\}$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$　①

$k^2-1<k^2$ より $k\sqrt{k^2-1}<k^2$ ，また $k^2-1>k^2-\dfrac{1}{2}$ よって

$$k^2-1+k\sqrt{k^2-1}<2k^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(4k^2-1)=\frac{(2k-1)(2k+1)}{2}$$

よって，$\dfrac{1}{k^2-1+k\sqrt{k^2-1}}>\dfrac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}$

よって ，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k^2-1+k\sqrt{k^2-1}}\right)>\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$ これより

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+1}$ ②

①②より，2以上の n で，$\displaystyle\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}<\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k^2-1+k\sqrt{k^2-1}}\right)<\frac{3}{8}$ が成り立つ。

また，$\displaystyle 1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k^2-1+k\sqrt{k^2-1}}\right)=n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$ より，

$\displaystyle 1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right)>n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}>1-\frac{3}{8}$ これをまとめて

$\displaystyle \frac{2}{3}+\frac{1}{2n+1}>n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}>\frac{5}{8}$ この不等式の右辺は2以上の n に対して

$\displaystyle n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$ が $\dfrac{5}{8}=0.625$ より大きいことを意味しており，左辺の不等式は

$\displaystyle n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$ が $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2n+1}$ よりも小さいことを意味している。また $n=100$

のとき $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{134}{201}<0.67$ つまり0.67 より小さい値をとることを意味する

から，$\displaystyle n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\geqq\frac{i}{10}$ が成立するもっとも大きな整数 i は6となる。

つまり、$\displaystyle n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$ の値は0.625 より大きく、また0.67より小さい値もとるこ

とが分った。また，$n=2$ のとき，左辺 $=2-\dfrac{2}{\sqrt{2^2-1}}=2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\fallingdotseq 0.846$

よって，$\displaystyle 0.625<n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}<0.846$ となる。

0.625　　存在範囲　　0.846