n 次行列環の左・右・可換零因子について

――――理論的解明および実践的計算手法――――

北海道倶知安高等学校
数学科　原田　　牧夫

１．定義

実数体または複素数体を K で表す。任意の正整数 n,m に対して，

①M(n,m,K):= ”K の元を成分とする n 行 m 列型行列全体からなる集合”

②M(n,K):=M(n,n,K):=”K の元を成分とする n 次正方行列全体からなる集合”

③I_n:= ”n 次単位行列”

④O_n:= ”n 次零行列”

⑤$O_{n,m}$:= ”n 行 m 列型の零行列”

⑥n≧k なる任意の正整数 k に対して，$I_{n,k}:=\begin{pmatrix} I_k & O_{k,n-k} \\ O_{n-k,k} & O_{n-k} \end{pmatrix}$，　$I_{n,0}:=O_n$

⑦1≦∀i,j≦n,
M(i,j):=”第 i 行第 j 列の成分のみが 1 で，他の n^2-1 個の成分はすべて 0 の n×n 行列”

⑧M(n,K)の任意の元 A に対して，

A^:=”A の余因子行列の転置行列”

detA:= ”A の行列式”

rankA:=”A の階数”

R(A):={X∈M(n,K)|AX=O_n.}　　(A≠O_n の場合 R(A)は A の右零因子全体の集合です)

L(A):={X∈M(n,K)|XA=O_n.}　　(A≠O_n の場合 L(A)は A の左零因子全体の集合です)

Z(A):={X∈M(n,K)|AX=XA=O_n.} (A≠O_n の場合 Z(A)は A の可換零因子全体の集合です)

※M(n,m,K)は nm 次元の線形空間です。特に M(n,K)は n^2 次元の線形空間であり，
R(A),L(A),Z(A) は M(n,K) の線形部分空間になっていることに注意しましょう。

２．この小論の経緯について

例えば n=2 の場合，A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対しては，A^=$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$となります。n=2 の場合に限らず，一般に任意の正整数 n に対して

[1]$\forall A \in M(n,K)$, $AA\hat{}=A\hat{}A=(\det A)I_n$.

が成り立つことは，よく知られた事実です。従って特に，

[2]$\forall A \in M(n,K)$ s.t.detA=0,　$AA\hat{}=A\hat{}A=O_n$,　すなわち $A\hat{} \in Z(A)$.

が成り立ちます。

先日，石狩南高校の小栗是徳先生から，『行列方程式の解法について』という研究レポートを 2002.11.26.の消印の郵便で頂きました。

『$A \neq O_2 \wedge \det A=0$ なる任意の $A \in M(2,K)$に対して，
$B \neq O_2 \wedge BA=AB=O_2$ なる $B \in M(2,K)$は，A^の定数($\neq 0$)倍に限られる』

ということが述べられています。研究の最後の箇所で小栗先生は，今後の課題として $n \geqq 3$ の場合の解明を提唱されています。小栗先生はすでに以前の研究において，一般の n 次元での可換零因子の存在を解明しているとのことでした。

大変興味深く思い，私も挑戦してみました。行列の可換零因子については，以下に示す通り，行列を線形空間 M(n,K)内のベクトルとして眺めることではっきりと捉えることが可能です。

３．行列環の可換零因子の決定

2 以上の任意の整数 n について，$\forall A \in M(n,K)$に対しては，余因子行列の定義から，A^の各成分は A の n－1 次小行列式の定数倍です。従って

[3] 2 以上の任意の整数 n に対して，
$\forall A \in M(n,K)$, $A\hat{} \neq O_n \Leftrightarrow \mathrm{rank}A \geqq n-1$.

