数学的帰納法の「応用」

北海道倶知安高等学校
数学科　原田　　牧夫

まず[啓林館高等学校最新数学Ａ](以下[啓Ａ]と略す)から引用します。

[啓A]p．８６

例題１２　$a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$　(n=1,2,3,･･･)　で決まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定し，それが正しいことを証明せよ。

解　$a_2 = 2 - \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{3}{2}$，　$a_3 = 2 - \dfrac{1}{a_2} = \dfrac{4}{3}$，　$a_4 = 2 - \dfrac{1}{a_3} = \dfrac{5}{4}$

よって，一般項 a_n は次の次のようになると推定できる。

$$a_n = \frac{n+1}{n} \qquad \cdots\cdots①$$

この推定が正しいことを，数学的帰納法で証明する。

（Ⅰ）　n=1 のとき，$a_1 = \dfrac{1+1}{1} = 2$ だから，①は成り立つ。

（Ⅱ）　n=k のとき，①が成り立つとすると，$a_k = \dfrac{k+1}{k}$ だから，

$$a_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_k} = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{2(k+1)-k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

よって，n=k+1 のときにも①は成立する。

（Ⅰ)，(Ⅱ）より，①はすべての自然数ｎについて成り立つ。

この例題１２の解答については,

$$a_n = \frac{n+1}{n} \qquad \cdots\cdots①$$

という推定を得た後は

①で定まる数列について

$a_n = \dfrac{n+1}{n}$,

$\therefore a_1 = \dfrac{1+1}{1} = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$,

$2 - \dfrac{1}{a_n} = 2 - \dfrac{1}{\frac{n+1}{n}} = 2 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} = a_{n+1}$.

∴①の数列は問題の条件を満たす。∴①の推定は正しい。

とする解答も可能です。この別解(以下[第２解]と略す)の場合は数学的帰納法を用いずに済んでしまいます。上に引用した教科書の解答(以下[啓Ａ解]と略す)と[第２解]とでは一体どちらが優れた解法なのでしょうか。問題文では,

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$ で決まる数列$\{a_n\}$

とされています。この「で決まる」という言い回しからもわかるように，高等学校の数学では「漸化式で定義された数列の存在と一意性」は暗黙に仮定されます。

ところでこの「存在と一意性」については，現代数学では，公理的集合論の範疇に属するものであり，次のように立言・証明されるべきものです。道草覚悟で記しておきます：

《漸化式で定義された数列の存在と一意性》

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \forall \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R},$

$\exists ! \{a_n\}, [1 \leqq \forall j \leqq k,\ a_j = \alpha_j.], [\forall m \in \mathbb{N},\ a_{m+k} = f(a_m, \cdots, a_{m+k-1}).].$

《証明》

$\boxed{\text{存在}}$

$k \leqq \forall m \in \mathbb{N}$, に対して, $p_k^m : \mathbb{R}^m \ni (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_{m-k+1}, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^k$　と定める。

$F := \{ (x,y) \mid k \leqq \exists m \in \mathbb{N}, \exists (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m, 1 \leqq \exists \ell \leqq m,$

$$[1 \leqq \forall j \leqq k,\ x_j = \alpha_j.], [k \leqq \forall j < m,\ x_{j+1} = \left(f \circ p_k^j\right)\left(x_1, \cdots, x_j\right).], (x,y) = (\ell, x_\ell). \}$$

とすると, 明らかに

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in F$ s.t. $x_1 = x_2$,　$y_1 = y_2$.

従って関係 F は関数である。

F の定義域を Dom(F)とおくと

$\mathbb{N} \supset \mathrm{Dom}(F)$ は明らか。

また数学的帰納法によって

$\forall n \in \mathbb{N}, \{1, \cdots, n\} \subset \mathrm{Dom}(F)$.

従って　$\mathbb{N} \subset \mathrm{Dom}(F)$,　$\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{N}$.

$a_m := F(m)$　$(\forall m \in \mathbb{N})$

とすると, 数列$\{a_n\}$は題意の条件を満たす。

$\boxed{\text{一意性}}$

数学的帰納法による[とだけ記しても良いでしょうが詳しく記すと以下の通りです]。

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \forall \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$,

$$\forall \{a_n\},\{b_n\} \text{ s. t.} \left[\begin{array}{l} [1 \leqq \forall j \leqq k,\ a_j = b_j = \alpha_j.] \\ \wedge [\forall m \in \mathbb{N},\ a_{m+k} = f(a_m, \cdots, a_{m+k-1}), b_{m+k} == f(b_m, \cdots, b_{m+k-1}).] \end{array}\right]$$

を固定する。

$P := \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n .\}$　とすると

$1 \leqq \forall j \leqq k,\ j \in P$.

