第７０回数実研夏季セミナーレポート

いろいろな入試問題

札幌平岡高等学校　　長谷川　貢

今回は、平成１６年度の金沢大学修士課程前期の入試問題６問中から適当に３問を見繕ってみました。

何といっても、数学の楽しさは大学に入らないと実感できないと思います。

先日、私の子どもも、そのようなことをいっていました。

やはり、数学は専門課程に入ってから分かると思います。

大学生に返ったつもりで楽しんでください。

|3| f を $\mathbb{R}$ 上の連続微分可能な実数値関数とし，ある定数 $c\ (0 < c < 1)$ に対し，

$$|f'(x)| \le c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つとする。このとき，以下のことを示せ。

(1) 任意の実数 x, y について，$|f(x) - f(y)| \le c|x - y|$ が成り立つ。

(2) x_0 を任意に選び，数列 $\{x_n\}$ を $x_n = f(x_{n-1})\ (n \ge 1)$ により定める。極限 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ が存在し，$f(x) = x$ となる。

(3) $f(x) = x$ を満たす x はただ一つである。

【解答】(1) $|f'(x)| \le c$ より $-c \le f'(x) \le c$ よって

(i) $y < x$ のとき，$\int_y^x (-c)dt \le \int_y^x f'(t)dt \le \int_y^x c\,dt$

よって，$-c(x - y) \le f(x) - f(y) \le c(x - y)$ よって $|f(x) - f(y)| \le c|x - y|$

(ii) $y < x$ のとき，$\int_x^y (-c)dt \le \int_x^y f'(t)dt \le \int_x^y c\,dt$

よって，$-cx \le f(y) - f(x) \le c(y - x)$ よって $|f(y) - f(x)| \le c|y - x|$ よって

$|f(x) - f(y)| \le c|x - y|$ 完

(2) (1) より $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le c|x_n - x_{n-1}|$ よって

$|x_{n+1} - x_n| \le c^n |x_1 - x_0|$ よって，極限をとって $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| \le \lim_{n\to\infty} c^n |x_1 - x_0| = 0$

よって，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ とおくと，$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$ よって $f(x) = x$ となる。 完

(3) $f(x) = x$ を満たす x が2つ存在したと仮定する。それを x, y とおく。(1) より

$|x - y| = |f(x) - f(y)| \le c|x - y|$，また $0 < c < 1$ より $|x - y| < |x - y|$ より矛盾である。

よって，$f(x) = x$ を満たす x はただ一つである。 完

[4]

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$ を示せ。

(2) $f(x) := \frac{1}{x}\exp\{-(\log x)^2\}$ $(x>0)$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(a) $\lim_{x\to+0} f(x)$ を求めよ。

(b) $\int_{0}^{\infty} x^n f(x)\,dx$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を求めよ。

【解答】(1) $I=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx$ とおく。同様に $I=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-y^2)dy$

これより $I^2=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-y^2)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2-y^2)dxdy$

ここで，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおく。

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r\ ,\ x^2+y^2=r^2$$

積分の範囲は $0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le\infty$ であるから

$$I^2=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}r\exp(-r^2)dr=[\theta]_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\exp(-r^2)\right]_0^{\infty}=2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi$$

よって，$I=\sqrt{\pi}$ 完

(2) (a) $\log x=t$ とおく。$x=e^t$

これより $f(t)=\exp(-t)\exp(-t^2)=\exp\{-t(1+t)\}$

また，$\lim_{x\to0}t=-1$ より $\lim_{t\to-1}\{-t(1+t)\}=-1$

よって，$\lim_{t\to-1}f(t)=\lim_{t\to-1}\exp\{-t(1+t)\}=0$

よって，$\lim_{x\to+0}f(x)=0$

答 $\lim_{x\to+0}f(x)=0$

(b) $I=\int_0^{\infty}x^nf(x)dx=\int_0^{\infty}x^{n-1}\exp\{-(\log x)^2\}dx$ とする。$\log x=t$ とおく。

$x=e^t$ $dx=e^tdt$ また $x=0$ のとき $t=-1$, $x=1$ のとき, $t=1$ よって

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{(n-1)t\}\exp(-t^2)\exp(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-t^2+nt)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(t-\frac{n}{2}\right)^2\right]\exp\left(\frac{n^2}{4}\right)dt=\exp\left(\frac{n^2}{4}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(t-\frac{n}{2}\right)^2\right]dt$$

$$=\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{n^2}{4}\right)$$

答 $\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{n^2}{4}\right)$

[5] 複素平面において，反時計回りの向きを持つ，原点を中心とする単位円をCとする。

(1) $\int_C \frac{e^z}{z^2}dz$ の値を求めよ。

(2) (1)の結果を用いて $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta-\theta)\,d\theta = 2\pi$ を示せ。

【解答】(1) $e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$

$z=e^{i\theta}$ とおく。$dz = ie^{i\theta}d\theta$ よって

$$\int_C \frac{e^z}{z^2}dz = \int_0^{2\pi}\left(e^{-2i\theta}+e^{-i\theta}+\frac{1}{2!}+\frac{e^{i\theta}}{3!}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{z^{k-2}}{k!}\right)ie^{i\theta}d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi}\left(e^{-i\theta}+1+\frac{e^{i\theta}}{2!}+\frac{e^{2i\theta}}{3!}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{e^{(k-1)i\theta}}{k!}\right)d\theta$$

$$= i\left[-\frac{e^{-i\theta}}{i}+\theta+\frac{e^{i\theta}}{2!i}+\frac{e^{2i\theta}}{2\cdot 3!i}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{e^{(k-1)i\theta}}{(k-1)k!i}\right]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

答 $2\pi i$

(2) $L=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta-\theta)\,d\theta$　$M=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta-\theta)\,d\theta$ とおく。

$$L+iM = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\{\cos(\sin\theta-\theta)+i\sin(\sin\theta-\theta)\}d\theta$$

$= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta+i\sin\theta-i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{e^{\cos\theta+i\sin\theta}}{e^{i\theta}}d\theta$　ここで $e^{i\theta}=z$ とおくと

$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}=z$ より上の定積分は原点を中心とする単位円Cの周積分となり

$$L+iM = \int_C\frac{e^z}{iz}dz = \int_0^{2\pi}\left(e^{-i\theta}+1+\frac{e^{i\theta}}{2!}+\frac{e^{2i\theta}}{3!}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k!}\right)e^{i\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(1+e^{i\theta}+\frac{e^{2i\theta}}{2!}+\frac{e^{3i\theta}}{3!}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{e^{k\theta}}{k!}\right)d\theta$$

$$= \left[\theta+\frac{e^{i\theta}}{i}+\frac{e^{2i\theta}}{2\cdot 2!i}+\frac{e^{3i\theta}}{3\cdot 3!i}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{e^{k\theta}}{k\cdot k!i}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

よって $L+iM=2\pi$ より $L=2\pi$，$M=0$ となる。　完

また，この結果から，$M=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta-\theta)\,d\theta=0$ も分かる。