中学校・高等学校数学科教員のための
一歩先の一次変換

― 2 次元の線形代数と高等学校数学 ―

もくじ

はじめに

中学校や高等学校の数学科教員の中には，数学に対する専門性をさらに高めたいという気持ちをもっている人が少なくないと思われる。教科書に書かれている内容について表面的には理解できても，その背景にあるものが見えてこない。授業で紹介する，教材に付随する内容や発展的内容が単発的で，系統性がない。これらのような状況を打開する手段を模索しているということもあるのかもしれない。

高等学校数学科においては，微分法・積分法を頂点としたカリキュラムが構成されている。そのため，微分法・積分法における教材研究や，より高次な内容についての研究は少なくない。一方で，大学初年度で学ぶ数学の科目としては，解析学の初歩的な科目に加えて，線形代数に関する科目も標準的に設定されている。

この本は，高等学校数学科の「平面上のベクトル」程度の知識がある方が，さらに一歩先を学ぶことを目指して書かれたものである。したがって平面上のベクトル全体のなすベクトル空間に限っているが，従前の学習指導要領における数学 C「行列」の続きとして，大学初年度で学習する程度の線形代数の内容にまで踏み込んだ。2 次元に限っているので通常の線形代数の本のような面白い話題に触れることができなくなってしまったが，逆にイメージがわきやすく，証明が単純になるなどの利点があった。

また，内容に関連した高等学校における教材を模索した。

読者としては，中学校または高等学校数学科教員，数学科教員を目指す教育系の大学生，数学好きな一般の方などを想定している。

以下，本書の構成について述べる。

第 0 章では，高等学校で学習する「平面上のベクトル」ならびに従前学習していた「行列」の内容と，それを補充する内容について述べる。またこの章は，1 章以降で述べる事項の基盤となる。

第 1 章では，1 次変換についての基礎事項について述べる。これは従前は高等学校数学科でも学習していた内容である。

第 2 章では，基底の変換について述べる。基底の変換を行うことによって，1 次変換を表す行列も変わるが，それがどのように変わるのかを述べる。

第 3 章では，行列の標準化について述べる。基底をうまく変換することによって 1 次変換を表す行列が都合のよい形になることを示し，その応用として行列のべき乗の求め方について述べる。

第 4 章では，行列のスペクトル分解について述べる。第 3 章とは異なった考え方によって，やはり行列のべき乗を求めることに応用できることを述べる。

第 5 章では，対称行列の対角化について述べる。その応用として，たとえば 2 次曲線の方程式を適当に変換することによって標準形に変形できることを示し，それにより 2 次曲線の概形を描くことについて述べる。

第 6 章では，高等学校で行列を学習することの意義として，既習の内容について意味理解を深めることの一助になることを述べる。そして実際に高等学校で行列を指導する際に参考になる教材について述べる。

第 0 章　予備知識

本章では，高等学校数学科で従前学習していた行列の復習的な内容を述べる。この章は第 1 章以降に述べる内容の基盤になる。

0.1 節では，高等学校数学 B の「平面上のベクトル」を簡単に復習し，ベクトルの平行ということから 1 次独立， 1 次従属という概念を導入し，その活用について述べる。

0.2 節では，高等学校では従前数学 C で学習していた「行列」について，そのエッセンスを解説する。また，その応用例として連立 1 次方程式について述べる。

0.1　平面上のベクトル

高等学校数学 B の「平面上のベクトル」程度の知識は既知とする。

まずは平面上のベクトルについて確認しよう。本書では，平面上のベクトルは縦ベクトルで表す。また，平面上のベクトルを単にベクトルという。

念のために平面上のベクトルについて簡単に復習しておこう。

復習 0.1　（平面上のベクトル）

［1］（基本ベクトル）$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$　（零ベクトル）$\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

［2］ベクトル$\vec{p}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$と実数 k に対して，

（ベクトルの相等）$\vec{p}=\vec{q} \iff a=c,\ b=d$

（ベクトルの和・差）$\vec{p}\pm\vec{q}=\begin{pmatrix}a\pm c\\b\pm d\end{pmatrix}$　（ベクトルの実数倍）$k\vec{p}=\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}$

［3］基点 O が定められているとする。点 P に対して，ベクトル$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を点 P の位置ベクトルという。点 P，Q の位置ベクトルをそれぞれ$\vec{p}$，$\vec{q}$とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{q}-\vec{p}$

(2) 線分 PQ を $m:n$ に分ける点の位置ベクトルは$\dfrac{n}{m+n}\vec{p}+\dfrac{m}{m+n}\vec{q}$

(3) 位置ベクトルが$\vec{p}+\vec{a}$である点は，点 P を$\vec{a}$だけ平行移動した点

以下では，ベクトルにおける 1 次独立性，1 次従属性について述べる。

命題 0.2　$\vec{p}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$を$\vec{0}$でない 2 つのベクトルとする。このとき，

$\vec{p}=k\vec{q}$となる実数 k がある　$\iff$　$ad-bc=0$

が成り立つ。

［2 つのベクトル$\vec{p}$，$\vec{q}$ が上記のいずれか（したがって両方）をみたすとき，$\vec{p}$ と$\vec{q}$ は**平行**という。］

［証明］（$\Longrightarrow$）$\vec{p}=k\vec{q}$ となる実数 k があるとする。このとき$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kc \\ kd \end{pmatrix}$ すなわち，

$$a=kc,\ b=kd$$

である。したがって，$ad-bc\ =(kc)d-(kd)c=0$ である。

（$\Longleftarrow$）$ad-bc\ =0$ とする。$\vec{q}$ は$\vec{0}$ でないから $c\fallingdotseq 0$ または $d\fallingdotseq 0$ である。

(i) $c\fallingdotseq 0$ のとき，$k=\dfrac{a}{c}$ とおく。このとき $a=kc$ である。

$ad-bc\ =0$ より $kcd-bc=0$ であり，$c\fallingdotseq 0$ であるから $b=kd$ である。したがって，

$$\vec{p}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kc \\ kd \end{pmatrix}=k\vec{q}$$

となる。

(ii) $d\fallingdotseq 0$ のとき，$k=\dfrac{b}{d}$ とおく。このとき $b=kd$ である。

$ad-bc\ =0$ より $ad-kd\,c=0$ であり，$d\fallingdotseq 0$ であるから $a=kc$ である。したがって，

$$\vec{p}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kc \\ kd \end{pmatrix}=k\vec{q}$$

となる。■

命題 0.3　$\vec{p}$，$\vec{q}$ を$\vec{0}$ でない 2 つのベクトルとし，x，y を実数とする。

（Ⅰ）次の(1)～(3)の条件は同値である。

(1) $\vec{p}$ と$\vec{q}$ が平行である。

(2) 任意のベクトル$\vec{u}$ に対して，$\vec{u}=x\vec{p}+y\vec{q}$ とおくとき，次の(i)，(ii)のいずれかが起こる。

(i) この式をみたす実数の組$(x,\ y)$はない。

(ii) この式をみたす実数の組$(x,\ y)$は無数にある。

(3) $x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{0}$ をみたす x，y は $x=0$，$y=0$ 以外にもある。

