

このノートについて

北海道算数数学教育会高校部会研究部代数解析研究会（以下代数解析研究会）では、その例会において現代数学に関する理論を学び、その周辺の話題を研究してきている。

代数解析研究会の活動の柱は3つある。具体的には、

- ① 現代数学の勉強会
- ② 大学等の入試問題の研究
- ③ 北海道高等学校数学コンテストの実施

である。

中学・高校で学習する数学の内容をより高く深い立場から理解することは、数学全体での位置づけや他の事項との関連を認識し、いかに教えるかを意識することにもつながり、教科研究を深めることになると考えられるため①を一つの柱としている。

さらに現代数学理論の特殊な場合が大学入試問題として出題されることもあり、現代数学を学ぶことは②においても参考になる場合がある。当然、③の数学コンテストの問題のアイディアも数学的理論がもととなっていることがある。

現代数学の勉強会では、今まで長年OB会員の 関口 隆 先生が講師となって「関数解析」や「ガロア理論」を講義されてきたが、2020年度は筆者（杉本）が「ルベグ積分」の講義を担当することになった。

このノートは筆者が講義したことではないが、今後勉強会を開催するときも資料として執筆したものの一つである。もし参考になれば幸いである。なお、私たちの目的は数学の専門家になることではないので、講義の内容はその分野のすべてを網羅するものでももちろんなく、特に必要な部分のみ限定し、難解部分は省略したり、その概略を述べたりするのにとどめている。

このノートを読んで代数解析研究会に興味を持っていただけたらご連絡いただきたい。また、本文中に誤りなどがあつたら同じくご連絡いただきたい。

実 2 次正方形行列の指数関数

— 微分方程式の理論を理解するために —

もくじ

第 0 章	はじめに	2
第 1 章	指数関数の整級数展開	4
第 2 章	行列の指数関数	11
第 3 章	微分方程式への応用	22

札幌静修高等学校数学科

杉 本 幸 司

k.sugimoto@sapporoseishu.ed.jp

第0章 はじめに

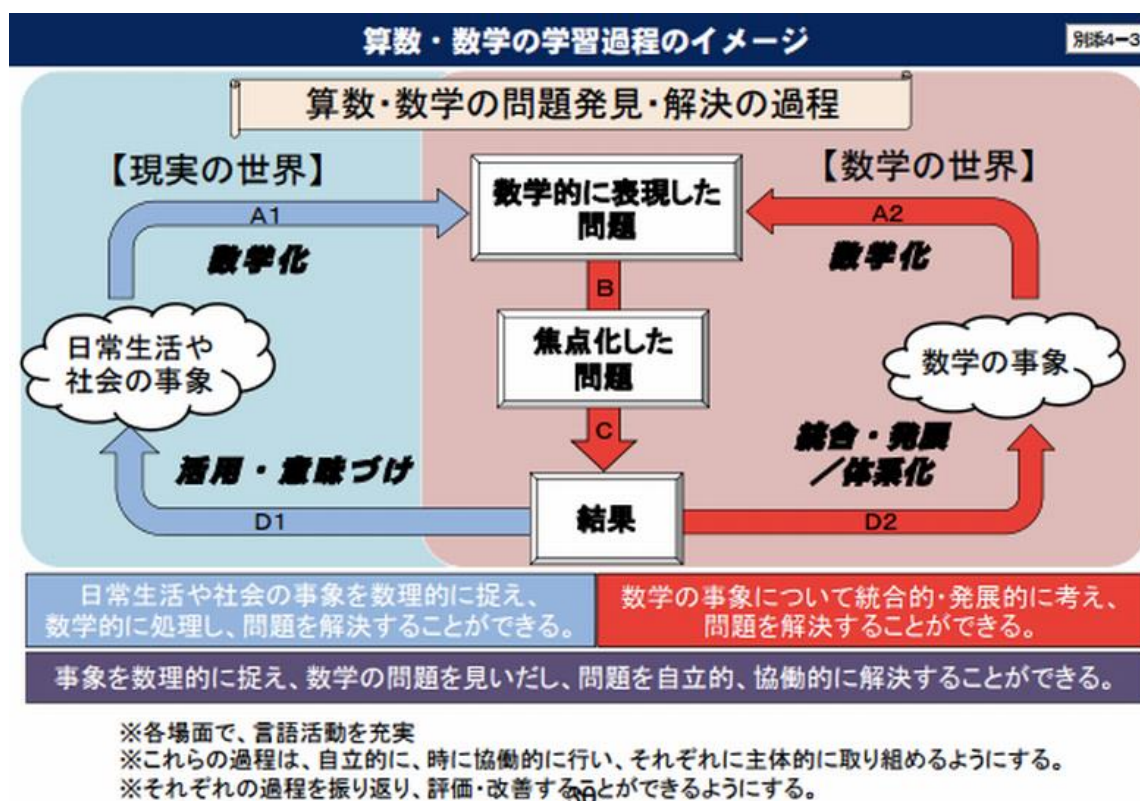
平成30年3月に公示された高等学校学習指導要領における高等学校数学科の目標では、(1)生きて働く「知識・技能」の習得に関すること、(2)未知の状況にも対応できる「思考力・判断力・表現力等」の育成に関すること、(3)学びを人生や社会に生かそうとする「学びに向かう力・人間性等」の涵養に関すること、と三つの柱で整理・明確化されている。目標に掲げる数学的に考える資質・能力を育成するためには、生徒の学習活動においてより一層の数学的活動の充実が必要である。

学習指導要領解説では、数学的活動を「事象を数理的に捉え、数学的問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」と定義し、その過程として、算数・数学の学習過程のイメージ図を示している（表1）。それには二つのサイクル過程が示されているが、そのうちの一つ、左半分のサイクルは、

- (A1) 日常生活や社会の事象などを数理的に捉え、数学的な問題として表現し、
- (B) 問題の本質な部分を捉え、焦点化を図り、
- (C) その焦点化した問題を解決する。
- (D1) そして、得られた結果を元の事象に戻し、その意味を考察する。
- (A1) さらに、そこから新しい問題を見いだす。

といった現実世界に関するサイクルである。

表1 算数・数学の学習過程のイメージ（答申別紙4-3より抜粋）



このサイクルは、数学教育における「数学的モデリング」という考え方を思い出させる。数学的モデリングとは、「現実世界の問題に対して、それと同型（類似）な数学モデルを使い、問題解決を考えていくこと」とであると柳本〔4〕は定義している。その過程は次のようになる。

1. 現実の問題場面（現実事象）について、数理的な分析を行い、どのような条件設定から考えていけばよいのかといった条件整理を行い、現実モデルを作成する。
2. その現実モデルから方程式等の数学的モデルを作る。
3. 数学的处理を行って数学的結果を出す。
4. もとの現実事象にその結果を翻訳する。

本稿では、数学的なモデリングの考えを踏まえた数理解析的な考え方としてよく用いられる「微分方程式の理論」をこれから学ぶ人に対して、その前提として必要となる数学的な理論、特に行列の指数関数について述べる。実際には簡単のために実 2 次正方行列の指数関数について解説する。

具体的な内容を述べる。第 1 章では指数関数 e^x を整級数により再構成する。第 2 章では第 1 章を踏まえて行列の指数関数を考える。第 3 章では簡単な微分方程式を扱う。はじめに一般論を述べたあと、具体的な事象に対して数学的モデリングの考え方に沿って微分方程式を当てはめ、その事象を考察する。もちろん本稿は微分方程式についての解説ではなく、その前提となる知識の解説であるので、微分方程式についての詳細は他書を参照されたい。

