不定積分について

北海道倶知安高等学校
数学科　原田　　牧夫

教える側も呆れるほどの曖昧さをまとった「不定積分」。数学的にしっかりとした土台の上にその真の姿を浮かび上がらせることで，教科書での扱われ方を検討し，さらに積分の指導の改善案を述べます。

[Ⅰ]不定積分の(不完全な)線形性について

① $\int f(x)dx$ と「＝」の違い

驚くべきことに $\int f(x)dx$ の意味は教科書によって違います。まず不定積分の定義から見ていきましょう。

[数研出版改訂版高等学校数学Ⅱ](以下[研Ⅱ]と略す)ｐ．１３５～１３６
関数 f(x)に対して，微分すると f(x)になる関数，すなわち F'(x)=f(x)となる関数 F(x)を，f(x)の不定積分または原始関数という。‥‥‥x^3, x^3+1 はいずれも $3x^2$ の不定積分である。‥‥‥関数 f(x)の不定積分を，$\int f(x)dx$ で表す。‥‥‥F(x)を f(x)の１つの不定積分とすると，f(x)の任意の不定積分は

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad \text{Cは定数}$$

と表される。この定数Ｃを積分定数という。

[啓林館高等学校最新数学Ⅱ] (以下[啓Ⅱ]と略す)ｐ．１３４～１３５
微分すると f(x)になる関数 F(x)を，f(x)の原始関数という。‥‥‥f(x)の原始関数の１つを F(x)とすると，f(x)の任意の原始関数は，次の形で表すことができる。

$$F(x)+C \qquad \text{ただし，Cは任意の定数}$$

これを f(x)の不定積分といい，$\int f(x)dx$ で表し，Ｃを積分定数という。

まず[研Ⅱ]の定義では，$\int 3x^2dx = x^3$，$\int 3x^2dx = x^3+1$，$\int 3x^2dx = x^3-2$，のどれもが正しいこととなります。そして単に $\int 3x^2dx$ と記されてある場合，この $\int 3x^2dx$ は「何らかの適当な定数Ｃを用いて x^3+C と記せるある関数」を意味していることとなり，その意味で，

$$\int 3x^2dx = x^3+C \quad \text{Cは定数}$$

であるのです。少し注意深く眺めると，記号「＝」のもつべき対称律と推移律に従えば，**[研Ⅱ]のこの箇所で登場している「＝」が $x^3=x^3+1$ なども認める特殊な記号である**ことがわかります。[研Ⅱ]p．１３７には「不定積分の等式では，各辺の積分定数を適当に定めると，その等式が成り立つことを意味している。」という注意書きがあります。

一方[啓Ⅱ]の定義は，数学的にはなはだしく曖昧なものになっています。「f(x)の任意の原始関数は，次の形で表すことができる。　　F(x)+C　　ただし，Cは任意の定数」という箇所はどうもいただけません。f(x)の任意の原始関数を「表す」には，任意に固定された f(x) に対して適当なCが存在して，

「f(x) の原始関数で任意に固定されたもの」＝F(x)+C

となるのが正しい数学的論理です。つまり「表される対象である任意の原始関数」は，F(x)+C の形に「表される」直前には，すでに固定されていなければならないのです。

「Cは任意の定数」とした「任意性」は先に固定された「f(x)の任意の原始関数」に従った任意性なのだ，という弁解を許すことにすれば，[研Ⅱ]と[啓Ⅱ]の二つの不定積分の定義は一致するものと見なせそうですが，ここから先の箇所で[研Ⅱ]の∫f(x)dx と[啓Ⅱ]の∫f(x)dx との大きな違いが出現するのです。そしてその違いは「Cは任意の定数」という表現の曖昧さと，無関係とはいえないものなのです。

②不定積分の計算について　その１

[啓Ⅱ]p．１３６（ただし下線は原田による）

例えば，$f(x)=4x^2$ の不定積分は次のようになる。

$\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$ だから，$\left(4\times\frac{x^3}{3}\right)'=4x^2$

よって，$$\int 4x^2dx=\frac{4}{3}x^3+C$$

また，$$4\int x^2dx=4\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)=\frac{4}{3}x^3+4C_1$$

で，<u>４C_1は任意の値をとり得るから</u>，次の等式が成り立つ。

$$\int 4x^2dx=4\int x^2dx$$

次に，関数 $f(x)=x^2+x$ の不定積分を求めてみよう。

$\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)'=x^2+x$ だから，

$$\int\left(x^2+x\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$$

また，

$$\int x^2dx+\int xdx=\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)+\left(\frac{x^2}{2}+C_2\right)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1+C_2$$