が成り立ちます。小栗先生が『行列方程式の解法について』において扱われた $A \neq O_2 \wedge \det A=0$ の場合は n=2 かつ rankA=1 ですので $A^{\wedge} \neq O_n$ となるわけですが，$n \geqq 3$ のときには $A \neq O_n \wedge A^{\wedge}=O_n$ という場合が起こり得るのです。

一方任意の正整数 n について，先ほど定義した R(A)と L(A)は，共に n^2 次元線形空間 M(n,K)の線形部分空間です。係数行列を A とする n 元連立一次方程式の解空間の次元は n－k (ただし k=rankA とする) であり，R(A)の各元は，この解空間の n 個の列ベクトルを並べてできていますので

[4]dimR(A)=n(n－k)

です。また，L(A)=dim{X∈M(n,K), ${}^tA^tX=O_n$.}であり，A の転置行列 ${}^tA$ に対して rank${}^tA$=rankA=k であることから，係数行列を ${}^tA$ とする n 元連立一次方程式の解空間の次元もやはり n－k であり，R(A)の各元は，この解空間の n 個の列ベクトルを転置して並べてできていますので

[5]dimL(A)=n(n－k)

です。明らかに

[6]detA=0⇔n(n－k)＞0

ですので，

[7]∀A∈M(n,K),

(7－1)[detA=0]

⇔(7－2)[∃B∈M(n,K),[$B \neq O_n$]∧[$AB=O_n$].]

⇔(7－3)[∃B∈M(n,K),[$B \neq O_n$]∧[$BA=O_n$].].

が得られます。これはよく知られた事実です。

dimR(A)と dimL(A)について述べましたが，では L(A)と R(A)の共通部分 Z(A)=R(A)∩L(A)の次元はどうなるのでしょうか。前述の小栗先生の命題は，次元の視点から眺めるならば，

[8]∀A∈M(2,K) s.t. rankA=1, dimZ(A)=1.

と言い換えることができます。それでは n=2 に限らない一般の場合，Z(A)はどのような姿をしているのか調べてみましょう。n を任意の正整数，k を 0≦k≦n なる任意の整数とし，A∈M(n,K) s.t. rankA=k なる任意の A を固定します。

[a]k=0 の場合

$A=O_n$ となるので，$Z(A)=M(n,K)$，従って

$\{M(i,j)\,|\,1\leqq i,j\leqq n\}$　は $Z(A)=Z(O_n)=M(n,K)$の基底であり，$\dim Z(A)=n^2$　が成り立つ.

[b]k=n の場合

$\det A\neq 0$ となるので，$Z(A)=\{O_n\}$，従って

$\dim Z(A)=0$　が成り立つ.

[c]0＜k＜n の場合

まず最も品行方正な $A=I_{n,k}=\begin{pmatrix} I_k & O_{k,n-k} \\ O_{n-k,k} & O_{n-k} \end{pmatrix}$については，

$Z(A)=Z(I_{n,k})$はたいへん明快な姿をしています。

$\forall X\in M(n,K)$,　$I_{n,k}X=\begin{pmatrix} X_1 \\ O_{n-k,n} \end{pmatrix}$　[ただし，X_1:=”X の第 1～k 行”].

です。従って，

$\forall X\in M(n,K), I_{n,k}X=O_n \Leftrightarrow X_1=O_{k,n}$.

が成り立ちます。一方

$\forall X\in M(n,K)$,　$XI_{n,k}=\begin{pmatrix} X_2 & O_{n,n-k} \end{pmatrix}$　[ただし，X_2:=”X の第 1～k 列”].

です。従って，

$\forall X\in M(n,K)$, $XI_{n,k}=O_n \Leftrightarrow X_2=O_{n,k}$.

が成り立ち，結局

$Z(I_{n,k})=\left\{\begin{pmatrix} O_k & O_{k,n-k} \\ O_{n-k,k} & X \end{pmatrix}\middle|\, X\in M(n-k,K)\right\}$

ですので，

$\{M(i,j)\,|\,k+1\leqq i,j\leqq n\}$　は $Z(I_{n,k})$の基底であり，$\dim Z(I_{n,k})=(n-k)^2$　である.------(＊)

が得られます。

次に一般の $A\in M(n,K)$ s.t. $\mathrm{rank}A=k$ については，行列の左・右基本変形によって

$\exists F,G\in M(n,K), \det F\neq 0, \det G\neq 0, FAG=I_{n,k}$.