なお、本稿では行列は実 2 次正方行列のみを扱うので、単に「行列」と言えば実 2 次正方行列のことを指す。

本稿を理解するのに必要な予備知識としては大学 1,2 年で学ぶ微分積分の 1 次元の微分法まで、線形代数の実 2 次正方行列の理論がわかっていればよい、ただし、次の定理は頻繁に用いる。詳細は線形代数の教科書（たとえば〔1〕）を参照されたい。

定理 A（行列の標準形） 行列 A に対して、次の(1), (2)の事項が成り立つ。

(1) ある正則な行列 P があって、 $P^{-1}AP$ が次のいずれかの形になる。

$$(i) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } \lambda, \mu, \alpha, \beta \text{ は実数})$$

(2) (1)の(i)~(iii)のいずれの形になるかは次のように判別される。

行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。2 次方程式 $x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$ が

- | | |
|--|----------|
| ① 異なる 2 つの実数解 λ, μ をもつとき | (i) の形 |
| ② 重解 λ をもつとき | (ii) の形 |
| ③ 異なる 2 つの虚数解 $\alpha \pm \beta i$ をもつとき | (iii) の形 |

である。

[2 次方程式 $x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$ を固有方程式という。]

第1章 指数関数の整級数展開

この章では、初等関数としての指数関数 ex についてその整級数展開を求める。ここでは、整級数を用いて解析的に定義された関数 $\exp(x)$ に対してその性質を調べ、それが ex に一致することを証明する。なお、この章は定理 1.7 の事実だけを認めていただければ、読み飛ばして、必要になった場合に返っていただいてもかまわない。

はじめに整級数の一般論から始める。

定義 1.1 N を正の整数とする。実数の列 $\{a_n\}$ に対して、 s_N を

$$s_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \sum_{n=0}^N a_n$$

で定義する。 s_N が $N \rightarrow \infty$ のときある実数に収束するとき、その極限を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ または $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ などと表し、**級数** という。

命題 1.2 実数の列 $\{a_n\}$ に対して次の事項が成り立つ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ が収束する} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ が収束する。}$$

[このとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は**絶対収束**するという。]

[証明] $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束し、 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = M$ とする。いま、

$$a_n^+ = \text{Max}\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \text{Max}\{-a_n, 0\}$$

とおくと、 $a_n = a_n^+ - a_n^-$ である。仮定から $0 \leq a_n^+$, $a_n^- \leq |a_n|$ である。

$S_N = \sum_{n=0}^N a_n^+$ とおくと、 S_N は単調増加数列であり、 $S_N = \sum_{n=0}^N a_n^+ \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = M$ であるから上に有界である。

実数の連続性公理（と同値な定理 B）

定理 B 上に有界な単調増加数列は収束する。

より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ は収束する。同様に、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ も収束する。

したがって、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ は収束する。■

定理 1.3 （項別微分の定理） $r > 0$ とする。いま、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

が $|x| < r$ で絶対収束するとする。このとき、次の(1), (2)の事項が成り立つ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ も $|x| < r$ で絶対収束する。

(2) $f(x)$ は $|x| < r$ で微分可能 (したがって特に連続) で、

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

である。

[$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形の級数を **整級数** という。]

定理 1.3 を証明するために補題を準備する。

補題 1.4 正の整数 n に対して、

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 3$$

が成り立つ。

[証明] 二項定理より、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + {}_nC_1 \frac{1}{n} + {}_nC_2 \left(\frac{1}{n}\right)^2 + {}_nC_3 \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + {}_nC_n \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \cdots + \frac{n!}{n!n^n} \\ &< 1 + \frac{n}{1!n} + \frac{n^2}{2!n^2} + \frac{n^3}{3!n^3} + \cdots + \frac{n^n}{n!n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。■

補題 1.5 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

[証明] 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある正の整数 N があって、 $n \geq N$ のとき $1 < n^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$ となることを示せばよい。実際、 $n \geq 3$ のとき、

$$\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} = \frac{n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \frac{3}{4} = 1$$

であるから、 $n^{n+1} > (n+1)^n$ すなわち $n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$ が成り立つ。ここで、 $n+1 > 1$ 、 $\frac{1}{n+1} > 0$ であるから、 $(n+1)^{\frac{1}{n+1}} > 1$ すなわち、 $n^{\frac{1}{n}} > 1$ である。

一方、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \cdots = 1 + n\left(\varepsilon + \frac{n-1}{2}\varepsilon^2 + \cdots\right)$$

であるから、 $\frac{N-1}{2}\varepsilon^2 > 1$ となるように十分大きな N をとれば、 $n \geq N$ のとき $\frac{n-1}{2}\varepsilon^2 > 1$ だから

$(1+\varepsilon)^n > n$ すなわち、 $1+\varepsilon > n^{\frac{1}{n}}$ である。■

[定理 1.3 の証明] (1) $x=0$ のときは明らか。

$0 < |x| < r$ とする。 $|x| < c < r$ となる c をとる。

補題 1.5 より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}}x = x$ である。よって、 $\varepsilon = c - |x|$ に対してある正の整数 N があって、 $n \geq N$ のとき

$|n^{\frac{1}{n}}x - x| < \varepsilon$ すなわち、 $x - \varepsilon < n^{\frac{1}{n}}x - x < x + \varepsilon = c$ である。

よって、 $n \geq N$ のとき $n|a_n|x^n = |a_n|(n^{\frac{1}{n}}x)^n < |a_n|c^n$ となるが、仮定より $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|c^n$ が収束するので

$\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|x^n$ も収束する。

$x \neq 0$ であるから、 $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|x^n$ も収束する。すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ は絶対収束する。

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ を示せばよい。

実際、 $x=0$ のときは両辺ともに a_1 である。

$0 < |x| < r$ とする。 $|x| < b < r$ となる b をとり、 $b+\delta < r$ となる δ をとる。 $|h| < \delta$ としてよい。

平均値の定理より、 x と $x+h$ の間の数 x_n で、 $(x+h)^n - x^n = nx_n^{n-1}h$ となるものがある。よって、

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\{(x+h)^n - x^n\} \\ &= h \sum_{n=0}^{\infty} na_nx_n^{n-1} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x_n^{n-1} - x^{n-1})$$

である。ふたたび平均値の定理より、 x_n と x の間の数 y_n で、 $x_n^{n-1}-x^{n-1}=(n-1)y_n^{n-2}(x_n-x)$ となるものがある。よって、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (n-1) y_n^{n-2} (x_n - x)$$

である。このとき、 $|y_n| \leq b + \delta < r$ 、 $|x_n - x| < h$ であるから、

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) |a_n| |y_n|^{n-2} |x_n - x| \\ &< \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) |a_n| (b+\delta)^{n-2} |h| \\ &= |h| \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) |a_n| (b+\delta)^{n-2} \end{aligned}$$

である。ここで、 $|x| < r$ で $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ は絶対収束し、 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ も絶対収束するので、

$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) |a_n| (b+\delta)^{n-2}$ は収束する。

$$h \rightarrow 0 \text{ として、} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ が成り立つ。} \blacksquare$$

ここからは目的だった指数関数の整級数展開について述べる。はじめに補題を一つ準備する。

補題 1.6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ は収束する。

[この収束した値を e と表す。すなわち $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ である。]

[証明] $S_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$ とおくと、 S_N は単調増加数列であり、補題 1.4 より上に有界である。

したがって定理 B より $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ は収束する。■

以下では次の定理を証明する。

定理 1.7 任意の実数 x に対して $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ は絶対収束する。

さらに、この極限值は e^x である。すなわち、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

である。

[定理 1.7 前半の証明] $x=0$ のときは明らか。

$x \neq 0$ をとり固定する。 $N=2|x|-1$ とし、 $b_n = \frac{1}{n!}x^n$ とおく。 $n \geq N$ のとき、

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{1}{n!}x^n} \right| = \frac{1}{n+1}|x| < \frac{1}{2|x|}|x| = \frac{1}{2}$$