で，<u>C_1＋C_2は任意の値をとり得るから</u>，次の等式が成り立つ。

$$\int\left(x^2+x\right)dx=\int x^2dx+\int xdx$$

上の下線２箇所は注目に値します。これらの箇所は，[啓Ⅱ]が

$$\int f(x)dx :=$$「f(x)の原始関数の一般形」

という解釈をしていることを示しています。なぜそのような姿勢をとるのでしょうか。答えは明白です。そのような扱いをしないと，どうしても[研Ⅱ]のような風変わりな「＝」が必要になるからです。$\int f(x)dx$ の表すものが f(x)の任意の原始関数の一つである場合，たとえば

$$\int f(x)dx = \int f(x)dx$$

という式において, 右辺と左辺とで考えられている原始関数に何らかの定数だけの違いが生ずる可能性があり，その場合,「＝」の記号は「同一であること」を意味しなくなってしまうのです。$\int f(x)dx :=$「f(x)の原始関数の一般形」としておけば,「＝」は普通の同一性を示す記号のまま(ある程度まで)自由に使えるわけです。

しかしこの[啓Ⅱ]の解釈による場合，$\int 0 \cdot f(x)dx = \int 0dx = C$，$0 \cdot \int f(x)dx = 0$　となり，公式　$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$　は，k=0　の場合には成立しないことになります。つまり**[啓Ⅱ]の方法では不定積分の線形性が成り立たない**のです。

一方[研Ⅱ]では不定積分の線形性が成り立っているといえるのでしょうか。確かに[研Ⅱ]ｐ．１３７には堂々と

$$\int \{k \cdot f(x) + \ell \cdot g(x)\}dx = k \cdot \int f(x)dx + \ell \cdot \int g(x)dx$$

という公式が記されてはあるのですが，前述のとおりこの式の「＝」は同一性をあらわすものではなくなっています。つまり**[研Ⅱ]の方法でも不定積分には擬似的な線形性しか成り立たない**のです。

では一体どちらの手法が理にかなったものなのでしょうか。それともどちらとも間違いなのでしょうか。そして[研Ⅱ]の不定積分の「＝」は結局のところ何者なのでしょうか。次の③において，これらのことについて考えてみましょう。

③不定積分の計算について　その２

不定積分に望まれる線形性は，微分の線形性に裏付けられたもののはずです。このことは微分することと不定積分を求めることとが互いに逆操作であるという事実(というよりも信条)に基づいているのですが, 実際は微分することと不定積分を求めることとが互いに完全な逆操作であるわけではありません。

確かに任意の閉区間[a,b]上で定義された連続関数の不定積分については，微分するともとの関数になります。原始関数を微分してもとの関数を得るこの微分の操作は，[a,b]上で定義されたC^1級実数値関数の全体のつくる線形空間 $C^1([a,b])$から, [a,b]上で定義された実数値連続関数の全体のつくる線形空間$C([a,b])$への線形写像

$$D : C^1([a,b]) \ni f \mapsto f' \in C([a,b])$$

に一致します。微分の線形性に裏付けられたものとして不定積分の線形性を得るためには, この写像の逆写像(のようなもの)を考えなければなりません。しかしDは全射ですが単射ではありません。逆写像(のようなもの)を考えるためにはDによって導入される線形同型写像

$$D^{\wedge} : C^1([a,b]) / \mathrm{Ker}D \ni f + \mathrm{Ker}D \mapsto f' \in C([a,b])$$

の逆写像

$$\Sigma : C([a,b]) \to C^1([a,b]) / \mathrm{Ker}D$$

を考えるのが妥当のはずです。ここで

$$\mathrm{Ker}D = \{f \mid f:[a,b] \to \mathbb{R}(\text{定数関数})\}$$

ですので，ここに登場している商線形空間$C^1([a,b]) / \mathrm{Ker}D$は，集合としては，$C^1([a,b])$上の同値関係

$$F \sim G :\Leftrightarrow F \in C^1([a,b]) \wedge G \in C^1([a,b]) \wedge F - G \in \mathrm{Ker}D$$

による$C^1([a,b])$の分割と一致していることに注意しましょう。一方，Σの作り方から，

$$\forall f \in C([a,b]),\ \Sigma(f) = \text{"}f\text{ の原始関数全体の集合"}$$

です。つまりΣ(f)は，「[研Ⅱ]の言うところの$\int f(x)dx$」の表す全ての関数からなる集合であるわけです。Σは線形なので，

$$\forall f, g \in C([a,b]),\quad \Sigma(k \cdot f + \ell \cdot g) = k \cdot \Sigma(f) + \ell \cdot \Sigma(g). \cdots\cdots(\mathrm{a})$$

が成り立ちます。ここでの「＝」は同一性を表す通常の等号であり，(ａ)は完全な線形性を表しています。つまり**(ａ)こそが微分の線形性に裏付けられた不定積分の線形性の理想の姿**なのです。この(＊)を「[研Ⅱ]の言うところの$\int f(x)dx$」で表現しなおすと

$$\int \{k \cdot f(x) + \ell \cdot g(x)\} dx \quad \sim \quad k \cdot \int f(x)dx + \ell \cdot \int g(x)dx$$