$\forall m \in \mathbb{N}$ s.t. $[m, \cdots, m+k-1 \in P.]$,　$m+k \in P$.

$\therefore P = \mathbb{N}$.

$\therefore \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

つまり$\{a_n\} = \{b_n\}$.　　■

「存在と一意性」を抜きにして考えると，[第２解]自体は，

数列$\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$が条件　$a_1=2$　かつ　$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$　(n=1,2,3,･･･)を満たす　------(あ)

ということを示しています。[第２解]は，前述の暗黙に仮定された「漸化式の解の一意性」と結託して

条件　$a_1=2$　かつ　$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$　(n=1,2,3,･･･)　を満たす数列は唯一存在し，
それは数列$\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$である　------(い)

ということを示したことになるわけです。

　では一方，推定後の箇所の[啓Ａ解]は，それ自体で何を示しているのでしょう。推定後の箇所の[啓Ａ解]の正体は

条件　$a_1=2$　かつ　$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$　(n=1,2,3,･･･)　を満たす任意の数列は
$\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$に等しい　------(う)

ということです。この「任意の」という箇所に疑問を持たれる人がいるかもしれませんが，同値に言い換えて

条件　$a_1=2$　かつ　$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$　(n=1,2,3,･･･)　を満たす数列で
$\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$に等しくないものは存在しない　------(え)

としてみると納得がいくでしょう。では[啓Ａ解]は，それ自体で，つまり「存在と一意性」の仮定抜きで，(い)を示していることになるのでしょうか。答えは**否**です。(う)の対偶であるところの

$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$に等しくない数列は,

条件　$a_1=2$　かつ　$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$　(n=1,2,3,･･･)　を満たさない　------(お)

ということを述べているだけであり，(あ)については何ら触れていないのです。

つまり，推定後の箇所の[啓Ａ解](う)もまた，暗黙に仮定された「漸化式の解の存在」の下に位置づけられてはじめて(い)を示したこととなるのです。

結局**[啓Ａ解]と[第２解]のどちらも，それ自体で(い)を示している証明ではない**のです。となると，解答としては簡潔な[第２解]の方が優れたものであるわけです。わざわざ数学的帰納法を持ち出している[啓Ａ解]はいかがなものでしょう。これは「ドングリの背比べ」などという安易なものではありません。**数学的帰納法にふさわしくない場面では数学的帰納法を使わない、ということも数学的帰納法の理解にとって重要な事項なのです**。[啓Ａ解]は数学的帰納法に初めて出会う生徒たちにとって，ただただ混乱を招くだけの愚解と言わざるを得ません。教科書ですので、影響は測り知れません。[旺文社高等学校数学Ａ改訂版](以下[旺Ａ]と略称)ｐ．８９例題５の解（以下[旺Ａ解]と略称）も同様です。つまりこのような愚解が１社に留まらないのです。[啓Ａ]と[旺Ａ]は旧(現行)学習指導要領の時期のものなのですが、次をご覧ください。

[高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編] (以下[新要領解説]と略称)ｐ．９１

･･････漸化式を用いて表される数列の一般項を推測し，数学的帰納法を用いてその推測が正しいことを証明することも考えられる。例えば，$a_{n+1}=2a_n+1$，$a_1=1$ で表される数列の 一般項を 2^n-1 と推測して証明することなどを扱うことが考えられる。

現行学習指導要領の解説数学編にはこの様な箇所は見当たりません。次に掲げるのはこの愚解が入試問題にまで登場してしまっている例です。

[北海道情報大学経営学科平成１２年度一般入学試験第２期]

$\boxed{2}$

数列｛a_n｝を，次の漸化式で定義する。ただしｒは定数である。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (n+1)\cdot r^n + r\cdot a_n \, (n = 1,2,3,\cdots\cdots)$$

次の問に答えよ。

（１）数列｛a_n｝の初項から第５項までを計算し，一般項 a_n を推測せよ。

（２）（１）で推測した一般項が正しい事を，数学的帰納法によって証明せよ。

つまり

学習指導要領解説数学編　教科書　入試問題

この３段階すべてで誤っているわけで、被害の域は生徒・受験生・数学教師に留まりません。私たちの教育は未来の世界に対しても責任を負っているからです。[新要領解説]のこの箇所は直ちに改めるべきでしょう。

我々教師は絶えず教材を疑うことが大切だと思います。「疑う」というのはあまり良い言葉ではありませんが、流行や権威に甘えるのではなく、自分で確証を得たもののみを教える責任があると思うのです。だからこそ教材研究が大切にされなければならないわけです。