［2 つのベクトル$\vec{p}$，$\vec{q}$ が(1)～(3)のいずれか（したがってすべて）をみたすとき，$\vec{p}$，$\vec{q}$ は **1 次従属**という。］

（Ⅱ）次の(4)～(6)の条件は同値である。

(4) $\vec{p}$ と$\vec{q}$ は平行ではない。

(5) 任意のベクトル$\vec{u}$ に対して，$\vec{u}=x\vec{p}+y\vec{q}$ をみたす実数の組$(x,\ y)$がただ一つある。

(6) $x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{0}$ をみたす x，y は $x=0$，$y=0$ のみである。

［2 つのベクトル$\vec{p}$，$\vec{q}$ が(4)～(6)のいずれか（したがってすべて）をみたすとき，$\vec{p}$，$\vec{q}$ は **1 次独立**という。］

【注意 0.3.1】（Ⅰ）の(1)と（Ⅱ）の(4)よりわかるように，2 つのベクトルが与えられたとき，その 2 つのベクトルは 1 次従属または 1 次独立のいずれかになる。//

［（Ⅰ）の証明］((1)$\Longrightarrow$(2)) $\vec{p}$ と$\vec{q}$ が平行であるとする。このとき$\vec{p}=k\vec{q}$ となる実数 k があるので

$\vec{u}=x\vec{p}+y\vec{q}$ は $\vec{u}=xk\vec{q}+y\vec{q}$ すなわち,

$$\vec{u}=(xk+y)\vec{q} \quad \cdots ①$$

となる。

$\vec{u}$ と $\vec{q}$ が平行でないとき, $\vec{u}=l\vec{q}$ (l は実数) の形に表わすことができないので①をみたす実数の組(x,y)はない。これは(i)の場合である。

$\vec{u}$ と $\vec{q}$ が平行のとき, $\vec{u}=l\vec{q}$ … ② (l は実数) の形に表わしたとき, ①－②より,

$$\vec{0}=(xk+y-l)\vec{q}$$

となるが, $\vec{q}$ は $\vec{0}$ でないから,

$$xk+y-l=0$$

である。これをみたす実数の組(x,y)はたとえば$(x,y)=(0,l)$や$(1,l-k)$のように無数にある。[詳しく言うと$(x,y)=(t,l-tk)$ (t は実数) の形のものはすべてみたす。] これは(ii)の場合である。

((2)$\Longrightarrow$(3)) (2)が成り立つとする。

$\vec{u}$ として $\vec{0}$ をとれば $x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{0}$ となるが, 明らかに $x=0$, $y=0$ はこの式をみたす。よって(i)が起こらず(ii)が起こる。したがって, $x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{0}$ をみたす x, y は $x=0$, $y=0$ 以外にもある。

((3)$\Longrightarrow$(1)) (3)が成り立つとする。

$x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{0}$ をみたす $x=0$, $y=0$ 以外の解の一つを $x=a$, $y=b$ とする。このとき,

$$a\vec{p}+b\vec{q}=\vec{0} \quad \cdots ③$$

であり, a, b の両方とも 0 になることはない。つまり a, b の少なくとも一方は 0 ではない。

ここでもし $a=0$ であると仮定する。このとき $b\vec{q}=\vec{0}$ となるが, $b \fallingdotseq 0$, $\vec{q} \fallingdotseq \vec{0}$ であるから矛盾する。したがって, $a \fallingdotseq 0$ である。

③の両辺を a で割り移項すると, $\vec{p}=-\dfrac{b}{a}\vec{q}$ となるので $\vec{p}$ と $\vec{q}$ は平行である。

[(Ⅱ) の証明] ((4)$\Longrightarrow$(5)) $\vec{p}$ と $\vec{q}$ が平行でないとする。

$\vec{p}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ とし, $\vec{u}=\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}$ とする。このとき, $\vec{u}=x\vec{p}+y\vec{q}$ は $\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ すなわち,

$$\begin{cases} ax+cy=m & \cdots ④ \\ bx+dy=n & \cdots ⑤ \end{cases}$$

となる。

④×d－⑤×c より $(ad-bc)x=md-nc$, ⑤×a－④×b より $(ad-bc)y=na-mb$ である。

さらに $\vec{p}$ と $\vec{q}$ は平行でないので命題 0.2 より $ad-bc \fallingdotseq 0$ である。このことに気をつけて連立方程式を解くと, 実数の組(x,y)は,

$$(x,y)=\left(\frac{md-nc}{ad-bc},\frac{na-mb}{ad-bc}\right)$$

とただ一つだけ定まる。

((5)$\Longrightarrow$(6)) (5)が成り立つとする。

$\vec{u}$ として $\vec{0}$ をとれば $x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{0}$ となるが, 明らかに $x=0$, $y=0$ はこの式をみたす。一方仮定より $\vec{0}=x\vec{p}+y\vec{q}$ をみたす実数の組(x,y)はただ一つであるから $x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{0}$ をみたす x, y は $x=0$, $y=0$ のみである。

((6)⟹(4))（Ⅰ）における(1)⟹(3)の対偶であるから成り立つ。■

系　0.4　$\vec{p}$，$\vec{q}$ を 2 つの 1 次独立なベクトルとする。このとき，

$$x\vec{p}+y\vec{q}=x'\vec{p}+y'\vec{q} \iff x=x',\ y=y'$$

［証明］$x\vec{p}+y\vec{q}=x'\vec{p}+y'\vec{q} \iff (x-x')\vec{p}+(y-y')\vec{q}=\vec{0}$

であるが，命題 0.3（Ⅱ）(6)より

$$\iff x-x'=0,\ y-y'=0$$

$$\iff x=x',\ y=y'$$

となる。■

0.2　行列と連立 1 次方程式

次に行列について確認しよう。**以下では行列と言えば，つねに 2×2 行列を表す。また，断りのない限り成分はすべて実数であるものとする。**

定義 0.5　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ と実数 k に対して，

（行列の相等）$A=B \iff a=e,\ b=f,\ c=g,\ d=h$

（行列の和・差）$A\pm B=\begin{pmatrix} a\pm e & b\pm f \\ c\pm g & d\pm h \end{pmatrix}$

（行列の実数倍）$kA=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$

と定義する。特に，$(-1)A$ を $-A$ と書く。

例　0.6　(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，

(1) $2(3A-2B+C)-3(A-B)$

$=6A-4B+2C-3A+3B$

$=3A-B+2C$

$=3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 6-5+2 & 3-(-1)+0 \\ -9-(-7)+14 & 0-3+(-2) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，

$$A+O=O+A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=A,\quad A-A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

$$0A=0\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O,\quad kO=k\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

［O を**零行列**という。］**以下では $\boldsymbol{O}$ はつねに零行列を表す。**

定義 0.7　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とベクトル $\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，

（行列とベクトルの積）$A\vec{p}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

（行列の積）$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$

と定義する。

例　0.8　(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$，$\vec{p}=\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ のとき，

$$A\vec{p}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times4+1\times7 \\ -3\times4+0\times7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ -12 \end{pmatrix}$$

