三角関数の加法定理の新証明

2010 年 11 月 14 日

高知工業高等専門学校

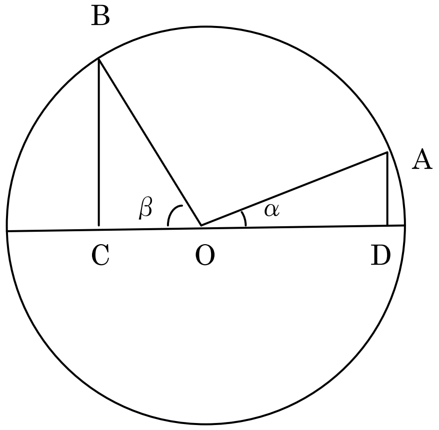
高木和久

α, β が鋭角のときに

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

が成り立つことを示す。

(証明)　点 O を中心とする半径 1 の円を描き、円周上に 2 点 A,B をとって図のように直角三角形 AOD と BOC を作る。



円の半径は 1 だから

$$AD=\sin\alpha\,,\,OD=\cos\alpha\,,\,BC=\sin\beta\,,\,OC=\cos\beta$$

三角形 AOD の面積をS_1、三角形 BOC の面積をS_2とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\,,\ S_2=\frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta$$

2 点 A,B を結んで三角形 AOB を作る。その面積をS_3とすると

$$S_3=\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\{180^{\circ}-(\alpha+\beta)\}=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$$

台形 ABCD の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)$$

$$=S_1+S_2+\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

$S=S_1+S_2+S_3$ だから

$$S_3=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

$$\therefore\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

（証明終）