であるから、

$$|b_{n+1}| < \frac{1}{2}|b_n| < \frac{1}{2^2}|b_{n-1}| < \cdots < \frac{1}{2^{n-N+1}}|b_N|$$

である。したがって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n!}x^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=0}^N |b_n| + \sum_{n=N}^{\infty} |b_{n+1}| < \sum_{n=0}^N |b_n| + |b_N| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^{n-N+1}}$$

であり、右辺は収束する。

したがって、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ は $|x| < \infty$ で絶対収束する。 ■

いま、絶対収束する定理 1.7 の整級数を $\exp(x)$ と書く。すなわち、 $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ である。

定理 1.7 後半を証明するために補題を準備する。

補題 1.8 (1) $\exp(x)$ は実数全体で微分可能で、 $\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$

(2) $\exp(0) = 1$

[証明] (1) 定理 1.3 より $\exp(x)$ は実数全体で微分可能で、

$$\frac{d}{dx}\exp(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = \exp(x)$$

となる。

(2) 明らか。 ■

補題 1.9 任意の x に対して $\exp(x) \neq 0$ で、 $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

[証明] 関数 $f(x)$ を $f(x) = \exp(-x)\exp(x)$ で定義する。このとき、

$$f'(x) = -\exp(-x)\exp(x) + \exp(-x)\exp(x) = 0$$

であるから $f(x)$ は定数である。

また、 $f(0) = \exp(0)\exp(0) = 1 \times 1 = 1$ であるから $f(x) = 1$ である。

したがって、 $\exp(-x)\exp(x) = 1$ であるから $\exp(x) \neq 0$ で、 $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ である。 ■

補題 1.10 実数上の微分可能な関数 $f(x)$ が,

(i) 任意の実数 x に対して $f'(x) = f(x)$

(ii) $f(0) = 1$

をみたすとき, $f(x) = \exp(x)$ である。

[証明] 関数 $g(x)$ を $g(x) = \exp(-x)f(x)$ で定義する。このとき,

$$g'(x) = -\exp(-x)f(x) + \exp(-x)f'(x) = -\exp(-x)f(x) + \exp(-x)f(x) = 0$$

であるから $g(x)$ は定数である。

また, $g(0) = \exp(0)f(0) = 1 \times 1 = 1$ であるから $g(x) = 1$ である。

したがって, $\exp(-x)f(x) = 1$ であるから $\frac{f(x)}{\exp(x)} = 1$ すなわち, $f(x) = \exp(x)$ である。■

補題 1.11 任意の x, y に対して $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

[証明] 任意の y をとり固定する。補題 1.9 より $\exp(y) \neq 0$ である。

x の関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$ で定義する。このとき,

$$(i) f'(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = f(x) \quad (ii) f(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$$

である。補題 1.10 から $f(x) = \exp(x)$ である。

したがって, $\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$ より, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ である。■

[定理 1.7 後半の証明] 証明を 3 段に分ける。

(第 1 段) x が正の整数 n の場合

n に関する数学的帰納法で証明する。

$n=1$ のとき $\exp(1) = e^1$ は定義そのものである。

$n-1$ のとき成り立つと仮定する。

n のとき $\exp(n) = \exp(n-1+1) = \exp(n-1)\exp(1) = e^{n-1}e^1 = e^n$

したがって数学的帰納法によりすべての正の整数 n について成り立つ。

(第 2 段) x が有理数 $\frac{m}{n}$ (m, n は整数) の場合

$n > 0$ としてよい。

(i) $m > 0$ の場合 $\quad \vdash \quad m \text{ 個} \quad \vdash$

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \left\{\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^m$$

である。ここで, $e = \exp(1) = \exp\left(\frac{n}{n}\right) = \left\{\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n$ であり, $\exp\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{\exp\left(\frac{1}{2n}\right)\right\}^2 \geq 0$ であるから

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$$

である。したがって、

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m = e^{\frac{m}{n}}$$

である。

(ii) $m < 0$ の場合

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(-\frac{|m|}{n}\right) = \left\{\exp\left(\frac{|m|}{n}\right)\right\}^{-1} = \left(e^{\frac{|m|}{n}}\right)^{-1} = e^{-\frac{|m|}{n}}$$

である。

(第3段) x が実数の場合

有理数の列 $\{x_n\}$ で、 $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) となるものをとる。

$\exp(x)$ は連続であるので $\exp(x_n) \rightarrow \exp(x)$ ($n \rightarrow \infty$) である。

x_n は有理数であるから $\exp(x_n) = e^{x_n}$ である。よって $e^{x_n} \rightarrow \exp(x)$ ($n \rightarrow \infty$) である。

一方 $e^{x_n} \rightarrow e^x$ ($n \rightarrow \infty$) であるから $\exp(x) = e^x$ である。

以上により、任意の実数に対して $e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ が成り立つ。 ■

第2章 行列の指数関数

この章では本稿の主たる目的である行列の指数関数を定義し、その性質を調べる。本稿では行列は実2次正方行列のみを扱うので、単に「行列」と言えば実2次正方行列のことを指す。

定義 2.1 $\{A_n\}$ を行列の列とする。

(1) $\{A_n\}$ が行列 A に収束するとは、 A_n の各成分が A のその成分に収束することである。

(2) N を正の整数とする。 $\{A_n\}$ に対して、 s_N を

$$s_N = A_1 + A_2 + \cdots + A_N = \sum_{n=0}^N A_n$$

で定義する。 s_N が $N \rightarrow \infty$ のときある行列 S に収束するとき、 S を $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ または $A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$ などと表す。

この章の前半ではつぎの定理を証明することを目的とする。

定理 2.2 任意の行列 A に対して

$$E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N + \cdots$$

は収束する。ここで E は単位行列である。

[この収束した行列を e^A と表し、**行列の指数関数**という。]

定理 2.2 を証明するために補題を準備する。

補題 2.3 A を行列、 P を正則な行列とし、 $B = P^{-1}AP$ とする。

正の整数 N に対して S_N 、 T_N を

$$S_N = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N$$

$$T_N = E + B + \frac{1}{2!}B^2 + \cdots + \frac{1}{N!}B^N$$

で定義する。 $N \rightarrow \infty$ のとき、次の事項が成り立つ。

T_N が収束する $\implies S_N$ が収束する

[証明] $A = PBP^{-1}$ であるから

$$S_N = E + (PBP^{-1}) + \frac{1}{2!}(PBP^{-1})^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(PBP^{-1})^N$$

$$= E + PBP^{-1} + \frac{1}{2!}PB^2P^{-1} + \cdots + \frac{1}{N!}PB^NP^{-1}$$

$$= P(E + B + \frac{1}{2!}B^2 + \dots + \frac{1}{N!}B^N)P^{-1}$$

$$= PT_N P^{-1}$$

である。仮定より T_N が収束するので S_N も収束する。■

補題 2.4 λ, μ を実数, n を正の整数とする。

$$(1) A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ のとき, } A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ のとき, } A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

$$(3) K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \text{ は実数} \right\} \text{ とおく。このとき,}$$

$$A \in K \implies A^n \in K$$

である。さらに, $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & -\beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$ とおくと,

$$|\alpha_n|, |\beta_n| \leq (\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2})^n$$

が成り立つ。

[証明] (1) n に関する数学的帰納法で証明する。

$n=1$ のとき 明らか。

$n-1$ のとき成り立つと仮定する。

$$n \text{ のとき } A^n = AA^{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & \mu^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$$

