パスカルの三角錐(三項係数)

二項定理とパスカルの三角形

$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$ の両辺の係数比較により

${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ （$n > r > 0$） が成り立つ。このことと

${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$ （$n \geq 0$）とからパスカルの三角形

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & {}_0C_0 & & & \\
 & & {}_1C_0 & & {}_1C_1 & & \\
 & {}_2C_0 & & {}_2C_1 & & {}_2C_2 & \\
{}_3C_0 & & {}_3C_1 & & {}_3C_2 & & {}_3C_3
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

が成立する。

三項定理とパスカルの三角錐

$(a+b+c)^n = (a+b+c)(a+b+c)^{n-1}$ の両辺の係数比較により

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,q!\,r!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(q-1)!\,r!} + \frac{(n-1)!}{p!\,q!\,(r-1)!} \qquad (n = p+q+r,\quad p>0,\quad q>0,\quad r>0)$$

が成り立つ。このこととパスカルの三角形から、次の断面図で示されるような『パスカルの三角錐』を得る。

$$\frac{0!}{0!0!0!} = 1$$

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1!}{0!0!1!} & & & & \frac{1!}{1!0!0!} \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & \left[\frac{0!}{0!0!0!}\right] & & \\ & \iddots & & & \\ \frac{1!}{0!1!0!} & & & & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccc} 1 & & & & 1 \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & [1] & & \\ & \iddots & & & \\ 1 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{2!}{0!0!2!} & & & & \frac{2!}{1!0!1!} & & & & \frac{2!}{2!0!0!} \\ & \ddots & & \iddots & & \ddots & & \iddots & \\ & & \left[\frac{1!}{0!0!1!}\right] & & & & \left[\frac{1!}{1!0!0!}\right] & & \\ & \iddots & & & & \iddots & & & \\ \frac{2!}{0!1!1!} & & & & \frac{2!}{1!1!0!} & & & & \\ & \ddots & & \iddots & & & & & \\ & & \left[\frac{1!}{0!1!0!}\right] & & & & & & \\ & \iddots & & & & & & & \\ \frac{2!}{0!2!0!} & & & & & & & & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & & & & 2 & & & & 1 \\ & \ddots & & \iddots & & \ddots & & \iddots & \\ & & [1] & & & & [1] & & \\ & \iddots & & & & \iddots & & & \\ 2 & & & & 2 & & & & \\ & \ddots & & \iddots & & & & & \\ & & [1] & & & & & & \\ & \iddots & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{3!}{0!0!3!} & & \frac{3!}{1!0!2!} & & \frac{3!}{2!0!1!} & & \frac{3!}{3!0!0!} \\
 & \ddots \qquad \iddots & & \ddots \qquad \iddots & & \ddots \qquad \iddots & \\
 & \left[\frac{2!}{0!0!2!}\right] & & \left[\frac{2!}{1!0!1!}\right] & & \left[\frac{2!}{2!0!0!}\right] & \\
 & \iddots & & \iddots & & \iddots & \\
\frac{3!}{0!1!2!} & & \frac{3!}{1!1!1!} & & \frac{3!}{2!1!0!} & & \\
 & \ddots \qquad \iddots & & \ddots \qquad \iddots & & & \\
 & \left[\frac{2!}{0!1!1!}\right] & & \left[\frac{2!}{1!1!0!}\right] & & & \\
 & \iddots & & \iddots & & & \\
\frac{3!}{0!2!1!} & & \frac{3!}{1!2!0!} & & & & \\
 & \ddots \qquad \iddots & & & & & \\
 & \left[\frac{2!}{0!2!0!}\right] & & & & & \\
 & \iddots & & & & & \\
\frac{3!}{0!3!0!} & & & & & &
\end{array}
$$

$$
=
\begin{array}{ccccccc}
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & \ddots \qquad \iddots & & \ddots \qquad \iddots & & \ddots \qquad \iddots & \\
 & [1] & & [2] & & [1] & \\
 & \iddots & & \iddots & & \iddots & \\
3 & & 6 & & 3 & & \\
 & \ddots \qquad \iddots & & \ddots \qquad \iddots & & & \\
 & [2] & & [2] & & & \\
 & \iddots & & \iddots & & & \\
3 & & 3 & & & & \\
 & \ddots \qquad \iddots & & & & & \\
 & [1] & & & & & \\
 & \iddots & & & & & \\
1 & & & & & &
\end{array}
$$