北数教”第７３回数学教育実践研究会”レポート

２０１０年６月１２日（土）　１３：３０～１７：４０

北海道大学にて

「Big　O　notation」について　　長谷川　貢

鹿野　健　著　「リーマン予想」を読んでいたとき、表記の記号に出会いました。この本の中で、この記号がどのような形で用いられているか紹介します。

第４章　Riemamm　予想と同値な命題（リーマン予想をＲ．Ｈ．で表す）

定理１．１　Ｒ．Ｈ．が成り立つ。$\Longleftrightarrow$ $\pi(x) = \mathrm{li}\,x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ が任意の $\varepsilon > 0$ に対して成り立つ。

ただし $\mathrm{li}\,x = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ である。

記号の意味

x が大きいとき、2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x) > 0)$ の間に, 不等式

$$|f(x)| \le Kg(x)$$

が成り立つような x に無関係な定数 $K > 0$ が存在するとき

$$f(x) = O(g(x))$$

と書く。

したがって, 定理の意味は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して x が大きいとき

$$|\pi(x) - \mathrm{li}\,x| \le Kx^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

となるような x に無関係な定数 $K > 0$ が存在するというものである。

この式は不等式のように見えるが、実際は等式と考えてもよい。

同様に次の等式が成り立つ。

任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathrm{li}\,x = \frac{x}{\log x} + \frac{1!\,x}{(\log x)^2} + \frac{2!\,x}{(\log x)^3} + \cdots + \frac{(m-1)!\,x}{(\log x)^m} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right)$$

この式は $\frac{x}{\log x}$ が $\mathrm{li}\,x$ の第1近似であることを意味している。

また, 定理1．1は　素数定理

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

を含む。ここで, ～ は

$$\pi(x) \Big/ \frac{x}{\log x} \to 1,\quad x \to \infty$$

を意味する。ここで $\pi(x)$ は自然数 x 以下の素数の個数を意味する。

Ｈａｄａｍａｒｄとｄｅ　ｌａ　Ｖａｌｌｅｅ－Ｐｏｕｓｓｉｎによっと示された等式

$\pi(x)$ の近似について

$\pi(x) = \mathrm{li}\,x + O(x \exp(-c\sqrt{\log x})).$　を満たす正の数 c が存在する。

現在知られている最良の形は Vinogradov , Korobov による

$\pi(x) = \mathrm{li}\,x + O(x \exp(-c(\log x)^{0.6}(\log\log x)^{-0.2}))$ を満たす正の数 c が存在する。

である。

また，Ｒ．Ｈ．から導かれる結論（同値条件）は

$$\pi(x) = \mathrm{li}\,x + O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$$

で，定理１．１の評価より少しよい。

第３章　　　素数定理　　「リーマンのゼータ関数」　松本耕二著　より

定理3.１ $x \geq 1$ のとき $\pi(x) = \mathrm{li}\,x + O\left(x \exp\left(-c_1\sqrt{\log x}\right)\right)$ となるような $c_1 > 0$ が存在する。

問３．１　次の等式が成り立つことを示せ。

$$\mathrm{li}\,x = \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \frac{2!\,x}{(\log x)^3} + \cdots + \frac{(n-1)!\,x}{(\log x)^n} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{n+1}}\right) \cdots ①$$

解】$\mathrm{li}\,x = \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \left[\frac{t}{\log t}\right]_2^x - \int_2^x t \cdot \frac{-\frac{1}{t}dt}{(\log t)^2} = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}$

また $\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^k} = \left[\frac{t}{(\log t)^k}\right]_2^x - \int_2^x t \cdot \frac{-\frac{k}{t}dt}{(\log t)^{k+1}} = \frac{x}{(\log x)^k} - \frac{2}{(\log 2)^k} + \int \frac{k\,dt}{(\log t)^{k+1}}$

よって，①が成り立つ。

定理3.２　ある正の数 c_2 が存在して，領域 $\{\sigma + it \mid \sigma \geq 1 - c_2(\log(|t| + 2))^{-1}\}$ において，$\zeta(s) \neq 0$ であるものが存在する。　　　証明は第４章で行う

この定理を仮定して，定理３．１かぜどのように導かれるか考察する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$$ の対数をとって

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p^{ks}} \quad \cdots\cdots ③$$

このことを示す。

$f(x) = -\log(1-x)$ とおく。$f'(x) = -\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

よって $f(x) = \int (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots)\,dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

よって，$-\log(1 - p^{-s}) = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots + p^{-ns} + \cdots$

このことより③が成り立つ。

Ｐｅｒｒｏｎの公式

$c, y, T > 0$ に対し

$$I(y,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}\,ds$$

とおく．すると

$$I(y,T) = \begin{cases} 1 + O\left(y^c \min\{1, T^{-1}|\log y|^{-1}\}\right) & (y > 1) \\ \frac{1}{2} + O(cT^{-1}) & (y = 1) \\ O\left(y^c \min\{1, T^{-1}|\log y|^{-1}\}\right) & (0 < y < 1) \end{cases}$$

このように、「Big　O　notation」は頻繁に用いられています。続きはまたの機会があれば紹介します