したがって数学的帰納法によりすべての正の整数 n について成り立つ。

$$(2) A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ と分解する。} \lambda E \text{ は任意の行列と可換であること, } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = O \text{ であ}$$

ることに注意すれば, 二項定理より,

$$A^n = \lambda^n E^n + {}_nC_1 \lambda^{n-1} E^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^n E + n \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

となる。

$$(3) A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \in K \text{ とする。} A^n \in K \text{ であることを } n \text{ に関する数学的帰納法で証明する。}$$

$n=1$ のとき 明らか。

$$n-1 \text{ のとき成り立つと仮定する。} A^{n-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \in K \text{ である。}$$

$$n \text{ のとき } A^n = AA^{n-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_{n-1} - \beta_1\beta_{n-1} & -\alpha_1\beta_{n-1} - \beta_1\alpha_{n-1} \\ \alpha_1\beta_{n-1} + \beta_1\alpha_{n-1} & \alpha_1\alpha_{n-1} - \beta_1\beta_{n-1} \end{pmatrix} \in K$$

したがって数学的帰納法によりすべての正の整数 n について成り立つ。

つぎに, $\det A^n = (\det A)^n$ であるから, $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = (\alpha_1^2 + \beta_1^2)^n$ である。したがって,

$$|\alpha_n|, |\beta_n| \leq \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = (\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2})^n$$

となる。■

[定理 2.2 の証明] 補題 2.3 および定理 A より, 行列 A が

$$(i) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

の場合に証明すればよい ($\lambda, \mu, \alpha, \beta$ は実数)。

$$S_N = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N \text{ とおく。}$$

$$(i) A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ の場合}$$

$$\begin{aligned} S_N &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{N!} \begin{pmatrix} \lambda^N & 0 \\ 0 & \mu^N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda + \frac{1}{2!}\lambda^2 + \cdots + \frac{1}{N!}\lambda^N & 0 \\ 0 & 1 + \mu + \frac{1}{2!}\mu^2 + \cdots + \frac{1}{N!}\mu^N \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix} \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である。

$$(ii) A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ の場合}$$

$$\begin{aligned} S_N &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{N!} \begin{pmatrix} \lambda^N & N\lambda^{N-1} \\ 0 & \lambda^N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda + \frac{1}{2!}\lambda^2 + \cdots + \frac{1}{N!}\lambda^N & 0 + 1 + \lambda + \cdots + \frac{1}{(N-1)!}\lambda^{N-1} \\ 0 & 1 + \lambda + \frac{1}{2!}\lambda^2 + \cdots + \frac{1}{N!}\lambda^N \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である。

$$(iii) A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ の場合}$$

補題 2.4(3)と同じ記号を用いると,

$$S_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{N!} \begin{pmatrix} \alpha_N & -\beta_N \\ \beta_N & \alpha_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 + \frac{1}{2!}\alpha_2 + \cdots + \frac{1}{N!}\alpha_N & 0 - \beta_1 - \frac{1}{2!}\beta_2 - \cdots - \frac{1}{N!}\beta_N \\ 0 + \beta_1 + \frac{1}{2!}\beta_2 + \cdots + \frac{1}{N!}\beta_N & 1 + \alpha_1 + \frac{1}{2!}\alpha_2 + \cdots + \frac{1}{N!}\alpha_N \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}\alpha_n & -\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}\beta_n \\ \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}\beta_n & \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}\alpha_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $|\alpha_n| \leq (\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2})^n$ であるから、

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} |\alpha_n| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} (\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2})^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2})^n = e^{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

である。したがって定理 B より、 $\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \alpha_n$ は $N \rightarrow \infty$ のとき絶対収束する。同様に、 $\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \beta_n$ も $N \rightarrow \infty$ のとき絶対収束する。

よって、定理の主張が成り立つ。■

系 2.5 λ, μ を実数、 n を正の整数とする。

$$(1) A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ のとき, } e^A = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ のとき, } e^A = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$$

[証明] 定理 2.2 の証明内に示されている。■

次に関数を成分とする行列の微分について述べる。

定義 2.6 各成分が t について微分可能である行列値関数

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

に対してその微分を

$$\frac{d}{dt} A(t) = \begin{pmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{pmatrix}$$

で定義する。

以下このような行列値関数を単に「 t について微分可能」という。

命題 2.7 t について微分可能である行列値関数 $A(t), B(t)$ に対して、

$$\frac{d}{dt} (A(t)B(t)) = \left(\frac{d}{dt} A(t) \right) B(t) + A(t) \left(\frac{d}{dt} B(t) \right)$$

が成り立つ。

$$[\text{証明}] A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$$\begin{aligned}
A(t)B(t) &= \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(t)b_{11}(t) + a_{12}(t)b_{21}(t) & a_{11}(t)b_{12}(t) + a_{12}(t)b_{22}(t) \\ a_{21}(t)b_{11}(t) + a_{22}(t)b_{21}(t) & a_{21}(t)b_{12}(t) + a_{22}(t)b_{22}(t) \end{pmatrix} \quad (= \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) \end{pmatrix} \text{とおく})
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \begin{pmatrix} c_{11}'(t) & c_{12}'(t) \\ c_{21}'(t) & c_{22}'(t) \end{pmatrix} \\
c_{11}'(t) &= a_{11}'(t)b_{11}(t) + a_{11}(t)b_{11}'(t) + a_{12}'(t)b_{21}(t) + a_{12}(t)b_{21}'(t) \\
c_{12}'(t) &= a_{11}'(t)b_{12}(t) + a_{11}(t)b_{12}'(t) + a_{12}'(t)b_{22}(t) + a_{12}(t)b_{22}'(t) \\
c_{21}'(t) &= a_{21}'(t)b_{11}(t) + a_{21}(t)b_{11}'(t) + a_{22}'(t)b_{21}(t) + a_{22}(t)b_{21}'(t) \\
c_{22}'(t) &= a_{21}'(t)b_{12}(t) + a_{21}(t)b_{12}'(t) + a_{22}'(t)b_{22}(t) + a_{22}(t)b_{22}'(t) \\
\text{右辺} &= \begin{pmatrix} a_{11}'(t) & a_{12}'(t) \\ a_{21}'(t) & a_{22}'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}'(t) & b_{12}'(t) \\ b_{21}'(t) & b_{22}'(t) \end{pmatrix} \quad (= \begin{pmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) \end{pmatrix} \text{とおく}) \\
d_{11}(t) &= a_{11}'(t)b_{11}(t) + a_{12}'(t)b_{21}(t) + a_{11}(t)b_{11}'(t) + a_{12}(t)b_{21}'(t) \\
d_{12}(t) &= a_{11}'(t)b_{12}(t) + a_{12}'(t)b_{22}(t) + a_{11}(t)b_{12}'(t) + a_{12}(t)b_{22}'(t) \\
d_{21}(t) &= a_{21}'(t)b_{11}(t) + a_{22}'(t)b_{21}(t) + a_{21}(t)b_{11}'(t) + a_{22}(t)b_{21}'(t) \\
d_{22}(t) &= a_{21}'(t)b_{12}(t) + a_{22}'(t)b_{22}(t) + a_{21}(t)b_{12}'(t) + a_{22}(t)b_{22}'(t)
\end{aligned}$$