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times5+1\times(-7) & 2\times(-1)+1\times3 \\ -3\times5+0\times(-7) & -3\times(-1)+0\times3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -15 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\times2+(-1)\times(-3) & 5\times1+(-1)\times0 \\ -7\times2+3\times(-3) & -7\times1+3\times0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ -23 & -7 \end{pmatrix}$$

このように，等式 $AB=BA$ はつねに成り立つとは限らない。

$$AO=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times0+1\times0 & 2\times0+1\times0 \\ -3\times0+0\times0 & -3\times0+0\times0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

$$OA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\times2+0\times(-3) & 0\times1+0\times0 \\ 0\times2+0\times(-3) & 0\times1+0\times0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

等式 $AO=OA$ はつねに成り立ち，$AO=OA=O$ である。

(3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，

$$AE=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times1+1\times0 & 2\times0+1\times1 \\ -3\times1+0\times0 & -3\times0+0\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=A$$

$$EA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times2+0\times(-3) & 1\times1+0\times0 \\ 0\times2+1\times(-3) & 0\times1+1\times0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=A$$

等式 $AE=EA$ はつねに成り立ち，$AE=EA=E$ である。

［E を**単位行列**という。］**以下では $\boldsymbol{E}$ はつねに単位行列を表す。**

【注意 0.8.1】行列の加・減・乗法の計算では，$AB=BA$ はつねに成り立つとは限らないが,

$A+B=B+A$ ，$(A+B)+C=A+(B+C)$,　$(AB)C=A(BC)$,

$A(B+C)=AB+AC$,　$(A+B)C=AC+BC$

などは成り立つ。//

命題 0.9　行列 A とベクトル$\vec{p}$，$\vec{q}$，実数 k, l に対して，

$$A(k\vec{p}+l\vec{q})=kA\vec{p}+lA\vec{q}$$

が成り立つ。

［このような性質を**線形性**という。］

［証明］$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}$ とする。このとき，

$$\begin{aligned}
A(k\vec{p}+l\vec{q}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} kx+lz \\ ky+lu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(kx+lz)+b(ky+lu) \\ c(kx+lz)+d(ky+lu) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k(ax+by)+l(az+bu) \\ k(cx+dy)+l(cz+du) \end{pmatrix} \\
&= k\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}+l\begin{pmatrix} az+bu \\ cz+du \end{pmatrix} \\
&= kA\vec{p}+lA\vec{q}
\end{aligned}$$

となる。■

定義 0.10　行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，

$$|A|=ad-bc$$

とおき，A の**行列式**という。

命題 0.11　A, B を行列とする。このとき，

$$|AB|=|A||B|$$

［証明］$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とする。このとき，$AB=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{aligned}
|AB| &= (ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg) \\
&= acef+adeh+bcfg+bdgh-acef-adfg-bceh-bdgh \\
&= adeh+bcfg-adfg-bceh \\
&= ad(eh-fg)+bc(fg-eh) \\
&= (ad-bc)(eh-fg) \\
&= |A||B|
\end{aligned}$$

となる。■

命題 0.12　$\vec{p}$，$\vec{q}$ を $\vec{0}$ でない 2 つのベクトルとし，行列 A を $A=\begin{pmatrix}\vec{p} & \vec{q}\end{pmatrix}$（すなわち A は $\vec{p}$，$\vec{q}$ をそれぞれ第 1 列，第 2 列に並べた行列）とする。このとき，次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) $\vec{p}$，$\vec{q}$ は 1 次独立である　$\Longleftrightarrow$　$|A|\fallingdotseq 0$

(2) $\vec{p}$，$\vec{q}$ は 1 次従属である　$\Longleftrightarrow$　$|A|=0$

［証明］(2)を証明すれば十分である。

$\vec{p}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ とする。このとき $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ である。よって，

$\vec{p}$，$\vec{q}$ は 1 次従属である　$\Longleftrightarrow$　$\vec{p}$ と $\vec{q}$ が平行である

$\Longleftrightarrow$　$ad-bc\ =0$　（命題 0.2）$\Longleftrightarrow$　$|A|=0$

となる。■

定義 0.13　行列 A に対して，$AX=XA=E$（ただし，E は単位行列）となる行列 X があるとき，X を A の**逆行列**といい，A^{-1} と表す。

定理 0.14　行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ に対して，次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) $|A|\fallingdotseq 0$ のとき，A は逆行列 A^{-1} をもち，

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$$

である。

(2) $|A|=0$ のとき，A は逆行列をもたない。

［証明］行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ に対して，等式 $AX=E$（E は単位行列）をみたす行列 $X=\begin{pmatrix}x & y\\z & u\end{pmatrix}$ があると仮定する。このとき，$AX=\begin{pmatrix}ax+bz & ay+bu\\cx+dz & cy+du\end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{cases}ax+bz=1\\cx+dz=0\end{cases}\quad\text{かつ}\quad\begin{cases}ay+bu=0\\cy+du=1\end{cases}$$

である。この連立方程式を解くと，関係式

$$(ad-bc)x=d,\ (ad-bc)y=-b,\ (ad-bc)z=-c,\ (ad-bc)u=a \qquad \cdots\ ①$$

が得られる。

(1) $|A|\fallingdotseq 0$ のとき，$ad-bc\fallingdotseq 0$ なので，①より，

$$x=\frac{d}{ad-bc},\ y=\frac{-b}{ad-bc},\ z=\frac{-c}{ad-bc},\ u=\frac{a}{ad-bc}$$

すなわち，$X=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$

が得られる。

逆に X をこのように定めると，この計算を逆にたどって，$AX=E$ となる。また，

$$XA=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & -bc+ad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

も成り立つ。すなわちこの X は A の逆行列である。

(2) $|A|=0$ のとき，$ad-bc=0$ なので，①より，$a=b=c=d=0$ となり，$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。これは等式 $AX=E$ に矛盾する。よってこの場合は $AX=E$ をみたす X はないので A は逆行列をもたない。■

系　0.15　行列 A に対して次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) $AX=E$ または $XA=E$ のいずれかが成り立てば，A は逆行列 A^{-1} をもち，$X=A^{-1}$ となる。

(2) A が逆行列 A^{-1} をもつとき，

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

が成り立つ。

［証明］(1) $AX=E$ とすると $|AX|=|E|$ だが，命題 0.11 より $|A||X|=1$ である。よって $|A|\fallingdotseq 0$ であり，定理 0.14(1)より A は逆行列 A^{-1} をもつ。$AX=E$ の両辺に右から A^{-1} をかけると $X=A^{-1}$ となる。

$XA=E$ とすると，同様に $|X||A|=1$ であるから $|A|\fallingdotseq 0$ であり，A は逆行列 A^{-1} をもつ。$XA=E$ の両辺に右から A^{-1} をかけると $X=A^{-1}$ となる。

(2) $AA^{-1}=E$ より，$|AA^{-1}|=|E|$ すなわち $|A||A^{-1}|=1$ である。$|A|\fallingdotseq 0$ であるからこれで割って，

$|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$ が得られる。■

行列を用いると，連立 1 次方程式を解くことができる。

x と y についての連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax+by=k \\ cx+dy=l \end{cases}$$