とできます。すると

$\forall X\in M(n,K),$

$X\in Z(A)$

$\Leftrightarrow AX=XA=O_n$

$\Leftrightarrow FAGG^{-1}XF^{-1}=G^{-1}XF^{-1}FAG=O_n$

$\Leftrightarrow I_{n,k}G^{-1}XF^{-1}=G^{-1}XF^{-1}I_{n,k}=O_n$

$\Leftrightarrow G^{-1}XF^{-1}\in Z(I_{n,k}).$

が成り立ちます。明らかに　$\Psi:=M(n,K)\ni M\mapsto GMF\in M(n,K)$　は線形同形写像であり，今見た通り

$\Psi(Z(I_{n,k}))=Z(A)$

ですから，(＊)によって

$\Psi(\{M(i,j)\,|\,k+1\leqq i,j\leqq n\})=\{GM(i,j)F\,|\,k+1\leqq i,j\leqq n\}$　は $Z(A)$の基底であり，
$\dim Z(A)=(n-k)^2$　が成り立つ.

が得られます。

以上をまとめると，次のようになります。

命題 A(行列環の可換零因子の決定)

$\forall n\in N,\forall k\in Z$ s.t. $0\leqq k\leqq n$, $\forall A\in M(n,K)$ s.t. $\mathrm{rank}A=k$,

①$\dim Z(A)=(n-k)^2$.

②$k<n$ のとき，
$\forall F,G\in M(n,K)$ s.t. $[\det F\neq 0\wedge \det G\neq 0\wedge FAG=I_{n,k}]$,
$\{GM(i,j)F|k+1\leqq i,j\leqq n\}$　は $Z(A)$の基底である。

※具体的な A に対して，基本変形の行列 F と G を求めることは容易です。つまり**命題 A は可換零因子の論理的な解明に留まらず，可換零因子を実際に求める手法をも与える**ものです。

ところで命題 A の特別な場合として

[9]任意の正整数 n に対して,

$\forall A \in M(n,K)$ s.t. $\mathrm{rank}A = n-1$, $\dim Z(A)=1$.

が得られます。[3]と[9]から直ちに次の系を得ます

系 B

2 以上の任意の整数 n に対して,
$\forall A \in M(n,K)$ s.t. $\mathrm{rank}A = n-1$,
$\forall B \in M(n,K)$, $[AB=BA=O_n] \Leftrightarrow [\exists \alpha \in K, B=\alpha A^{\wedge}.]$.

系 B を意識して,命題 A を眺めると,小栗先生が n=2 の場合について示した**同値関係 $[AB=BA=O_n] \Leftrightarrow [\exists \alpha \in K, B=\alpha A^{\wedge}.]$ は,$n \geqq 3$ の場合には $\mathrm{rank}A = n-1$ という特殊な場合に限って成立する**ことがわかります。

4. Z(A)∩Z(B)の解明

$\forall A,B \in M(n,K)$ に対して,二つの線形空間 Z(A), Z(B) の共通部分

$Z(A) \cap Z(B) = \{X \in M(n,K) \mid AX=XA=O_n \wedge BX=XB=O_n.\}$

の次元はどうなるのでしょう。実は $Z(A)\cap Z(B)$ の次元を決定するのは,$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ と $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ の 2 つなのです。

ここで少しこの様なタイプの行列の階数(rank)について振り返っておきましょう。

$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ と $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ は,$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ としてもわかるように,必ずしも等しいとは限りません。しかし

[10] (1)$\max\{\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B\} \leqq \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leqq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$

(2)$\max\{\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B\} \leqq \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leqq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$

という明らかな不等式は,しばしば有用となる大切な性質です。ただし $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ という例からもわかるように,$\max\{ \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}, \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\}$ と $\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$ が必ずしも等しくなるとも限りません。もしも $\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B$ に等しい階数を持

つ行列をAとBから作りたい場合は，$\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & B \end{pmatrix}$ などとすればよいのでしたね。

階数の復習はこれくらいにして，Z(A)∩Z(B)の解明にとりかかりましょう。以下に示すように，命題Aの証明とほぼ同様です。

今改めて，∀A,B∈M(n,K) を固定し，$p:=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$，$q:=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ としましょう。当然，$0\leqq p\leqq n$, $0\leqq q\leqq n$ です。行列の左・右基本変形によって

[11] $\exists F_n,G_n\in M(n,K)$, $\exists F_{2n},G_{2n}\in M(2n,K)$,

$\det F_n\neq 0$, $\det G_n\neq 0$, $\det F_{2n}\neq 0$, $\det G_{2n}\neq 0$,

$$F_n\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}G_{2n}=\begin{pmatrix} I_{n,p} & O_n \end{pmatrix},\quad F_{2n}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}G_n=\begin{pmatrix} I_{n,q} \\ O_n \end{pmatrix}.$$