したがって $c'_{ij}(t) = d_{ij}(t)$ ($i, j=1, 2$) であるから, 等式が成り立つ。■

命題 2.8 A を行列とする。 e^{tA} は t について微分可能であり,

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

が成り立つ。

[証明] 正の整数 n に対して, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とする。

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= E + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}t^2 \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!}t^n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + a_1t + \frac{1}{2!}a_2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}a_nt^n + \cdots & b_1t + \frac{1}{2!}b_2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}b_nt^n + \cdots \\ c_1t + \frac{1}{2!}c_2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}c_nt^n + \cdots & 1 + d_1t + \frac{1}{2!}d_2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}d_nt^n + \cdots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{tA} &= \begin{pmatrix} a_1 + \frac{1}{1!}a_2t + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}a_nt^{n-1} + \cdots & b_1 + \frac{1}{1!}b_2t + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}b_nt^{n-1} + \cdots \\ c_1 + \frac{1}{1!}c_2t + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}c_nt^{n-1} + \cdots & d_1 + \frac{1}{1!}d_2t + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}d_nt^{n-1} + \cdots \end{pmatrix} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} t^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} A^n t^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{n+1} t^n \\
&= A \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n \right) \quad \left[= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n \right) A \right] \\
&= A e^{tA} \quad [= e^{tA} A]
\end{aligned}$$

が成り立つ。 ■

この章の後半では行列の指数関数の基本的性質としてつぎの諸定理を証明しよう。

命題 2.9 A, B を行列, P を正則な行列とする。このとき次の(1)~(4)の事項が成り立つ。

- (1) $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$
- (2) $e^O = E$
- (3) e^A は正則で, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
- (4) A, B が可換 (すなわち $AB = BA$) のとき, $e^{A+B} = e^A e^B$

定理 2.10 $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ を実数, n を正の整数とする。

- (1) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ のとき, $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix}$
- (2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ のとき, $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$
- (3) $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ のとき, $e^{tA} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos t\beta & -\sin t\beta \\ \sin t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix}$

命題 2.11 行列 A に対して

$$\det(e^{tA}) = e^{\text{trace} A}$$

が成り立つ。ここで, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $\text{trace} A = a + d$ である。

定理の証明の前に定理 2.10 から直ちに得られる事実と例を示す。

系 2.12

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}t^{2n} + \cdots$$

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1} + \cdots$$

〔証明〕 定理 2.10(3)で, $\alpha=0, \beta=1$ とすると, $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, $e^{tA}=\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ すなわち,

$$E+tA+\frac{1}{2!}t^2A^2+\frac{1}{3!}t^3A^3+\frac{1}{4!}t^4A^4+\cdots+\frac{1}{n!}t^nA^n+\cdots=\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

である。ここで, 実際に計算することにより,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

であることから以下この 4 つの行列を繰り返す。

これらを代入して左辺と右辺を比べるとえられる。■

系 2.13 行列 A に対して正則な行列 P をもちいて定理 A のように標準形に変形したとする。

$$(1) \quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ のとき, } e^{tA}=P\begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$(2) \quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ のとき, } e^{tA}=P\begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$(3) \quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ のとき, } e^{tA}=P\begin{pmatrix} e^{t\alpha}\cos t\beta & -e^{t\alpha}\sin t\beta \\ e^{t\alpha}\sin t\beta & e^{t\alpha}\cos t\beta \end{pmatrix}P^{-1}$$

〔証明〕 命題 2.9(1)より, $e^{tA}=Pe^{P^{-1}AP}P^{-1}$ となることと, 定理 2.10 から得られる。■

例 2.14 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ について, e^{tA} を求めよう。

行列 A の固有方程式は $x^2-3x+2=0$ であり, 異なる 2 つの実数解 1, 2 をもつ。

したがって定理 A より, 正則な行列 P で, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となるようなものがある。そのような P と

してたとえば $P=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ がある。実際,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる (行列 P の具体的な求め方は線形代数の本参照)。

したがって系 2.13(1)より,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3e^t-2e^{2t} & 6e^t-6e^{2t} \\ -e^t+e^{2t} & -2e^t+3e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

命題 2.9 を証明するために補題を準備する。

補題 2.15 行列 A, B が可換 (すなわち $AB=BA$) のとき, $Be^A=e^AB$

[証明] $AB=BA$ のとき,

$$\begin{aligned} Be^A &= B \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} A^n = \lim_{N \rightarrow \infty} B \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} A^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} (BA^n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} (A^n B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} A^n \right) B = e^A B \end{aligned}$$

である。■

[命題 2.9 の証明] (1) $e^{P^{-1}AP} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (P^{-1}AP)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P^{-1}A^nP = P^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) P = P^{-1}e^AP$

(2) $e^O = E + O + \frac{1}{2!}O^2 + \dots = E$

(3) t についての行列値関数 $F(t)$ を $F(t) = e^{-tA}e^{tA}$ で定義する。このとき,

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}(e^{-tA}e^{tA}) = \frac{d}{dt}(e^{-tA})e^{tA} + e^{-tA}\frac{d}{dt}(e^{tA}) = -Ae^{-tA}e^{tA} + e^{-tA}Ae^{tA}$$

ここで, $-tA$ と A は可換であるから補題 2.15 より,

$$\frac{d}{dt}F(t) = -Ae^{-tA}e^{tA} + Ae^{-tA}e^{tA} = O$$

となり, $F(t)$ は定数行列である。

また, $F(0) = e^Oe^O = EE = E$, $F(1) = e^{-A}e^A$ であるから $e^{-A}e^A = E$ である。

したがって e^A は正則で, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ である。

(4) t についての行列値関数 $F(t)$ を $F(t) = e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA}$ で定義する。このとき,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t) &= \frac{d}{dt}(e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA}) \\ &= \frac{d}{dt}(e^{t(A+B)})e^{-tB}e^{-tA} + e^{t(A+B)}\frac{d}{dt}(e^{-tB})e^{-tA} + e^{t(A+B)}e^{-tB}\frac{d}{dt}(e^{-tA}) \\ &= (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} - e^{t(A+B)}Be^{-tB}e^{-tA} - e^{t(A+B)}e^{-tB}Ae^{-tA} \end{aligned}$$

ここで, A, B が可換であるから補題 2.15 より,

$$\frac{d}{dt}F(t) = (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} - Be^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} - Ae^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} = O$$

となり, $F(t)$ は定数行列である。

また, $F(0) = e^Oe^Oe^O = E$, $F(1) = e^{(A+B)}e^{-B}e^{-A}$ であるから $e^{(A+B)}e^{-B}e^{-A} = E$ である。

したがって $e^{(A+B)} = (e^{-B}e^{-A})^{-1} = (e^{-A})^{-1}(e^{-B})^{-1} = e^Ae^B$ である。■

定理 2.10 を証明するために補題を準備する。

補題 2.16 A を行列とする。 t について微分可能な行列値関数 $F(t)$ が

$$\frac{d}{dt}F(t) = AF(t)$$

$$F(0) = E$$

をみたすとする。このとき、 $F(t) = e^{tA}$ である。

[証明] t についての行列値関数 $G(t)$ を $G(t) = e^{-tA}F(t)$ で定義する。このとき、

$$\frac{d}{dt}G(t) = \frac{d}{dt}(e^{-tA}F(t)) = \frac{d}{dt}(e^{-tA})F(t) + e^{-tA}\frac{d}{dt}F(t) = -Ae^{-tA}F(t) + e^{-tA}AF(t)$$

ここで、補題 2.15 より、

$$\frac{d}{dt}G(t) = -Ae^{-tA}F(t) + Ae^{-tA}F(t) = 0$$

となり、 $G(t)$ は定数行列である。

また、 $G(0) = e^0F(0) = E$ であるから $e^{-tA}F(t) = E$ である。

したがって $F(t) = (e^{-tA})^{-1} = e^{tA}$ である。■

[定理 2.10 の証明] (1) t についての行列値関数 $F(t)$ を $F(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix}$ で定義する。このとき、

$$\frac{d}{dt}F(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & \mu e^{t\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} F(t)$$

$$F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

である。補題 2.16 より $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ として $F(t) = e^{tA}$ である。