は，行列を用いると，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$$

のように 1 つの等式で表される。

命題 0.16　x と y についての連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax+by=k \\ cx+dy=l \end{cases}\qquad \left(\text{または}\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}\right)$$

について，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく。このとき次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) $|A|\fallingdotseq 0$　$\Longleftrightarrow$　この連立方程式はただ一組の解をもつ。

(2) $|A|=0$　$\Longleftrightarrow$　この連立方程式の解について次の(i)，(ii)のいずれかが起こる。

(i) この連立方程式は解をもたない。

(ii) この連立方程式は無数の解をもつ。

［証明］$\vec{p}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ とおく。このとき $A=(\vec{p}\ \ \vec{q})$ であり，この連立方程式は，

$$x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{v}$$

と表される。

(1) $|A|\fallingdotseq 0 \iff$ $\vec{p}$，$\vec{q}$ は 1 次独立（命題 0.12(1)）

$\iff$ $x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{v}$ をみたす実数の組$(x,\ y)$がただ一つある（命題 0.3(5)）

$\iff$ この連立方程式はただ一組の解をもつ。

(2) $|A|=0 \iff$ $\vec{p}$，$\vec{q}$ は 1 次従属（命題 0.12(2)）

$\iff$ $x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{v}$ について次の(i)，(ii)のいずれかが起こる。（命題 0.3(2)）

(i) この式をみたす実数の組$(x,\ y)$はない。

(ii) この式をみたす実数の組$(x,\ y)$は無数にある。

$\iff$ この連立方程式の解について次の(i)，(ii)のいずれかが起こる。

(i) この連立方程式は解をもたない。

(ii) この連立方程式は無数の解をもつ。■

系　0.17　x と y についての連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases} \qquad \left(\text{または}\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

について，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく。このとき次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) $|A|\fallingdotseq 0 \iff$ この連立方程式はただ一組の解 $x=y=0$ をもつ。

(2) $|A|=0 \iff$ この連立方程式は $x=y=0$ 以外にも無数の解をもつ。

［証明］明らかに $x=y=0$ は解である（**自明な解**という）。したがって，命題 0.16 より(1)はただ一組の解が $x=y=0$ であり，(2)は(i)が起こらず(ii)が起こっている。■

【演習問題 0】

［0-1］次の行列が逆行列をもてば，それを求めなさい。

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　　(3) $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

［0-2］次の連立 1 次方程式を，行列を用いて解きなさい。ただし，(3)の a，b，c，d，k，l は定数で，$ad-bc\fallingdotseq 0$ である。

(1) $\begin{cases} 3x+7y=1 \\ x+2y=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ -x+5y=6 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} ax+by=k \\ cx+dy=l \end{cases}$

［0-3］連立１次方程式$\begin{cases}3x+\ \ y=kx\\2x+4y=ky\end{cases}$が，$x=y=0$ 以外に解をもつように，定数 k の値を定めなさい。

［0-4］行列$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$に対して，

$$\mathrm{trace}A=a+d$$

とおいて，A の**トレース**という。行列 A，B に対して，

$$\mathrm{trace}(AB)=\mathrm{trace}(BA)$$

であることを証明しなさい。

［0-5］行列 A は$A^2=O$をみたすとする。このとき，$E-A$ は逆行列をもつことを証明しなさい。
［このような行列 A を**ベキ零行列**という。］

第1章　1次変換

本章では，平面上の1次変換について，行列と関連付けて述べる。つまり，1次変換を，行列を用いて表現する。また，1次変換の性質について述べる。

1.1節では，平面上の1次変換を定義し，それが行列と関連付けられることを述べる。また，1次変換の基本的性質について述べる。

1.2節では，1次変換の幾何的性質に着目し，特に1次変換が非退化な場合に，直線が直線に写ることを述べる。

1.3節では，1次変換の例として回転移動・対称移動について述べる。

1.1　1次変換

座標平面上の各点Pに対応して，同じ座標平面上の点P′がただ1つ定まるとき，点Pは点P′に**写る**といい，この対応を**変換**という。変換は記号 f などを用いて表す。

たとえば x 軸，y 軸，原点，直線 $y=x$ に関する対称移動をそれぞれ f_1，f_2，f_3，f_4 とする。これらによって座標平面上の点 $(x,\ y)$ はそれぞれ次のように写る。

	もとの点の座標		写った点の座標
f_1 :	$(x,\ y)$	$\longrightarrow$	$(x,\ -y)$
f_2 :	$(x,\ y)$	$\longrightarrow$	$(-x,\ y)$
f_3 :	$(x,\ y)$	$\longrightarrow$	$(-x,\ -y)$
f_4 :	$(x,\ y)$	$\longrightarrow$	$(y,\ x)$

座標平面において，変換 f によって点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が点 $\mathrm{P}'(x',y')$ に写るとは，この変換によってPの位置ベクトル $\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が P' の位置ベクトル $\overrightarrow{p'}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に写るとも考えられる。このとき，

$$\overrightarrow{p'}=f(\vec{p}) \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

などと表す。

以下では簡単のため，座標平面上の点の位置ベクトルのことを単にベクトルと表記する。

定義 1.1　変換 f が**1次変換**とは，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ が，

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases} \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は実数})$$

となる関係式をみたすことである。

【注意 1.1.1】この関係式は言い換えると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のように表される。行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$を**1次変換$f$を表す行列**という。このとき$\overrightarrow{p'}=A\vec{p}$となる。//

例 1.2 1次変換fを表す行列が$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$であるとき，点(2，1)の写る点は,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

であるから，点(5，−6)である。■

命題 1.3 fを変換，$\vec{p}$，$\vec{q}$をベクトル，k，lを実数とする。このとき次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1)（1次変換の線形性）fが1次変換 $\Longleftrightarrow$ $f(k\vec{p}+l\vec{q})=kf(\vec{p})+lf(\vec{q})$

(2) fが1次変換のとき,

$$f(\vec{0})=\vec{0},\ f(-\vec{p})=-f(\vec{p})$$

が成り立つ。

［証明］(1) （$\Longrightarrow$）fを1次変換とする。fを表す行列をAとする。このとき

$$f(k\vec{p}+l\vec{q})=A(k\vec{p}+l\vec{q})=kA\vec{p}+lA\vec{q}=kf(\vec{p})+lf(\vec{q})$$

となる。

（$\Longleftarrow$）$\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$f(\vec{p})=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$とする。

$\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$とすれば，$\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$であるから

$$f(\vec{p})=f(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})=xf(\overrightarrow{e_1})+yf(\overrightarrow{e_2})$$

となる。ここで，$f(\overrightarrow{e_1})=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$f(\overrightarrow{e_2})=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$とすると,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のように表される。したがってfは1次変換である。

(2) $f(\vec{0})=f(0\vec{p})=0f(\vec{p})=\vec{0}$，$f(-\vec{p})=f(-1\vec{p})=-1f(\vec{p})=-f(\vec{p})$となる。■

【注意 1.3.1】1次変換fが行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で表されるとき,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

