≪あきらめないで！　絶対値不等式 $|f(x)|>g(x), |f(x)|<g(x)$≫

北海道倶知安高等学校数学科
原　田　牧　夫

※　以下に述べる解法について、すでに『**<u>絶対値のついた不等式　～「mathedu」における議論から</u>**』において、ＳＥＧの古川昭夫先生が指摘されていたことに、不覚にもレポートを書き上げた後になって気付いた次第です。そのようなわけで以下の内容についてはこのレポートが初出ではありません。古川先生の方法は絶対値不等式を処理する上で、とても有効な手段といえます。以下には　$|f(x)|>g(x)$　と　$|f(x)|<g(x)$　についてのみ、この方法を紹介しましたが、$|f(x)|+|g(x)|>h(x)$　等といった絶対値が複数現れる不等式の場合においては、この方法の手際の良さが一層際立ちます。

一見難しそうな不等式　$|f(x)|>g(x)$　や　$|f(x)|<g(x)$ 。これらの不等式の理解は、「高校の授業では無理だ！」といってあきらめてしまうほど難しいものではありません。ただ数学の授業時間確保はどこでもキツキツなのが実情でしょう。だから無理だというのなら話は別です。時間さえ許せば、**僅か 2 ページ弱**にわたって以下に解説したのとほぼ同じ手順で生徒に指導できます。講習等ならばチャンスがあるかもしれません。

まず最初に

(＊)　　$\forall a\in\mathbb{R},\quad |a|=\max\{a,-a\}.$

がポイントです[例によって $\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表すものとします]。

(＊) については、数直線上に、色々な a の値にたいする a と－a の目盛りをとって理解してもらうのが良いでしょう。(＊) は 2 直線 $y=x$, $y=-x$ と $y=|x|$ のグラフとの関係を理解してもらう場合にも、大切になる式です。

『えむ・えー・えっくす』を高校で紹介するのはマズい、とお考えであれば『ａと－ａの大きいほう(正しくは小さくない方ですね)』と記しても一向に差し支えありません。(＊) を用いると、

(Ｉ)　　$\forall a\in\mathbb{R},\quad |a|=a$（if $a>0$），
$|a|=-a$（if $a<0$），
$|a|=a=-a=0$（if $a=0$）.

(Ⅱ)　$\forall a,\ b \in \mathbb{R}$,

$$|a| > b \Leftrightarrow \max\{a, -a\} > b \Leftrightarrow ((-a > b) \vee (a > b)) \Leftrightarrow ((a < -b) \vee (b < a)).$$

(Ⅲ)　$\forall a,\ b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & |a| < b \\ \Leftrightarrow\ & \max\{a, -a\} < b \\ \Leftrightarrow\ & ((-a < b) \wedge (a < b)) \\ \Leftrightarrow\ & ((-b < a) \wedge (a < b)) \\ \Leftrightarrow\ & -b < a < b. \end{aligned}$$

(Ⅳ)　$\forall a,\ b \in \mathbb{R},\ |a| = b \Leftrightarrow \max\{a, -a\} = b \Rightarrow ((a = b) \vee (a = -b))$.

となります。どれも実にカンタンでしょう。『数学のいずみ』の『絶対値不等式』のテーマ別共同研究で話題になっていた**次の（Ⅱ*）から（Ⅳ*）は,上述の（Ⅱ）から（Ⅳ）の単なる言い換えに過ぎない**のです。関数を用いて記すと何やら難しく見えてしまいがちですが、(Ⅱ*) から (Ⅳ*) に現れている f(x) と g(x) は関数自体ではなく関数の値、つまり単なる実数。**『難しさ』は見掛け倒しです**。

$\forall f : A \to \mathbb{R},\ \forall g : A \to \mathbb{R}$,

(Ⅱ*)　$\forall x \in A$,

$$\begin{aligned} & |f(x)| > g(x) \\ \Leftrightarrow\ & \max\{ f(x), -f(x) \} > g(x) \\ \Leftrightarrow\ & ((-f(x) > g(x)) \vee (f(x) > g(x))) \\ \Leftrightarrow\ & ((f(x) < -g(x)) \vee (g(x) < f(x))). \end{aligned}$$

(Ⅲ*)　$\forall x \in A$,

$$\begin{aligned} & |f(x)| < g(x) \\ \Leftrightarrow\ & \max\{ f(x), -f(x) \} < g(x) \\ \Leftrightarrow\ & ((-f(x) < g(x)) \wedge (f(x) < g(x))) \\ \Leftrightarrow\ & ((-g(x) < f(x)) \wedge (f(x) < g(x))) \\ \Leftrightarrow\ & -g(x) < f(x) < g(x). \end{aligned}$$

(Ⅳ*)　$\forall x \in A,\ |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \max\{ f(x), -f(x) \} = g(x) \Rightarrow ((f(x) = g(x)) \vee (f(x) = -g(x)))$.