したがって $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix}$ である。

(2) t についての行列値関数 $F(t)$ を $F(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$ で定義する。このとき、

$$\frac{d}{dt}F(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{t\lambda} & (1+t\lambda)e^{t\lambda} \\ 0 & \lambda e^{t\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} F(t)$$

$$F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

である。補題 2.16 より $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ として $F(t) = e^{tA}$ である。

したがって $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$ である。

(3) t についての行列値関数 $F(t)$ を $F(t) = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos t\beta & -\sin t\beta \\ \sin t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix}$ で定義する。このとき、

$$\frac{d}{dt}(e^{at}\cos t\beta) = \alpha e^{at}\cos t\beta - \beta e^{at}\sin t\beta = e^{at}(\alpha\cos t\beta - \beta\sin t\beta)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{at}\sin t\beta) = \alpha e^{at}\sin t\beta + \beta e^{at}\cos t\beta = e^{at}(\alpha\sin t\beta + \beta\cos t\beta)$$

であるから,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) &= e^{tA} \begin{pmatrix} \alpha\cos t\beta - \beta\sin t\beta & -\alpha\sin t\beta - \beta\cos t\beta \\ \alpha\sin t\beta + \beta\cos t\beta & \alpha\cos t\beta - \beta\sin t\beta \end{pmatrix} \\ &= e^{tA} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t\beta & -\sin t\beta \\ \sin t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} F(t)\end{aligned}$$

$$F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

である。補題 2.16 より $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ として $F(t) = e^{tA}$ である。

したがって $e^{tA} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos t\beta & -\sin t\beta \\ \sin t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix}$ である。■

命題 2.11 を証明するために補題を準備する。

補題 2.17 (1) A, B を行列とする。このとき $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$

(2) A を行列, P を正則な行列とする。このとき $\text{trace}(P^{-1}AP) = \text{trace} A$

[証明] (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とする。

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

であるから $\text{trace}(AB) = ae + bg + cf + dh$ である。

$$BA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + cf & be + df \\ ag + ch & bg + dh \end{pmatrix}$$

であるから $\text{trace}(BA) = ae + cf + bg + dh$ である。

よって $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ である。

(2) (1) より,

$$\text{trace}(P^{-1}AP) = \text{trace}\{P^{-1}(AP)\} = \text{trace}\{(AP)P^{-1}\} = \text{trace}\{A(PP^{-1})\} = \text{trace} A$$

である。■

[命題 2.11 の証明] 補題 2.17(2) および定理 A より, 行列 A が

$$(i) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

の場合に証明すればよい ($\lambda, \mu, \alpha, \beta$ は実数)。

(i) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ の場合

定理 2.10 より $e^A = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}$ であるから

$$\det(e^A) = e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu} = e^{\text{trace} A}$$

である。

(ii) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ の場合

定理 2.10 より $e^A = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$ であるから

$$\det(e^A) = e^\lambda e^\lambda = e^{2\lambda} = e^{\text{trace} A}$$

である。

(iii) $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ の場合

定理 2.10 より $e^A = e^\alpha \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ であるから

$$\det(e^A) = (e^\alpha)^2 (\cos^2\beta + \sin^2\beta) = e^{2\alpha} = e^{\text{trace} A}$$

である。 ■

第3章 微分方程式への応用

この章では行列の指数関数の応用例として、微分方程式のごく入り口を垣間見る。扱う微分方程式は同次線形常微分方程式と言われるもので、係数が定数であるものに限る。すなわち、 $x_1(t), x_2(t)$ を未知の関数、 a_{ij} ($i, j=1, 2$) を実数の定数とし、

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)$$

の形の連立微分方程式を扱う。

定義 3.1 各成分が t の微分可能関数であるベクトル値関数

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

に対してその微分を

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$$

で定義する。

このように定義すると、はじめに述べた微分方程式は、 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ として、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$$

と表すことができる。

この微分方程式は初期条件が定まるとただ一つの解をもつことを示そう。

定理 3.2 A を行列とする。任意のベクトル $\mathbf{a}$ に対して微分方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$$

の解はただ一つしか存在せず、その解は、

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{a}$$

である。

[証明] (存在) $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{a}$ は、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}(e^{tA}\mathbf{a}) = Ae^{tA}\mathbf{a} = A\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}(0) = e^{0A}\mathbf{a} = E\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

であるのでこれは解である。

(一意) $\mathbf{y}(t)$ も解であるとする。

t についてのベクトル値関数 $F(t)$ を $F(t) = e^{-tA}\mathbf{y}(t)$ で定義する。このとき、

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}(e^{-tA}\mathbf{y}(t)) = \frac{d}{dt}(e^{-tA})\mathbf{y}(t) + e^{-tA}\frac{d}{dt}(\mathbf{y}(t)) = -Ae^{-tA}\mathbf{y}(t) + e^{-tA}\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)$$

である。ここで、 $\mathbf{y}(t)$ も解であるから $\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = A\mathbf{y}(t)$ をみたすこと、 $-tA$ と A は可換であることに注意すれば補題 2.14 より、

$$\frac{d}{dt}F(t) = -Ae^{-tA}\mathbf{y}(t) + e^{-tA}A\mathbf{y}(t) = -Ae^{-tA}\mathbf{y}(t) + Ae^{-tA}\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$$

となり、 $F(t)$ は定数ベクトルである。

また、 $F(0) = e^{0A}\mathbf{y}(0) = E\mathbf{a} = \mathbf{a}$ であるから $e^{-tA}\mathbf{y}(t) = \mathbf{a}$ である。

したがって $\mathbf{y}(t) = (e^{-tA})^{-1}\mathbf{a} = e^{tA}\mathbf{a} = \mathbf{x}(t)$ である。■

定理 3.2 で、 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のときは $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

系 3.3 A を行列とし、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を 1 次独立なベクトルとする。微分方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$$

について

$\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ なるただ一つの解を $\mathbf{x}_1(t)$

$\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}$ なるただ一つの解を $\mathbf{x}_2(t)$

とする。

このとき $\mathbf{x}(0) = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$ なる解 $\mathbf{x}(t)$ がただ一つ存在し、 $\mathbf{x}(t) = k\mathbf{x}_1(t) + l\mathbf{x}_2(t)$ である。

[証明] $\mathbf{x}(t) = k\mathbf{x}_1(t) + l\mathbf{x}_2(t)$ は、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}(k\mathbf{x}_1(t) + l\mathbf{x}_2(t)) = k\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_1(t)) + l\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_2(t))$$

$$= kA\mathbf{x}_1(t) + lA\mathbf{x}_2(t) = A(k\mathbf{x}_1(t) + l\mathbf{x}_2(t)) = A\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}(0) = k\mathbf{x}_1(0) + l\mathbf{x}_2(0) = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$$

となり、題意をみたす。

また、解がただ一つであることも定理 3.2 で保障されている。■

例 3.4 微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) - 6y(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) + 4y(t)$$

$$x(0)=1, \quad y(0)=-1$$

を解こう。

この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$x(0)=1, \quad y(0)=-1$$

と表される。

例 2.14 より行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ に対して,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

であるから, 定理 3.2 よりこの微分方程式の解は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3e^t + 4e^{2t} \\ e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

$$\boxed{\text{答}} \quad x(t) = -3e^t + 4e^{2t}, \quad y(t) = e^t - 2e^{2t} \quad \blacksquare$$

例 3.5 A を行列とし, 微分方程式

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \quad (\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix})$$