であるから，2点(1，0)，(0，1)は，それぞれ(a，c)，(b，d)に写される。

逆に，2点(1，0)，(0，1)が，それぞれ(a，c)，(b，d)に写る1次変換は，命題1.3(1)の証明より，行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で表される。つまり，1次変換$f$を表す行列$A$は，2点(1，0)，(0，1)の写った先をそれぞれ縦ベクトルにして順に並べた行列

$$A=\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ \ f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

である。//

例　1.4　(1) 2 点(2，1)，(3，2)が，それぞれ(1，3)，(2，4)に写る 1 次変換を表す行列を求めよう。

求める行列を A とすると，

$$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

であるから一つにまとめて，

$$A\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

となる。両辺に$\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$の逆行列$\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$を右から掛けると，

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix}$$

である。

(2) 2 点(1，0)，(0，1)が，それぞれ(1，3)，(2，4)に写る 1 次変換を表す行列を求めよう。

求める行列を B とすると，

$$B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

であるから注意 1.3.1 より，

$$B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

である。■

1.2　1 次変換と図形

1 次変換を図形と関連付けて考えよう。特に 1 次変換によって平面全体がどのように写るのか，直線がどのように写るのかを中心に考察する。

一般に，異なる 2 点が異なる 2 点に写る変換を単射，平面全体が平面全体に写る変換を全射という。1 次変換の場合，単射な 1 次変換は次のような性質がある。

命題 1.5　f を 1 次変換とする。このとき次の(1)〜(3)の条件は同値である。

(1) f によって異なる 2 点は異なる 2 点に写る。すなわち，$\vec{p}$，$\vec{q}$ をベクトルとして，

$$\vec{p}\neq\vec{q}\ \Longrightarrow f(\vec{p})\neq f(\vec{q})$$

が成り立つ。

(2) $f(\vec{p})=\vec{0}\ \Longrightarrow \vec{p}=\vec{0}$

(3) $\vec{p}\neq\vec{0}\ \Longrightarrow f(\vec{p})\neq\vec{0}$

［1 次変換 f が(1)〜(3)のいずれか（したがってすべて）をみたすとき，**単射**という。］

［証明］（(2)$\Longleftrightarrow$(3)）(2)と(3)は互いに他の対偶であるから明らか。

((1)$\Longrightarrow$(3)) (1)が成り立つとする。このとき「$\vec{p}\neq\vec{0}$ $\Longrightarrow f(\vec{p})\neq f(\vec{0})$」となるが，命題 1.3(2)より$f(\vec{0})=\vec{0}$であるから(3)が得られる。

((3)$\Longrightarrow$(1)) (3)が成り立つとする。$\vec{p}\neq\vec{q}$ とすれば$\vec{p}-\vec{q}\neq\vec{0}$ であるから，(3)より $f(\vec{p}-\vec{q})\neq\vec{0}$ である。ここで，$f(\vec{p}-\vec{q})=f(\vec{p})-f(\vec{q})$ であるから$f(\vec{p})-f(\vec{q})\neq\vec{0}$，すなわち$f(\vec{p})\neq f(\vec{q})$ である。■

1 次変換の場合，実は単射であることと全射であることは同値になる。そのことを述べると次のようになる。

定理 1.6 fを 1 次変換とする。このとき次の(1)～(4)の条件は同値である。

(1) 1 次変換 g で，次をみたすようなものがある。

任意のベクトル$\vec{p}$，$\vec{q}$ に対して，$g(f(\vec{p}))=\vec{p}$，$f(g(\vec{q}))=\vec{q}$

(2) f によって平面全体は平面全体に写る。すなわち，任意のベクトル$\vec{q}$ に対して，$f(\vec{p})=\vec{q}$ となるベクトル$\vec{p}$ がある。[fがこの条件をみたすとき，**全射**という。]

(3) fによって異なる 2 点は異なる 2 点に写る。すなわち，fは単射である。

(4) 1 次変換fを表す行列 A について，A は逆行列をもつ。

［1 次変換fが(1)～(4)のいずれか（したがってすべて）をみたすとき，**非退化**という。非退化でないとき**退化**という。］

［証明］$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とする。

((1)$\Longrightarrow$(2)) (1)が成り立つとする。任意のベクトル$\vec{q}$ をとり固定する。(1)より $f(g(\vec{q}))=\vec{q}$ であるから $\vec{p}=g(\vec{q})$ とすればよい。

((2)$\Longrightarrow$(3)) (2)が成り立つとする。(2)より $f(\vec{p_1})=\vec{e_1}$，$f(\vec{p_2})=\vec{e_2}$ となるベクトル$\vec{p_1}$，$\vec{p_2}$ がある。

主張 1.6.1 $\vec{p_1}$ と$\vec{p_2}$ は 1 次独立である。

［証明］$x\vec{p_1}+y\vec{p_2}=\vec{0}$ とおく。このとき$f(x\vec{p_1}+y\vec{p_2})=f(\vec{0})$ となるが，

$$(\text{左辺})=xf(\vec{p_1})+yf(\vec{p_2})=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad(\text{右辺})=\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

である。したがって $x=0$, $y=0$ となり，命題 0.3(6)より$\vec{p_1}$ と$\vec{p_2}$ は 1 次独立である。■

さて，$\vec{0}$ でない任意のベクトル$\vec{p}$をとり固定する。主張 1.6.1 より$\vec{p_1}$ と$\vec{p_2}$ は 1 次独立であるから命題 0.3(5)より，$\vec{p}=x\vec{p_1}+y\vec{p_2}$ をみたす実数の組$(x,\ y)$がただ一つある。ここで，$\vec{p}\neq\vec{0}$ であるから$x\neq 0$ または$y\neq 0$ である。このとき，

$$f(\vec{p})=f(x\vec{p_1}+y\vec{p_2})=xf(\vec{p_1})+yf(\vec{p_2})=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

であるから$f(\vec{p})\neq\vec{0}$ である。したがって命題 1.5(3)よりfは単射である。

((3)$\Longrightarrow$(4)) (3)が成り立つとする。$f(\vec{e_1})=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$，$f(\vec{e_2})=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ とし，1 次変換fを表す行列を$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とする。このとき，$a\vec{e_2}-b\vec{e_1}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$，$d\vec{e_1}-c\vec{e_2}=\begin{pmatrix}d\\-c\end{pmatrix}$ であり，

$$f(a\vec{e_2}-b\vec{e_1})=af(\vec{e_2})-bf(\vec{e_1})=a\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}-b\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ad-bc\end{pmatrix}$$

$$f(d\overrightarrow{e_1}-c\overrightarrow{e_2})=df(\overrightarrow{e_1})-cf(\overrightarrow{e_2})=d\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}-c\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ad-bc\\0\end{pmatrix}$$

である。

(i) $a\fallingdotseq 0$ または$b\fallingdotseq 0$ のとき

$a\overrightarrow{e_2}-b\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\fallingdotseq\vec{0}$ であるから(3)より $f(a\overrightarrow{e_2}-b\overrightarrow{e_1})\fallingdotseq\vec{0}$ すなわち$\begin{pmatrix}0\\ad-bc\end{pmatrix}\fallingdotseq\vec{0}$ である。