となります。

以上の議論から，**[研Ⅱ]の「＝」は我々の同値関係「～」を表す記号である**こと，そして，**[研Ⅱ]では公式**

$$\int \{k \cdot f(x) + \ell \cdot g(x)\} dx = k \cdot \int f(x)dx + \ell \cdot \int g(x)dx$$

によって真の線形性の姿(＊)が完全に表現されていること，がわかります。**[研Ⅱ]のこの方法が自然なものであり，k=0 の場合を除外してしまう[啓Ⅱ]の方法は避けるべきである**ことはこれで明らかです。

[研Ⅱ]の「＝」が我々の同値関係「～」であることが判明した今，我々はまた別の課題に直面させられていることに気付かねばなりません。

まず冒頭に述べた式

$$\int 3x^2 dx = x^3 \cdots\cdots(\mathrm{b})$$

について再吟味しなければなりません。(ｂ)の直前に「次に掲げる式(ｂ)において，$3x^2$ の原始関数 x^3 を $\int 3x^2 dx$ で表すならば」という前置きを据える場合は，(ｂ)の「＝」は，「～」とも，同一性を表す「＝」とも，解釈可能です。しかしこのような前置きが無く，ただ単に(ｂ)のみが記されてある場合には，(ｂ)の「＝」は，「～」と解釈する以外にありません。

次に「$\int 3x^2 dx = x^3$，と　$\int 3x^2 dx = x^3+1$　とから記号「＝」のもつべき対称律と推移律に従って，$x^3 = x^3+1$ を得た」という箇所は，次のように訂正されるべきです。「～」および同一性の意味での「＝」を用いて説明します：

$$\int 3x^2 dx = x^3 \cdots\cdots(\mathrm{c}\,1) \quad \int 3x^2 dx = x^3+1 \cdots\cdots(\mathrm{c}\,2)$$

とすると

「(ｃ１)の $\int 3x^2 dx$ 」～「(ｃ２)の $\int 3x^2 dx$ 」

により

$$x^3 \sim x^3+1$$

が成り立つ。

今度は[研Ⅱ]ｐ．１３７例２１の

$$\int 3x^2 dx = x^3+C \quad C\text{は積分定数}\cdots\cdots(\mathrm{d})$$

に注目しましょう。この式に用いられている「＝」が「～」の意味のものであるなら，（ｄ)の積分定数Ｃは無くても良いはずです。わざわざＣを用いている(ｄ)の「＝」は，単なる「～」

と解釈できるだけではなく，同一性を示す普通の「＝」とも解釈できます。つまりすでに述べた通り，同一性を示す普通の「＝」を用いて，

単に$\int 3x^2dx$と記されてある場合，この$\int 3x^2dx$は「何らかの適当な定数Ｃを用いて x^3+Cと記せるある関数」を意味していることとなり，その意味で，

$$\int 3x^2dx = x^3+C \quad C\text{は積分定数}$$

であるということを意味しているのだ，とも解釈できるのです。

この様に，

積分定数Ｃには「～」としての「＝」の意味を，
同一性にまで格上げする働きがある

わけです。そしてこの観点に立って，[研Ⅱ]の流儀(つまり正当な流儀)で記された

$$3\int x^2dx = \int 3x^2dx = x^3+C \cdots\cdots (e)$$

という式を，「～」，および同一性を示す普通の「＝」とを用いて明確に記すと，

$$3\int x^2dx \sim \int 3x^2dx \quad \text{かつ} \quad \int 3x^2dx = x^3+C_1,$$

$$\text{従って} \quad 3\int x^2dx = x^3+C_2.$$

となります。**これが(ｅ)の本当の意味です**。

④不定積分の問題点　その１

以上で示した通り，**不定積分の等式を十分に理解するには，同値関係の知識が前提**になっているわけです。生徒は確かに[研Ⅱ]ｐ．１３７の注意書き「不定積分の等式では，各辺の積分定数を適当に定めると，その等式が成り立つことを意味している。」に従って不定積分の等式を扱うことはできても，その操作は不完全なものでしかありません。

「研Ⅱ」に現れる議論の当然の帰結である $\int 3x^2dx = x^3$，$\int 3x^2dx = x^3+1$　という式は，$x^3+1 = x^3$ という式を誘発しますが，この式に対する注釈として[研Ⅱ]ｐ．１３７の注意書きは，何の手助けにもなりません。だからこそ[研Ⅱ]では基本的帰結であるはずの $\int 3x^2dx = x^3$，$\int 3x^2dx = x^3+1$　などという式を明示することが避けられているのです。しかしこれほど基本的な帰結すら明示できない有様では，高校数学がいかに直感優先であるとしても，話になりません。高校において記号 $\int f(x)dx$ を学ばせることは，控えるべきなのではないでしょうか。