を考える。この例ではわかりやすいように微分方程式の解 $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ を, t をパラメータとみなして,

x_1x_2 平面上の曲線と考える。このとき次のことがわかるであろう。

(1) x_1x_2 平面上の点 $\mathbf{a}$ が定まると, $\mathbf{a}$ を通る曲線がある。

実際, 定理 3.2 より $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{a}$ がそうである。

(2) 2 つの曲線があったとき, それらは交わることがない。

実際, $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ が解であり, $\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}_2(t_2)$ とする。このとき, $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{x}_1(t+t_1), \mathbf{X}_2(t) = \mathbf{x}_2(t+t_2)$ も解であり, $\mathbf{X}_1(0) = \mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}_2(t_2) = \mathbf{X}_2(0)$ であるから解の一意性より 2 つの解は一致する。

さて, いま簡単のために行列 A は

$$(i) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

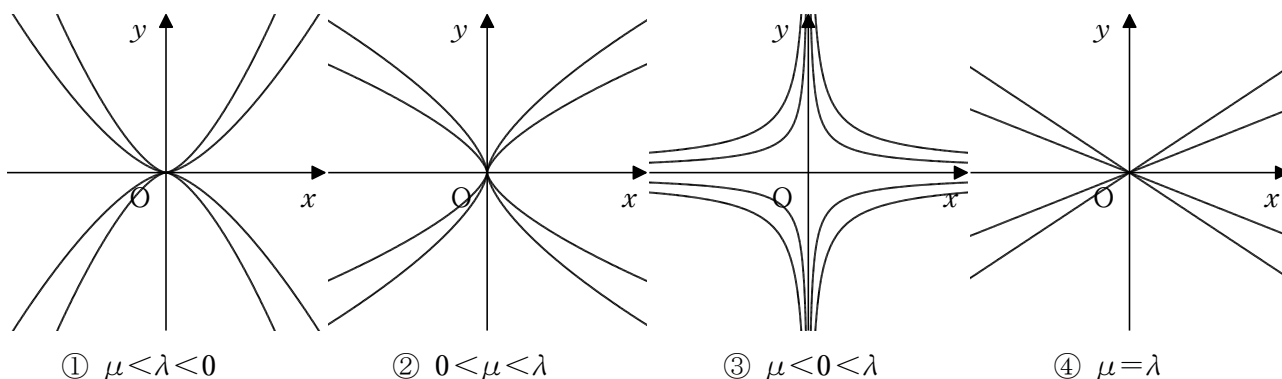
のいずれかであるとする ($\lambda, \mu, \alpha, \beta$ は実数)。

(i) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ の場合

$\mu < \lambda$ としてよい。この場合は定理 2.10 より解が

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} a_1 \\ e^{t\mu} a_2 \end{pmatrix}$$

である。以下の図は異なる 8 つの初期値に対して解の曲線の概形を記した。



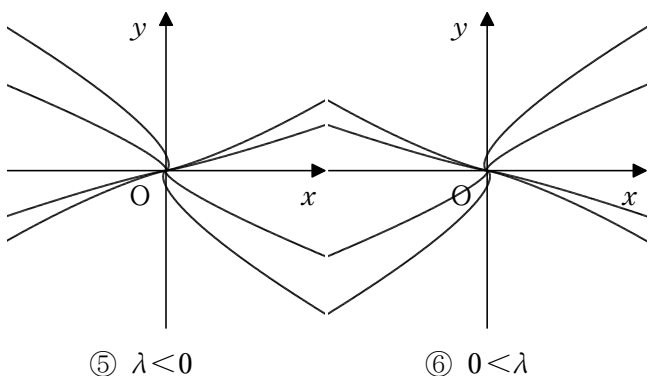
- ① $\mu < \lambda < 0$ の場合 $t \rightarrow \infty$ で $x_1(t) \rightarrow 0, x_2(t) \rightarrow 0$ (原点は**結節点 node** という)
 ② $0 < \mu < \lambda$ の場合 $t \rightarrow -\infty$ で $x_1(t) \rightarrow 0, x_2(t) \rightarrow 0$ (原点は**結節点 node** という)
 ③ $\mu < 0 < \lambda$ の場合 $t \rightarrow \infty$ で $x_1(t) \rightarrow \pm\infty$ ($a_1 > < 0$), $x_2(t) \rightarrow 0$ (原点は**鞍形点 saddle point** という)
 ④ $\mu = \lambda$ の場合 $t \rightarrow \pm\infty$ ($\lambda < > 0$) で $x_1(t) \rightarrow 0, x_2(t) \rightarrow 0$ (原点は**結節点 node** という)

(ii) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ の場合

この場合は定理 2.10 より解が

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda}(a_1 + ta_2) \\ e^{t\lambda}a_2 \end{pmatrix}$$

である。以下の図は異なる 8 つの初期値に対して解の曲線の概形を記した。



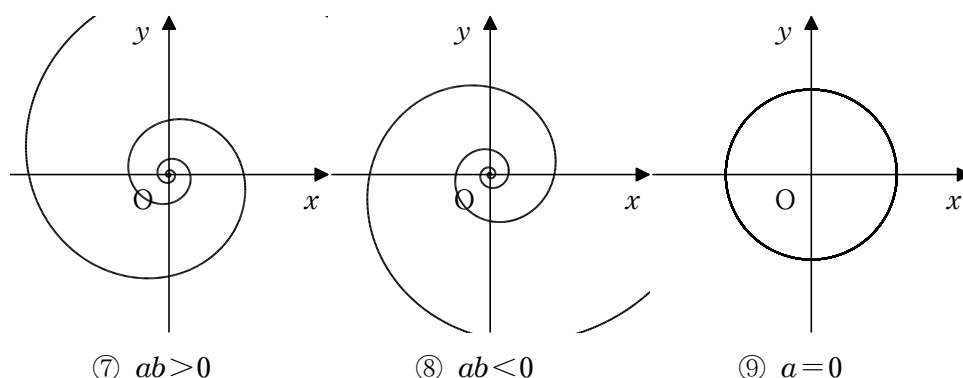
- ⑤ $\lambda < 0$ の場合 $t \rightarrow \infty$ で $x_1(t) \rightarrow 0, x_2(t) \rightarrow 0$ (原点は**結節点 node** という)
 ⑥ $0 < \lambda$ の場合 $t \rightarrow -\infty$ で $x_1(t) \rightarrow 0, x_2(t) \rightarrow 0$ (原点は**結節点 node** という)

(iii) $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ の場合

この場合は定理 2.10 より解が

$$\mathbf{x}(t) = e^{ta} \begin{pmatrix} \cos t\beta & -\sin t\beta \\ \sin t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ta}(a_1 \cos t\beta - a_2 \sin t\beta) \\ e^{ta}(a_1 \sin t\beta + a_2 \cos t\beta) \end{pmatrix}$$

である。以下の図はある 1 つの初期値に対して解の曲線の概形を記した。



- ⑦⑧ $a < 0$ の場合 $t \rightarrow \infty$ で $x_1(t) \rightarrow 0, x_2(t) \rightarrow 0$ (原点は渦状点 spiral point という)
- ⑦⑧ $0 < a$ の場合 $t \rightarrow -\infty$ で $x_1(t) \rightarrow 0, x_2(t) \rightarrow 0$ (原点は渦状点 spiral point という)
- ⑦⑧ $b < 0$ の場合 時計回り
- ⑦⑧ $b > 0$ の場合 反時計回り
- ⑨ $a = 0$ の場合 原点を中心とした円 (原点は渦心点 center という)

なお、行列 A が(i)～(iii)の形ではなかったとしても、定理 A のようにある正則な行列 P を用いて $P^{-1}AP$ が(i)～(iii)のいずれかに標準化でき、それに対応する場合と同じような挙動を示す。■