(ii) $c\fallingdotseq 0$ または$d\fallingdotseq 0$ のとき

$d\overrightarrow{e_1}-c\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix}d\\-c\end{pmatrix}\fallingdotseq\vec{0}$ であるから(3)より $f(d\overrightarrow{e_1}-c\overrightarrow{e_2})\fallingdotseq\vec{0}$ すなわち$\begin{pmatrix}ad-bc\\0\end{pmatrix}\fallingdotseq\vec{0}$ である。

(i)，(ii)いずれの場合も $ad-bc\fallingdotseq 0$ となる。したがって A は逆行列をもつ。

((4)$\Longrightarrow$(1)) (4)が成り立つとする。変換 g を，A の逆行列 A^{-1} を用いて$g(\vec{q})=A^{-1}\vec{q}$ で定義する。g は1 次変換で，任意のベクトル$\vec{p}$，$\vec{q}$ に対して，

$$g(f(\vec{p}))=A^{-1}(A\vec{p})=(A^{-1}A)\vec{p}=\vec{p},\quad f(g(\vec{q}))=A(A^{-1}\vec{q})=(AA^{-1})\vec{q}=\vec{q}$$

が成り立つ。■

系　1.7　定理 1.6 で，1 次変換 f を表す行列を A とすると，1 次変換 g を表す行列は A^{-1} である。

［g を f の**逆変換**といい，f^{-1} と表す。］

定理 1.6 と系 1.7 は 1 次変換が非退化の場合に成り立つ事柄であった。さらに，1 次変換が非退化の場合について調べよう。

定理 1.8　（1 次変換が非退化である場合） f を非退化な 1 次変換とする。このとき次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) A，B を異なる 2 点とする。f により線分 AB が線分 A'B'に写るとき，AB を $m:n$ に分ける点 P は A'B'を $m:n$ に分ける点 Q に写る。

(2) f により直線は直線に写る。

［証明］(1)点 A，B の位置ベクトルを，それぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$ とし，点 P の位置ベクトルを$\vec{p}$ とする。$\vec{p}=\dfrac{n}{m+n}\vec{a}+\dfrac{m}{m+n}\vec{b}$ である。また，点 A'，B'の位置ベクトルを，それぞれ$\vec{a'}$，$\vec{b'}$ とする。

このとき，$f(\vec{a})=\vec{a'}$，$f(\vec{b})=\vec{b'}$ であり，1 次変換の線形性より，

$$f(\vec{p})=f\left(\frac{n}{m+n}\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}\right)=\frac{n}{m+n}f(\vec{a})+\frac{m}{m+n}f(\vec{b})=\frac{n}{m+n}\vec{a'}+\frac{m}{m+n}\vec{b'}$$

である。よって，f により点 P は，線分 A'B'を $m:n$ に分ける点 Q に写る。

(2) 異なる 2 点 A，B に対して，直線 AB 上の任意の点は，線分 AB の分点である。したがって(1)より，1 次変換 f により直線 AB は直線 A'B'に写る。■

1 次変換が非退化の場合と，退化の場合について，具体的な例をあげる。

例　1.9　(1)（1 次変換が非退化である場合）1 次変換 f を表す行列を $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ とする。

(i) 行列 A は $|A|=2\times(-3)-5\times(-1)=-1\fallingdotseq 0$ であるから逆行列 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ をもつ。

f によって点 P$(x,\ y)$ が点 Q $(x',\ y')$ に写るとすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x'+5y' \\ -x'-2y' \end{pmatrix}$$

すなわち $x=3x'+5\,y'$，$y=-x'-2\,y'$　…　①　が成り立つ。

(ii) f によって直線 $x-3y=6$ はどのような図形に写されるか考えよう。

①を $x-3y=6$ に代入すると，

$$(3x'+5\,y')-3(-x'-2\,y')=6$$

すなわち $6x'+11\,y'=6$ となる。

したがって，求める図形は直線 $6x+11y=6$ である。

(2)（1 次変換が退化である場合①）1 次変換 g を表す行列が $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ とする。

(i) 行列 B は $|B|=1\times6-3\times2=0$ であるから逆行列をもたない。

g によって点 P$(x,\ y)$ が点 Q $(x',\ y')$ に写るとすると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+6y \end{pmatrix}$$

すなわち，$x'=x+3y$，$y'=2x+6y$　…　②　が成り立つ。

②より $y'=2x+6y=2(x+3y)=2x'$ であるから g によって座標平面上の任意の点は，直線 $y=2x$ 上の点に写る。

(ii) g によって，直線 $2x+y=5$ はどのような図形に写されるか考えよう。

$2x+y=5$ から $y=-2x+5$ である。②より，

$$x'=x+3y=x+3(-2x+5)=-5x+15$$

であるから，x がすべての実数をうごくとき，x' はすべての実数値をとる。

したがって，求める図形は直線 $y=2x$ である。

(iii) g によって，直線 $x+3y=2$ はどのような図形に写されるか考えよう。

②より $x'=x+3y=2$,　$y'=2x+6y=2(x+3y)=2\times2=4$ である。

したがって，求める図形は点(2，4)である。

(3)（1 次変換が退化である場合②）1 次変換 h を表す行列を $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

行列 C は $|C|=0\times0-0\times0=0$ であるから逆行列をもたない。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，h によって平面上のすべての点 P$(x,\ y)$ は原点 O(0，0)に写る。■

【注意 1.9.1】この例を一般化して，次の事項が成り立つ。

(1) 1 次変換が非退化である場合（定理 1.6）

平面全体は平面全体に写る。直線は直線に写る。

(2) 1 次変換が退化である場合

(i) 1 次変換を表す行列が零行列 O ではないとき

平面全体は原点を通る直線に写る。直線は原点を通る直線または 1 点に写る。

(ii) 1 次変換を表す行列が零行列 O のとき

平面全体は原点に写る。//

1.3　いろいろな 1 次変換

1.1 節の初めに x 軸，y 軸，原点，直線 $y=x$ に関する対称移動を考えた。これらの変換をそれぞれ f_1，f_2，f_3，f_4 としたとき，これらによって座標平面上の点(x, y)はそれぞれ

		もとの点の座標		写った点の座標
f_1	:	(x, y)	$\longrightarrow$	$(x, -y)$
f_2	:	(x, y)	$\longrightarrow$	$(-x, y)$
f_3	:	(x, y)	$\longrightarrow$	$(-x, -y)$
f_4	:	(x, y)	$\longrightarrow$	(y, x)

のように写り，これらは 1 次変換であった。

これらの 1 次変換によって点 P(x, y)が点 Q(x', y')に写るとすると，

$$f_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_3 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_4 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のように表される。したがって次のことがわかった。

例　1.10　x 軸，y 軸，原点，直線 $y=x$ に関する対称移動を表す行列はそれぞれ次のようになる。

x 軸	y 軸	原点	直線 $y=x$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1 次変換を合成することを考えよう。一般に，次の命題が成り立つ。

命題 1.11　1 次変換 f, g を表す行列を，それぞれ A, B とする。

点 P(x, y)が f により点 Q(x', y')に写り，次に g により点 Q(x', y')が点 R(x'', y'')に写るとする。このとき，点 P(x, y)が点 R(x'', y'')に写るような変換 h も 1 次変換であり，h を表す行列は BA である。