[Ⅱ]不定積分と原始関数―――不定積分の問題点　その２

まず[数研出版改訂版高等学校数学III]（以下[研III]と略す）から３箇所を引用します。

> [研III]ｐ．８
>
> 関数 f(x) が x の式で表されているとき，その定義域について特に断りがない場合は，関数 f(x) の定義域は，f(x) の値が実数として定まるようなすべての実数 x の集合とする。

[研Ⅲ]ｐ．８６

$$\left(\log|x|\right)' = \frac{1}{x}, \qquad \left(\log_a|x|\right)' = \frac{1}{x\log a}$$

[研Ⅲ]ｐ．１３６

一般に，関数 f(x) に対して，微分すると f(x) になる関数を，f(x) の不定積分または原始関数といい，記号 $\int f(x)dx$ で表す。

これらに従う限りにおいては、

$$\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \log x + C_1 & (x > 0) \\ \log(-x) + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

となってしまいます。当然これは誤りだとしたい代物のわけですが、不定積分の被積分関数の定義域が連結でなければならない、すなわち一つの区間でなければならない，という重要な事項がこの教科書には見当たらないようです。注意深く追っていくと、この連結の仮定は先ほど引用した[研Ⅲ]ｐ．１３６の箇所および

[研Ⅲ]ｐ．７２（ただし下線は原田による）

関数 y=f(x) が，ある区間の任意の実数値 a について，x=a で微分可能であるとき，f(x) は，その区間で微分可能であるという。

このとき，<u>区間内の</u>任意の値 a に f '(a) を対応させて得られる関数を f (x) の導関数といい，f '(x), y ', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$ などで表す。

によって，示唆されていることがわかります。しかし、この点を強調したとしても、

なぜ不定積分の被積分関数の定義域が連結でなければならないのか

については納得の行くような説明が出来たことにはならないでしょう。

[付録]不定積分・定積分の指導の改善案

1．被積分関数はその積分区間における零点が有限個の連続関数に限ることにします。

つまり　$f(x):=x\sin\frac{1}{x}\ (x>0)$,　$f(0):=0$　などという関数については，$\int_0^1 f(x)dx$　などは扱わないものとするわけです。

2．閉区間[a,b]上で定義された１．の関数の定積分を次のような符号付面積の和として定義します。

$$\int_a^b f(x)dx := S^{+} - S^{-}$$

ただし
$S^{+}:=$　$f(x)\geqq 0$ となるすべての区間においてグラフと x 軸とが挟む部分の面積の和
$S^{-}:=$　$f(x)\leqq 0$ となるすべての区間においてグラフと x 軸とが挟む部分の面積の和

とします。この定義の特別な場合として　$\int_a^a f(t)dt = 0$　が得られます。

3．$F(x):=\int_a^x f(t)dt$　$(a\leqq x\leqq b)$とすると，$F'(x)=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$かつ $F(a)=0$ となることを示す。この箇所は現行の教科書の積分の章の「面積」の導入部分とほとんど同じです。

4．原始関数の概念を導入し，３．の F(x)を手がかりとして，f(x)の任意の原始関数 G(x)について

微積分学の基本定理　$\int_a^b f(t)dt = G(b)-G(a)$

が成り立つことを示す。

５．$\int_b^a f(t)dt := -\int_a^b f(t)dt$　と定義し，任意のα，β∈[a,b]について

$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$　が成り立つことを示す。

現行の数学Ⅱの段階であれば，１．の関数を整関数に限定しても良いでしょう。
以上の導入プランによれば，積分記号の意味を理解し，また，なぜ被積分関数の定義域が連結でなければならないのか，についての自然な認識を得ることができます。
記号∫f(x)dx については，微分方程式を学ぶ段階で与えれば十分であると考え，高校数学には正式には登場させるべきではないと考えます。そうすることで失うものよりもはるかに大切な積分の意味を生徒に自然に理解させることができるからです。

また，この改善案では，まず原始関数を定義し，それから定積分を $\int_\alpha^\beta f(t)dt = F(\beta) - F(\alpha)$ によって定義するという現行の方法が回避されています。現行の方法は ”Foundations of Modern Analysis”(Dieudonne のこの名著が数学教育に多大な影響を与えたのは明らかでしょう)の方法ですが，Dieudonne がこの方法を採用したのは Banach 空間に値をとる関数に対して積分を考えたかったからなのです。現行の微積分の教育課程がそのような経緯を無視して実数値関数の積分しか扱わない高校数学に彼の方法を持ち込んだ結果なのだとしたら，あまりにお粗末としか言い様がありません。再考されるべきです。