最後に、数学的モデリングの例として買い占め現象の数理モデルを取り上げる。この章で述べた微分方程式の理論を用いて、現実の事象を説明できる例である。

例 3.6 (買い占め現象の数理モデル)

ある地域で新型のウイルス感染症が流行したとする。その直後、ドラッグストア等の商店からマスクが必要以上に買い占められ、その買い占めがさらなる買い占めを呼ぶという現象が発生した。この現象を微分方程式に当てはめてモデル化しよう。次のことを目標とする。

【目標】この地域でのマスクの購買量を x 、この地域の商店全体のマスク在庫量を y とし、これらを時間 t の関数とみなして、時間経過による変動をモデル化する。

実際には複雑な状況が想定されるが、簡単のためある種のマスクの購買量とマスク在庫量のみをパラメータとする。したがって、たとえばマスクの種別による価格の違いや価格の増減等は考えない。また、他の地域からの流入、他の地域への流出等も考えない。

【条件設定】モデル化にあたって次の設定をする。

<通常時>

(設定 1) 購買量が a 、在庫量が b で一定である。

(設定 2) 在庫量の変化は次の 2 つである。

①購買量による減少 $-a$

②在庫補充 $+a$

<感染症流行時>

(設定 3) 購買量の変化は次の 2 つである。

① 冷静な、またはパニック的な心理状況による変化 $p(x-a)$

(冷静時 $p < 0$, パニック時 $p > 0$)

② 在庫量の不足量に応じた購買量の変化 $q(b-y)$ ($q > 0$)

(設定 4) 在庫量の変化は次の 3 つである。

① 購買量による減少 $-x$

② 在庫補充 $+a$

③ 通常時の在庫との差の調整 $r(b-y)$ ($r \geq 0$)

なお、(設定 3) について、次の状況を数学的に表現した。

①は、もし購買量 x が通常時の a を超えた場合、購買量 x は $(x-a)$ に比例した変化 $p(x-a)$ が見込まれる。つまり、購買者が冷静な場合は「みんなが買っているから買うのを控えよう」($p < 0$) という心理が働き、逆に購買者がパニック的な場合は「みんなが買っているからもっと買わなくては」($p > 0$) という心理が働くことを示している。

②は、もし在庫量 y が通常時の b 未満になった場合、購買量 x は $(b-y)$ に比例した変化 $q(b-y)$ が見込まれる。つまり、購買者は「在庫が少ないから買い占めしておかなければならない」という心理が働くことを示している。

また、(設定 4) について、次の状況を数学的に表現した。

①は、売れた量だけ在庫は減少することを示している。

②は、通常時の購買を補うだけの一定の供給を示している。

③は、もし在庫量 y が通常時の b 未満になった場合、在庫量 y は $(b-y)$ に比例した変化 $r(b-y)$ が見込まれる。つまり、在庫量が極端に少なくなった場合、販売者は通常時の在庫補充だけでは不安になり、「通常時の在庫量との差を調整しよう」とする心理が働くことを示している。

これらの設定によってこの状況をモデル化しよう。

【モデル化】上記 (設定 1) ~ (設定 4) によって次の微分方程式が考えられる。

$$\frac{d}{dt}x(t) = p(x(t) - a) + q(b - y(t))$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -(x(t) - a) + r(b - y(t))$$

【解析】われわれは (設定 1) を考慮に入れて、 $x=a$, $y=b$ の近傍の解の挙動に興味がある。ここで、

$$X = x - a, \quad Y = y - b$$

と変換する。この変換によって原点の近傍の解に着目する。この微分方程式は

$$\frac{d}{dt}X(t) = pX(t) - qY(t)$$

$$\frac{d}{dt}Y(t) = -X(t) - rY(t)$$

すなわち、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ -1 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

と表される。

行列 $A = \begin{pmatrix} p & -q \\ -1 & -r \end{pmatrix}$ に対して固有方程式 $x^2 - (p-r)x - (pr+q) = 0$ を考える。この判別式 D は、 $q > 0$

に注意すれば、

$$D = (p-r)^2 + 4(pr+q) = (p+r)^2 + 4q > 0$$

であるから固有方程式は異なる 2 つの実数解

$$\lambda = \frac{(p-r) + \sqrt{(p+r)^2 + 4q}}{2}, \quad \mu = \frac{(p-r) - \sqrt{(p+r)^2 + 4q}}{2}$$

をもつ。したがって、定理 A の(i)の場合が起こる。

ここで、 λ と μ の値について、次のことに注意しよう。

(1) $\mu < 0$ である。

実際、 $p \leq r$ のときは明らか。 $p > r \geq 0$ のとき、

$$\sqrt{(p+r)^2 + 4q} - (p-r) > \sqrt{(p+r)^2} - (p-r) = (p+r) - (p-r) = 2r \geq 0$$

よりわかる。

(2) λ の正負についてはパラメータの値によって変化する。ただし、

① $p > 0$ のとき（購買者がパニック時）はつねに $\lambda > 0$ である。

実際、 $(p-r) + \sqrt{(p+r)^2 + 4q} > -r + \sqrt{(p+r)^2} > -r + r = 0$ よりわかる。

② $p < 0$ のとき（購買者が冷静時）は λ が正のときも負のときもある。

以上のことからこのモデルにおいては例 3.5 の①または③が起きていることがわかる。

【考察】 $\lambda > 0$ の場合と $\lambda < 0$ の場合に分けて考察しよう。

$\lambda > 0$ の場合、③が起きている。つまり原点は鞍形点であり、パラメータをどのように変化させても原点の近傍において挙動が安定することはない。時間の経過とともに購買量 $X(t)$ は単調増加し、在庫量 $Y(t)$ は単調減少する。つまり購買者がパニックで ($p > 0$) 一度買い占めが発生すると、在庫調整によって購買量と在庫量の均衡をとることができないことを表している。また、仮に購買者が冷静で ($p < 0$) あったとしても、パラメータの条件が悪い場合は上記の現象が起こることを表している。

$\lambda < 0$ の場合、①が起きている。つまり原点は結節点であり、原点の近傍における挙動は安定する。時間の経過とともに購買量 $X(t)$ 、在庫量 $Y(t)$ ともに 0 に収束する。つまり購買者が冷静で ($p < 0$)、他のパラメータの条件が良い場合は、時間の経過とともに通常時の状態に戻っていくことを表している。

【まとめ】ここで想定した数学的モデルはかなり単純化されたものであり、現実には設定した条件とは異なる要因が関与しているということは否めない。しかしこの数学的な結果は、実際に社会で起こる定性的な事実と一致している部分が多いと考えられる。

参考文献

- [1] 佐竹 一郎 『線型代数学』, 裳華房, 1973.
- [2] 白岩 謙一 『常微分方程式論序説 (サイエンスライブラリ現代数学への入門6)』, サイエンス社, 1975.
- [3] 文部科学省 『高等学校学習指導要領 (平成30年告示) 解説 数学編 理数編』, 学校図書, 2019.
- [4] 柳本 哲 『数学的モデリング 本当に役立つ数学の力』, 明治図書, 2011.

著者プロフィール

杉本 幸司 (すぎもと こうじ)

略歴 1965 年 北海道釧路市に生まれる。

1989 年 北海道大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了。

北海道立高等学校教諭, 予備校講師を経て,

現在, 私立札幌静修高等学校教諭。理学修士, 修士 (教育学), 博士 (工学)。

専攻 確率過程論, エルゴード理論, 数学科教育法, 脳工学

著書 時をかける少年～時系列解析への入門～ (ポレポレ出版, 1993)

脳トレし MATH? (ぼすと出版, 2008)

じっくり考える平面ベクトルと平面図形 (文芸社, 2013)

「複素数平面」で解く「図形と方程式」(学研プラス, 2019)