［変換 h を f と g の**合成変換**といい，$g\circ f$ で表す。］

［証明］仮定より，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B\left\{A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} = BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。■

たとえば，直線 $y=x$ に関する対称移動の次に x 軸に関する対称移動をするとき，これらの合成変換は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

次に，原点を中心とする回転移動と，原点を通る直線に関する対称移動について考えよう。これらも 1 次変換であることが示され，次のことが成り立つ。

定理 1.12　（原点を中心とする回転移動）原点 O を中心とし，回転角が θ の回転移動 f は 1 次変換であり，f を表す行列は

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

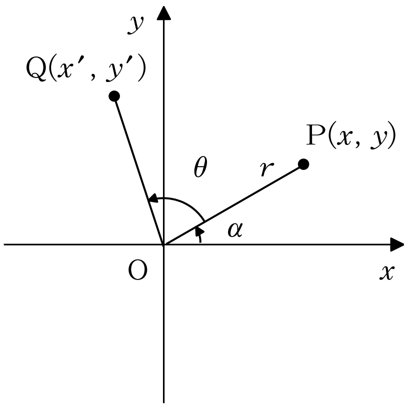
である。

［証明］点 P(x, y)が変換 f によって直線上の点 Q (x', y')に写るとする。

右の図において，OP＝r とし，半直線 OP と x 軸の正の向きとなす角を α とすると，

$$x = r\cos\alpha,\quad y = r\sin\alpha$$

である。また，半直線 OQ と x 軸の正の向きとなす角は $\alpha+\theta$ であるから，



$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = r\sin(\alpha+\theta) = r(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) = y\cos\theta + x\sin\theta$$

となる。したがって変換 f は,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換であり，f を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ である。■

【注意 1.12.1】回転移動の図形的考察から次の(1)，(2)のことが成り立つ。

(1) 原点 O を中心とし，回転角が θ の回転移動を f とする。このとき，逆変換 f^{-1} は，原点 O を中心とし，回転角が $-\theta$ の回転移動である。系 1.7 より，

$$R(\theta)^{-1}=R(-\theta)$$

が成り立つ。

(2) 原点 O を中心とし，回転角がαの回転移動をf，回転角がβの回転移動をgとする。このとき，合成変換$g\circ f$は，原点 O を中心とし，角αだけ回転し，さらに角βだけ回転するから結局回転角が$\alpha+\beta$の回転移動である。命題 1.11 より，

$$R(\alpha+\beta)=R(\beta)R(\alpha)$$

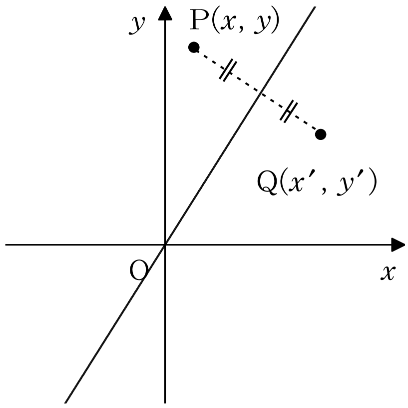
が成り立つ。■

例　1.13　原点 O を中心とし，回転角が 150°の回転移動を表す行列は，

$$R(150^\circ)=\begin{pmatrix}\cos150^\circ & -\sin150^\circ\\ \sin150^\circ & \cos150^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

である。■

定理 1.14　（原点を通る直線に関する対称移動）原点 O を通り，x軸と角$\dfrac{\theta}{2}$をなす直線に関する対称移動fは 1 次変換であり，fを表す行列は



$$U(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

である。

この定理は，直接証明することもできるが（証明 1），合成変換を考えると簡単に証明できる（証明 2）。

［証明 1］　点 P(x，y)が変換fによって直線上の点 Q (x'，y')に写るとする。0°≦θ ≦180°としてよい。

(i) 0°≦θ ＜180°のとき

題意の直線をlとすると，lの方程式は$y=\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x$である。

まず，直線 PQ はlに垂直であるから，$\tan\dfrac{\theta}{2}\cdot\dfrac{y'-y}{x'-x}=-1$，すなわち，

$$x'+y'\tan\frac{\theta}{2}=x+y\tan\frac{\theta}{2} \qquad \cdots \text{①}$$

となる。つぎに，線分 PQ の中点はl上にあるから，$\dfrac{y+y'}{2}=\tan\dfrac{\theta}{2}\cdot\dfrac{x+x'}{2}$，すなわち，

$$-x'\tan\frac{\theta}{2}+y'=x\tan\frac{\theta}{2}-y \qquad \cdots \text{②}$$

となる。①と②より，

$$\begin{pmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つ。ここで左辺の行列を A とおくと，$|A|=1+\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\fallingdotseq 0$ であるから A^{-1} があって，

$$A^{-1}=\cos^2\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

である。したがって変換 f は，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\cos^2\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=\cos^2\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 1-\tan^2\frac{\theta}{2} & 2\tan\frac{\theta}{2} \\ 2\tan\frac{\theta}{2} & -1+\tan^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2} & 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & -\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換である。

(ii) $\theta=180°$のとき

変換 f は y 軸に関する対称移動であるから，f は，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 180^\circ & \sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & -\cos 180^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換である。

いずれの場合も f を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ である。■

［証明 2］点 P(x，y)が変換 f によって直線上の点 Q (x'，y')に写るとする。この直線に関する対称移動は，順に①原点を中心とし，回転角が $-\frac{\theta}{2}$ の回転移動，②x 軸に関する対称移動，③原点を中心とし，回転角が $\frac{\theta}{2}$ の回転移動を行って得られるから，求める行列は，

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-\frac{\theta}{2}) & -\sin(-\frac{\theta}{2}) \\ \sin(-\frac{\theta}{2}) & \cos(-\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2} & 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

である。■

例　1.15　直線 $y=\sqrt{3}\,x$ に関する対称移動を表す行列を求めよう。

この直線は原点 O を通り，x 軸と角 $\frac{\theta}{2}=60°$をなすので，求める行列は，

$$U(120^\circ)=\begin{pmatrix}\cos120^\circ & \sin120^\circ\\ \sin120^\circ & -\cos120^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

である。■

【演習問題 1】

［1-1］次の行列で表される 1 次変換により点 P が写る点の座標を求めなさい。

(1) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，P (1，2)　　(2) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，P (3，1)　　(3) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，P (−2，1)

［1-2］変換 f によって，点 P が P 自身に写るとき，点 P を f の**不動点**という。

1 次変換 f を表す行列が $\begin{pmatrix}a & -2\\ -1 & b\end{pmatrix}$ であるとする。点(2，1) が f の不動点であるとき，定数 a，b の値を求めなさい。

［1-3］1 次変換 f を表す行列が $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ であるとする。次の各問いに答えなさい。

(1) f によって点 P が点(−2，−2) に写るとき，点 P の座標を求めなさい。
(2) f によって直線 $3x+4y-12=0$ に写されるもとの図形を求めなさい。

［1-4］直線 $y=x$ に関する対称移動を f，原点 O を中心とし，回転角が−60°の回転移動を g とするとき，合成変換 $g\circ f$ を表す行列を求めなさい。