とできます。すると，

$\forall X\in M(n,K)$,

$X\in Z(A)\cap Z(B)$

$\Leftrightarrow AX=XA=O_n\wedge BX=XB=O_n$

$\Leftrightarrow F_nAG_nG_n^{-1}XF_n^{-1}=G_n^{-1}XF_n^{-1}F_nAG_n=O_n\wedge F_nBG_nG_n^{-1}XF_n^{-1}=G_n^{-1}XF_n^{-1}F_nBG_n=O_n$

$\Leftrightarrow AG_nG_n^{-1}XF_n^{-1}=G_n^{-1}XF_n^{-1}F_nA=O_n\wedge BG_nG_n^{-1}XF_n^{-1}=G_n^{-1}XF_n^{-1}F_nB=O_n$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}G_nG_n^{-1}XF_n^{-1}=O_{2n,n}\wedge G_n^{-1}XF_n^{-1}F_n\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}=O_{n,2n}$

$\Leftrightarrow F_{2n}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}G_nG_n^{-1}XF_n^{-1}=O_{2n,n}\wedge G_n^{-1}XF_n^{-1}F_n\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}G_{2n}=O_{n,2n}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} I_{n,q} \\ O_n \end{pmatrix}G_n^{-1}XF_n^{-1}=O_{2n,n}\wedge G_n^{-1}XF_n^{-1}\begin{pmatrix} I_{n,p} & O_n \end{pmatrix}=O_{n,2n}$

$\Leftrightarrow I_{n,q}G_n^{-1}XF_n^{-1}=G_n^{-1}XF_n^{-1}I_{n,p}=O_n.$

すなわち

[12] $\forall X\in M(n,K)$,　$I_{n,q}X=XI_{n,p}=O_n\Leftrightarrow G_nXF_n\in Z(A)\cap Z(B)$.

です。$I_{n,q}X$　と　$XI_{n,p}$　については既に紹介した通りですので，ここで

$$N(n,p,q):=\left\{\begin{pmatrix} O_{q,p} & O_{q,n-p} \\ O_{n-q,p} & X \end{pmatrix}\middle| X\in M(n-q,n-p,K)\right\}$$ とすると

[13]$\forall Y\in M(n,K),\ Y\in N(n,p,q)\Leftrightarrow G_nYF_n\in Z(A)\cap Z(B)$.

が成り立ちます。さらに　$\Phi:=M(n,K)\ni M\mapsto G_nMF_n\in M(n,K)$ は線形同形写像であり，[13]から

$\Phi(N(n,p,q))= Z(A)\cap Z(B)$

が成り立ちます。$p=n\vee q=n$ の場合は，$N(n,p,q)=\{O_n\}$となることに注意してまとめれば次の通りです：

命題 C(行列環の可換零因子の共通部分)

$\forall n\in N,\forall p,q\in Z$ s.t.$[0\leqq p\leqq n\wedge 0\leqq q\leqq n]$,

$\forall A,B\in M(n,K)$ s.t. $p:=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}$, $q:=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$,

①$\dim(Z(A)\cap Z(B))=(n-p)(n-q)$.

②$p<n\ \wedge\ q<n$　のとき，

$\forall F_1,G_1\in M(n,K),\forall F_2,G_2\in M(2n,K)$

s.t.$[\ \det F_1\neq 0\ \wedge\ \det G_1\neq 0\ \wedge\ \det F_2\neq 0\ \wedge\ \det G_2\neq 0$

$\wedge\ F_1\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}G_2=\begin{pmatrix}I_{n,p} & O_n\end{pmatrix}\ \wedge\ F_2\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}G_1=\begin{pmatrix}I_{n,q}\\ O_n\end{pmatrix}\ ]$,

$\{G_1M(i,j)F_1|q+1\leqq i\leqq n,p+1\leqq i\leqq n\ \}$　は $Z(A)\cap Z(B)$ の基底である。

※①具体的な A,B に対して，基本変形の行列 F_1, G_1,を求めることは容易です。つまり**命題 C は $Z(A)\cap Z(B)$の論理的な解明に留まらず，$Z(A)\cap Z(B)$の元を実際に求める手法をも与える**ものです。

