２００６年３月北大文系$\boxed{1}$について――――――何が大切か

倶知安高校数学科　原田　牧夫

２００６年３月北大文系

$\boxed{1}$ｂは実数とし，ｃは０でない実数とする。２次方程式ｘ^2＋ｂｘ＋ｃ＝０の解をα，βとおく。

（１）α，βはともに０でないことを示せ。

（２）$\dfrac{\alpha}{\beta}$または$\dfrac{\beta}{\alpha}$が実数ｒに等しいとき，ｂ^{2}をｃとｒを用いて表せ。

ここで取り上げたいのは、問題（２）のほうです。この入試問題の解答は速報としてインターネット上に公開されています。私は３／１７（金）夜遅くになって、次の２つを見つけました。

A　http://hiw.oo.kawai-juku.ac.jp/nyushi/honshi/06/ho1.html

B　http://www.sundai.ac.jp/yobi/sokuhou/hokkaido/sugakua/index.htm

最終的な答は

Aでは　$b^2=\dfrac{c(r+1)^2}{r}$ (ただし $cr>0$ また $r=-1$)、

B では　$b^2=\dfrac{c(r+1)^2}{r}$

となっていました。

実はこれらを見つけた日、車で往復４時間半以上かかる距離をＳ市まで出向いて、Ｂのほうの予備校の入試の研究会に参加していたのです。恥ずかしながら、その研究会で初めてこの問題の存在を知ったわけなのですが、研究会では、答はＡと同じく$b^2=\dfrac{c(r+1)^2}{r}$ (ただし $cr>0$ また $r=-1$)　*でした。この研究会で配布された「解答例」をＣとしておきます。予備校Ｂは自校の速報を改善してＣとしたことと思われます。そうすると、この問題の答え方としては*

$$b^2=\frac{c(r+1)^2}{r}\cdots\cdots①$$

よりも

$$b^2=\frac{c(r+1)^2}{r}\ (\text{ただし } cr>0 \text{ また } r=-1)\cdots\cdots②$$

のほうが良いのだ、ということなのでしょうか。

ところが、②の答を掲げているＡとＣの答案は、とても不思議なものでした。どちらの答案でも、とりあえず$b^2=\dfrac{c(r+1)^2}{r}$ *は得ているのですが、ｃとｒの制約である*「ただし $cr>0$ また $r=-1$」*を得る方法が、あまりに煩雑な上に、記述は②の必要性のみの解答で終わり、②の十分性を明確に述べてはいないものだったからです。*

答が①だけなのであれば、それが必要性のみの記述のものであっても、自然な答案(それが望ましいかどうかは別問題として)といえるでしょう。

しかし答が②になるような模範答案を作成する場合、②の十分性を欠かすことは普通はないでしょう。というのは、「ただし $cr>0$ または $r=-1$」という付加は、このような条件ならば必ず成立するのだ、という十分性の強調を含む主張だからです。この不可解な現象の謎解きはさておき、摩訶不思議な模範答案では、混乱を招きかねません。以下に拙作を２つ，解答Ｘと解答Ｙとして作成してみました。よろしければご覧ください。

解答Ｘ

$\dfrac{\alpha}{\beta}$ または $\dfrac{\beta}{\alpha}$ が実数ｒに等しいことから

適当な複素数ｚに対して、２次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解はｚ，ｒｚである。

解と係数の関係から、

$b=-(z+rz)=-z(1+r)$,

$c=z\,rz=rz^2$.

$\therefore b^2=\dfrac{c(r+1)^2}{r}$.

問題が要求している文面通り、「b^2 をｃとｒを用いて表わ」したのだから解答Ｘで正解です（な～んてことは断言できる立場にはないのですが、そうであって欲しいものですね)。完全に示すならば、次の通り：

解答Ｙ

（１）により問題の条件が成り立つとき，$\alpha\neq0$ かつ $\beta\neq0$ かつ $r\neq0$ である。……(＊)

命題[Ａ]

任意の実数ｂと、０でない任意の実数ｃと、０でない任意の実数ｒについて、次の[Ⅰ]～[Ⅵ]は互いに同値である：

[Ⅰ]0 以外の複素数α，βで次の条件をみたすものが存在する：

(あ)２次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解がα，βである.

(い) $\dfrac{\alpha}{\beta}=r$ または $\dfrac{\beta}{\alpha}=r$.

⇔

[Ⅱ]0 以外の複素数ｚで次の条件をみたすものが存在する：

(あ)２次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解がｚ，ｒｚである.

⇔

[Ⅲ]0 以外の複素数ｚで次の条件をみたすものが存在する：

(あ) $b=-z(1+r)$.

(い) $c=rz^2$.

⇔

[IV] $b^2=\dfrac{c(r+1)^2}{r}$.

⇔

[Ⅴ] $b^2=\dfrac{c(r+1)^2}{r}$ かつ（$r+1=0$ または $\dfrac{c}{r}>0$）.

⇔

[VI] $b^2=\dfrac{c(r+1)^2}{r}$ かつ（$r=-1$ または $cr>0$）.

<u>命題[Ａ]の証明</u>

[Ⅰ]⇔[Ⅱ]⇔[III]⇒[IV]、[Ⅴ]⇒[IV]、[Ⅴ]⇔[VI]はどれも明らか。

<u>[IV]⇒[III]の証明</u>

[IV]が成り立つとき,

複素数 $z^2=\dfrac{c}{r}$ を満たす複素数 z のうち、$b=-z(1+r)$ を満たすものをとることができるので、

[III]が成り立つ．よって命題[A]が成り立つ。

<u>[IV]⇒[Ⅴ]の証明</u>

[IV]が成り立つとき,

$\dfrac{c}{r}$ は０ではない実数であり，ｂは実数なので $b^2\geqq 0$，$1+r$ は実数なので $(1+r)^2\geqq 0$.

$\therefore r+1=0$ または $\dfrac{c}{r}>0$.

よって[Ⅴ]が成り立つ。

以上から命題[Ａ]が成り立つ。

(＊)と命題[A]により、問題の条件が成り立つことは

$b^2=\dfrac{c(r+1)^2}{r}$ かつ（$r=-1$ または $cr>0$）

と同値である。

(答) $b^2=\dfrac{c(r+1)^2}{r}$（ただし $r=-1$ または $cr>0$）.

これで完璧ですが、命題[Ａ]が[IV]までしかなく、答が

$$b^2=\frac{c(r+1)^2}{r}$$

となっても、あまり気にすることはないと思います。言い方を変えれば、「答 $y=\sqrt{x}$ $(x\geqq 0)$」*とするか、それとも*「答 $y=\sqrt{x}$ 」*だけでよいか、そんな違いに過ぎません。それよりも大切なのは、[Ⅰ]⇔[IV]がしっかりと示せているか。それが解答Ｙのポイントです（な～んてことは断言できる立場にはないのですが、そうであって欲しいものですね）。*