もう少し補足するならば、(Ⅱ*), (Ⅲ*) からそれぞれ次の(ⅱ), (ⅲ) を得ます。

(ⅱ)　{x | | f(x) | ＞g(x)}

=｛x | (f(x)＜－g(x))∨(g(x)＜f(x))}

=｛x | f(x)＜－g(x)}∪{x | g(x)＜f(x)}.

(ⅲ)　{x | | f(x) | ＜g(x)}

=｛x | (－g(x)＜f(x))∧(f(x)＜g(x))}

=｛x | －g(x)＜f(x)}∩{x | f(x)＜g(x)}.

(ⅱ)は不等式　| f(x) | ＞g(x)　の解法を与え、(ⅲ)は不等式　| f(x) | ＜g(x)　の解法を与えていますね。**たったこれだけでＯＫ**です。**「f(x)≧0 となる x の範囲は‥‥‥」などという(ともするとありがちな)面倒な議論は一切不要**です。

しかし「でも‥‥‥」という方がいることでしょう。「| f(x) | ＜g(x) の理解には、『f(x)≧0 となる x の範囲は‥‥‥』などとすることが絶対必要だ！」と唱える人が少なからずいらっしゃると思います。確かに 『| f(x) | ＜g(x)　という姿で x に課せられた条件』の意味を問題を解く前に提示する時点では、そのようなことはあって当然です。しかし | f(x) | ＜g(x) という姿の個々の問題を実際に解く場合、そしてまた論理的に一般の | f(x) | ＜g(x) の解法を、理解しよう・理解させよう、とする場合は「f(x)≧0 となる x の範囲は‥‥‥」という発想よりも上述の方法のほうが、どう見ても遥かに優れています。「でも‥‥‥」というありがちな疑問は、**(＊) が教科書に登場しない**、という事実に根ざしたものに違いありません。ここで、優れた解答の元となっている **(＊) の高校数学における(隠された)位置づけられ方**について、紹介しましょう。

唐突ですが前述の (Ⅰ) は、たいてい

(ｉ)　$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

という姿で新入生の教科書に毎年登場します。

『負の数ならばーを取り除く』という機能としてのみ絶対値を学んできた新入生の目には、(ｉ) の | a | =－a（a＜0）はとても異質に映るものです。「たとえば a=－3 なら、| a | = | －3 | =3=－(－3)=－a　でしょう」などと説明してみても、「確かにそれはそうだけれど‥‥‥」といった風で今ひとつピンとこないものです。(ｉ) は論理的には正しいわけですが、生徒の側からすれば「正負を問わない一般の実数 a に対する絶対値 | a | の説明のはずなのに、なぜ　a≧0, a＜0 の二つの場合にわけてしまっているんだろう？一体何が言いたいんだろう？」というのが正直なところでしょう。**(ｉ) を確実に身に着けてもらうには、数直線上に色々な a の値にたいする a と－a の目盛りをとらせた上で「どんな実数**

a にたいしても、原点に関して反対側に　－a　がとれるね。そして、とにかくいつでも a と－a のうちの大きいほうが、|a|になっているね。」とする前置きがどうしても必要です。**この様に　（＊）　は、（ｉ）を完全に理解するためには欠くことのできない認識なのです。**つまり**（ｉ）　の本質は　（＊）　にある**のです。**教科書には登場しないものの　（＊）　は、はっきりと大きく黒板に記されることが絶対に必要なもの**なのです。

　こうして一見すると風変わりな**（＊）は**　$|f(x)|>g(x)$　の解法などを持ち出すまでもなく、**高校数学の絶対値の基礎的理解にとって、大変重要なものである**ことがわかります。

　絶対値の意味の全貌を、単元の最初の授業で掲げた定義だけを頼りに理解させようというのは**危険**です。麗しい樹木にもたとえられそうな数学の理論は見事な枝分かれを成しています。一つの観点だけから説明しつくそうとする、または説明しつくそうと志すのは、一筆書きで枝分かれした線をたどろうとするようなもので、無理の多い事態ばかり招くことになります。たまには成功するでしょうし、それはそれで素敵なことかもしれません。でもそのような成功ばかり狙うのは見当違いです。

$|a|$=『実数直線上の 2 点 A(a)と O(0)の距離』$=\max\{a,-a\}=\sqrt{a^2}=$　･･･

･･･何とも色々な顔をもつ絶対値。絶対値は１次元ヒルベルト空間 $\mathbb{R}$ のノルム。つまり何でもやってのけてしまう魔法使いである『内積』の、分身のような存在。色々な面があって当然なのです。