②命題 C において，特に A=B とした場合が命題 A です。つまり**命題 C は命題 A の一般化**になっています。

③$Z(A)\cap Z(B)\cap Z(C)$ を扱う場合は，$p:=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B & C\end{pmatrix}$, $q:=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\ B\\ C\end{pmatrix}$

とすればよいことは，命題 C の証明から明らかでしょう。3 つに限らず，一般の m 個の共通部分についても同様です。(命題 G 参照)

[10]と命題 C とから，次の系 D が成立します。

系 D

$$\forall n\in N,\forall A,B\in M(n,K)\ \text{s.t.}\ \mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B\leqq n,$$
$$\dim(Z(A)\cap Z(B))\geqq\{n-(\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B)\}^2.$$

ところで近年,『北海道大学理学研究科大学院資格試験』において次の様な旨の問題が出題されたそうですが，これは系 D から明らかです。

『A,B を O_n と異なる複素 n 次正方行列とし，rankA+rankB＜n とするとき，On と異なる複素 n 次正方行列 X で，$AX=XA=O_n$ かつ $BX=XB=O_n$ が成り立つものが存在することを証明しなさい。』

５．線形空間 Z(A)を決定するもの

命題 C は(その特別な場合である命題 A とともに)，Z(A)が何によって定まるのかを容易に解明することを可能にします。

$\forall n\in\mathbb{N},\forall A,B\in M(n,K)$ を固定し，

$a:=\mathrm{rank}A,\quad b:=\mathrm{rank}B,\quad p:=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix},\quad q:=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$ としましょう。

[10]によって，

[14] $0\leqq\max\{a,b\}\leqq p\leqq n,\ 0\leqq\max\{a,b\}\leqq q\leqq n$

です。そして命題 C から

[15]

①$\dim Z(A)=(n-a)^2$

②$\dim Z(B)=(n-b)^2$

③$\dim(Z(A)\cap Z(B))=(n-p)(n-q)$

です。

今，$Z(A)\subset Z(B)$と仮定すると,

$Z(A)=Z(A)\cap Z(B)$,

$\dim Z(A)=\dim(Z(A)\cap Z(B))$

ですので，[15]から，

$(n-a)^2=(n-p)(n-q)$

であり，この等式と[14]から容易に，

[16] $a=p=q$

を得ます。

すなわち，

[17] $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

が成り立ちます。この等式のうち，

$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

によって，

B の各行ベクトルは，A の行ベクトルの線形結合として表せる

ことがわかります。このことから，

$\mathrm{Ker}A\subset\mathrm{Ker}B$

を得ます。

同様に

$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}$

によって，

B の各列ベクトルは，A の列ベクトルの線形結合として表せる

ことがわかります。このことから，

$\mathrm{Im}A\supset\mathrm{Im}B$

を得ます。逆に，

$\mathrm{KerA}\subset\mathrm{KerB}\wedge\mathrm{ImA}\supset\mathrm{ImB}\Rightarrow Z(A)\subset Z(B)$

となることは明らかでしょう。

以上から，次を得ます。

命題E　(Z(A)の決定)

$\forall n\in N,\forall A,B\in M(n,K),$

①$Z(A)\subset Z(B)\Leftrightarrow[\mathrm{KerA}\subset\mathrm{KerB}]\wedge[\mathrm{ImA}\supset\mathrm{ImB}]$.

②$Z(A)=Z(B)\Leftrightarrow[\mathrm{KerA}=\mathrm{KerB}]\wedge[\mathrm{ImA}=\mathrm{ImB}]$.

※この命題EのZが，Rの場合は，内積の双線形性から明白です。また，Lの場合は，直交補空間の議論を用いて証明できます。しかしZの場合，(⇒)は自明とは言えません。後述するように，この命題Eと同様の手法で，RとLの場合を証明することも可能です。

6．R(A)∩R(B)　と　L(A)∩L(B)

実は　$p:=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}$，と　$q:=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$　は，Z(A)∩Z(B)　だけではなく，というよりもそれ以前に，R(A)∩R(B) や L(A)∩L(B) といったものの次元と深く関連したものであることを忘れてはいけません。

$$[18]R(A)\cap R(B)=\{X\in M(n,K)\,|\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}X=O_{2n,n}.\}$$

であることから，[4]を得たのと同様にして，

$$[19]\dim(R(A)\cap R(B))=n(n-q)$$

であり，さらに

$$[20]L(A)\cap L(B)=\{X\in M(n,K)\,|\,X\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}=O_{n,2n}.\}$$
$$=\{X\in M(n,K)\,|\,{}^t\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}{}^tX=O_{2n,n}.\}$$

であることから，

[21]$\dim(L(A)\cap L(B))=n(n-p)$

です。さらに [4],[5],[18],[20] によれば，命題 E を得たのと同様にして (というよりもむしろもっと簡単に)，次が得られます：

命題 F (R(A)と L(A)の決定)

$\forall n\in N,\forall A,B\in M(n,K)$,

①(1)$R(A)\subset R(B)\Leftrightarrow[\mathrm{Ker}A\subset \mathrm{Ker}B]$.

(2)$R(A)=R(B)\Leftrightarrow[\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}B]$.

②(1) $L(A)\subset L(B)\Leftrightarrow[\mathrm{Im}A\supset \mathrm{Im}B]$.

(2)$L(A)=L(B)\Leftrightarrow[\mathrm{Im}A=\mathrm{Im}B]$.

〖読者への宿題〗

R(A), L(A),R(A)∩R(B),L(A)∩L(B) について，命題 A②,または命題 C②に対応する命題を与え，それを証明することは，読者の**宿題**といたしましょう。Z(A), Z(A)∩Z(B) の場合の証明を見れば，ほとんど同様に，そしてもっと容易に，できるはずです。[だからといって宿題をサボらないように！この小論の他の箇所もそうですが，ただ眺めるばかりではなく，自分で書いて理解することこそ大切です。わかったつもりになっただけ，というのが一番危険です。]

これまでに，登場した各空間の次元を一覧にしておきます。

$\forall n\in\mathbb{N},\forall A,B\in M(n,K)$,

$a:=\mathrm{rank}A$,　$b:=\mathrm{rank}B$,　$p:=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}$,　$q:=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$　とするとき，

$\dim R(A)=n(n-a)$	$\dim(R(A)\cap R(B))=n(n-q)$	$\dim R(B)=n(n-b)$
$\dim L(A)=n(n-a)$	$\dim(L(A)\cap L(B))=n(n-p)$	$\dim L(B)=n(n-b)$
$\dim Z(A)=(n-a)^2$	$\dim(Z(A)\cap Z(B))=(n-p)(n-q)$	$\dim Z(B)=(n-b)^2$

7．$\{Z(A)\,|\,A\in\mathcal{F}\}$ の 共通部分

記述を簡明にするために,

$1\leqq\forall n\in\mathbb{N},\forall\mathcal{F}\subset M(n,K),\quad Z(\mathcal{F}):=\{X\in M(n,K)\,|\,\forall A\in\mathcal{F},AX=XA=O_n.\}.$

と定めましょう。これによれば例えば，$Z(\{A,B,C\})=Z(A)\cap Z(B)\cap Z(C)$ です。また $R(\mathcal{F})$, $L(\mathcal{F})$ についても $Z(\mathcal{F})$ と同様に定義されるものとしましょう。

これ以降に述べる事項は，Z,R,L のどの場合でも全く同一ですので，Z,R,L のうちから任意のものをとり，それを Γ で表して記しましょう。

命題 C に続く※③で，有限個の共通部分について述べました。では，無限個の共通部分はどのようになるのでしょう。つまり $\mathcal{F}$ が無限集合の場合，$\Gamma(\mathcal{F})$ はどのようなな空間になるのでしょう。$\mathcal{F}$ が有限集合の場合も含めて，最後にこのことに触れておきましょう。

$1\leqq\forall n\in\mathbb{N},\forall\mathcal{F}\subset M(n,K)$ を固定します。

まず $\mathcal{F}$ が O_n と異なる $M(n,K)$ の元を含まない場合, つまり, $\mathcal{F}$ が $\{O_n\}$ または ϕ に等しい場合については，明らかに

[22] $\Gamma(\phi)=\Gamma(\{O_n\})=\Gamma(O_n)=M(n,K).$

です。次に，$\mathcal{F}$ が O_n と異なる $M(n,K)$ の元を含む場合を考えます。

いま，$\mathcal{F}$ が張る(span)空間を $S(\mathcal{F})$ で表します。容易にわかるように,

$S(\mathcal{F})$:=”$\mathcal{F}$ の有限個の元によって作られうる一次結合全体の集合”

です。$S(\mathcal{F})$ は有限次元線形空間 $M(n,K)$ の線形部分空間であるので，$S(\mathcal{F})$ 自身もまた有限次元であり，有限個の元より成る基底 $\mathcal{B}$ を持ちます。このとき,

$$\forall B\in\mathcal{B},\exists N(B)\in\mathbb{N},\exists A_{(B,1)},\cdots,A_{(B,N(B))}\in\mathcal{F},\forall\alpha_{(B,1)},\cdots,\alpha_{(B,N(B))}\in K,$$
$$B=\alpha_{(B,1)}A_{(B,1)}+\cdots+\alpha_{(B,N(B))}A_{(B,N(B))}.$$

となります。有限集合 $\mathcal{D}_1:=\{A_{(B,j)}\,|\,B\in\mathcal{B},1\leqq j\leqq N(B).\}$ のうちから選びうる一次独立な部分集合のうち，最大濃度のものを一つとって，$\mathcal{D}$ とすると，$M(n,K)$ の次元が n^2 であることにより，$\mathcal{D}$ の濃度は n^2 以下であり，また明らかに $\mathcal{D}\subset\mathcal{F}$ です。さらに，$\mathcal{D}$ の作り方から，$\mathcal{F}$ の任意の元は，$\mathcal{D}$ の元によって作られる適当な一次結合に等しくなります。すなわち次が成立します。

[23] $\exists\mathcal{D}\subset\mathcal{F}$,　$\mathrm{Card}\,\mathcal{D}\leqq n^2$ $\wedge$ “$\mathcal{D}$ は $S(\mathcal{F})$ の基底である”.

このような $\mathscr{D}$ のとり方は線形代数学では常套手段でした。$\mathscr{D}=\{A_1,\cdots,A_r\}$ $(r \leqq n^2)$ としましょう。ここで，行列の和・積の分配法則により

[24]$1 \leqq \forall r \in \mathbb{N}, \forall A_1,\cdots,A_r \in M(n,K), \forall \alpha_1,\cdots,\alpha_r \in K,$

$$\Gamma(\alpha_1 A_1+\cdots+\alpha_r A_r) \supset \Gamma(A_1) \cap \cdots \cap \Gamma(A_r).$$

が成り立ちますので，[23][24]から

$\forall C \in \mathscr{F}$，$\Gamma(C) \supset \Gamma(A_1) \cap \cdots \cap \Gamma(A_r).$

従って

[25] $\Gamma(\mathscr{F})=\Gamma(A_1) \cap \cdots \cap \Gamma(A_r).$

[22][25]から，

命題 G

$1 \leqq \forall n \in \mathbb{N}$，$\phi \neq \forall \mathscr{F} \subset M(n,K)$, $1 \leqq \exists r \in \mathbb{N}$，$\exists A_1,\cdots,A_r \in \mathscr{F}$,

$$r \leqq n^2 \ \wedge \ \Gamma(\mathscr{F})=\Gamma(A_1) \cap \cdots \cap \Gamma(A_r).$$

８．補遺

北大の大学院資格試験でも使える一方で，命題 A と命題 C は，具体的な A,B に対して，Z(A)の場合にしろ Z(A)∩Z(B)にしろ，可換零因子を，その一般の形をも，書き出すことを，基本変形さえ身に付けた高校生であれば可能にしてくれるものです。

命題 A と命題 C によって，高校生にも，(2 次に限らず，４次，５次等の場合であっても)可換零因子を(しかも一般形でさえも)書き出せることになったわけですが，なぜそのようにすれば書けるのか？について考えるには，やはり大学初年時程度の線形代数学は必要でしょう。『答えが出るだけが数学じゃないんだよ！』という好例です。

逆に言うならば，**命題 A と命題 C の手法でいくつかの可換零因子を求めさせて，それが実際に可換零因子になっていることを自分で確かめさせて感動させたところで，『ではどうしてこうすればつくれるのかな？』などどする，大学の線形代数学への興味を持たせる道具としては結構使えそう**です。

2002 年 12 月 2 日