［1-5］$\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ を 2 つの 1 次独立なベクトルとし, f を 1 次変換とする。さらに，$f(\overrightarrow{v_1})=w_1$，$f(\overrightarrow{v_2})=w_2$ とする。このとき次のことが成り立つことを証明しなさい。

$\overrightarrow{w_1}$，$\overrightarrow{w_2}$ が 1 次独立　$\Longleftrightarrow$　f は非退化

第 2 章　基底の変換

本章では，平面に対して基底という概念を導入する。基底は 2 つの 1 次独立なベクトルの組であるが，これは座標軸のようなものと考えるとわかりやすいかもしれない。そしてこの基底を取り換えるとどのようなことが起こるのかについて述べる。

2.1 節では，平面に対して基底を定義し，基底が座標軸のような働きをすることについて述べる。また，平面の基底を別の基底に取り換えた場合，どのようなことが起こるのかについて述べる。

2.2 節では，基底を 1 つ定めると，1 次変換に対してその表現行列が定まる。基底を変換した場合，表現行列がどのように変わるのかについて述べる。

2.1　基底と基底の変換

高校数学の平面上のベクトルの問題でよく見るように，

ベクトル$\vec{p}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$を$\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$を用いて表しなさい。

というような問題を解いたことがあるだろう。この問題はもちろん「$\vec{p}=x\overrightarrow{w_1}+y\overrightarrow{w_2}$ の形に表しなさい」という意味である。命題 0.3(5)より，このような実数の組$(x,\ y)$がただ一つある。

以下では次の用語を用いることにしよう。

定義 2.1　平面上の 2 つの 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{V}=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$の組を**基底**という。命題 0.3(5) より，任意のベクトル$\vec{p}$ に対して，$\vec{p}=x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}$ をみたす実数の組$(x,\ y)$がただ一つある。このとき，係数を並べたベクトル$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を，$\vec{p}$ の，基底 $\boldsymbol{V}$に関する**座標ベクトル**という。

例　2.2　ベクトル$\vec{p}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$について，次の基底に関する座標ベクトルを考えよう。

(1) $\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とすれば，$\boldsymbol{V}=\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$は基底である。この基底を**標準基底**という。

$\overrightarrow{e_1}=1\overrightarrow{e_1}+0\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_2}=0\overrightarrow{e_1}+1\overrightarrow{e_2}$ であるから，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ の，基底 $\boldsymbol{V}$ に関する座標ベクトルはそれぞれ$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ である。

$\vec{p}=6\overrightarrow{e_1}+1\overrightarrow{e_2}$ であるから，$\vec{p}$ の，基底 $\boldsymbol{V}$に関する座標ベクトルは$\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ である。

(2) $\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とすれば，$\boldsymbol{W}=\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}\}$は基底である。

$\overrightarrow{w_1}=1\overrightarrow{w_1}+0\overrightarrow{w_2}$, $\overrightarrow{w_2}=0\overrightarrow{w_1}+1\overrightarrow{w_2}$ であるから, $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$ の, 基底 ***W***に関する座標ベクトルはそれぞれ$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ である。

$\vec{p}=x\overrightarrow{w_1}+y\overrightarrow{w_2}$ とすれば,

$$\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y\\-2x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

となるので,

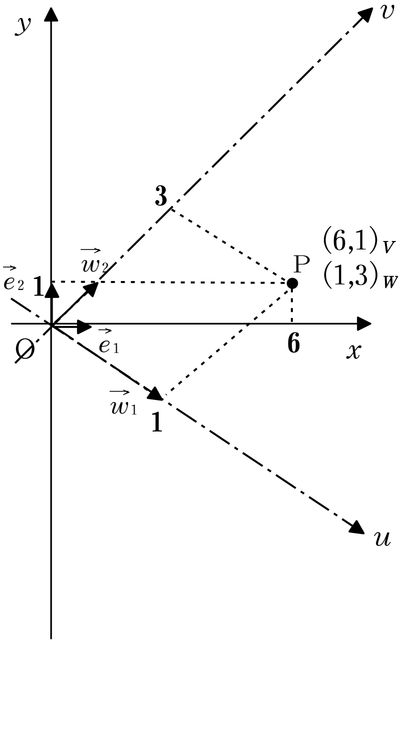
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-2&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

すなわち，$x=1$，$y=3$ である。よって，$\vec{p}$ の，基底 ***W***に関する座標ベクトルは$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ である。■

【注意 2.2.1】基底 ***W*** $=\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}$ （$\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$）に関する座標ベクトルを次のように考えるとわかりやすいかもしれない。

零ベクトル$\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{p}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ をそれぞれ標準基底 ***V*** （x-y）座標平面上の点 $O(0, 0)_V$，$E_1(1, 0)_V$，$E_2(0, 1)_V$，$W_1(3, -2)_V$，$W_2(1, 1)_V$，$P(6, 1)_V$ に対応させる（***V*** （x-y）座標平面上で考えていることを強調するために ***V*** の添え字をつけた)。直線 OE_1，OE_2 はそれぞれ x 軸，y 軸に相当する。

直線 OW_1，OW_2 をそれぞれ u 軸，v 軸とする。このとき点 W_1，W_2，P を基底 ***W*** （u-v）座標平面として $W_1(1, 0)_W$，$W_2(0, 1)_W$，$P(1, 3)_W$ に相当すると考える（***W*** （u-v）座標平面上で考えていることを強調するために ***W***の添え字をつけた)。



$\vec{p}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ の，基底 ***W***に関する座標ベクトルは$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

点 P は，***W*** （u-v）座標平面上では,

・v 軸に平行に u 軸におろした点の位置ベクトルは $1\overrightarrow{w_1}$ なので，点 P の u 座標は 1

・u 軸に平行に v 軸におろした点の位置ベクトルは $3\overrightarrow{w_2}$ なので，点 P の v 座標は 3

//

例題 2.3　ベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$それぞれについて，以下の基底に関する座標ベクトルを求めなさい。

(1) 標準基底 $\boldsymbol{V}_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$　(2) $\boldsymbol{V}_2 = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$　(3) $\boldsymbol{V}_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

［解答］例 2.2 と同様に考えると次のようになる。

	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$
(1) 基底 $\boldsymbol{V}_1$ に関する座標ベクトル	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$
(2) 基底 $\boldsymbol{V}_2$ に関する座標ベクトル	$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$
(3) 基底 $\boldsymbol{V}_3$ に関する座標ベクトル	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

■

【注意 2.3.1】例 2.2(1)や例題 2.3(1)でわかる通り，標準基底に関する座標ベクトルはもとのベクトルに一致する。//

例 2.2 において，標準基底に関して座標ベクトルが$\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$と表される$\vec{p}$は，基底 $\boldsymbol{W}=\{\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$に関しては座標ベクトルが$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$となることを見た。

それでは，標準基底に関して座標ベクトルが$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$と表される$\vec{p}$について，基底 $\boldsymbol{W}=\{\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$に関する座標ベクトルを$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$するとき，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$はどのような関係にあるだろうか。これは，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3u+v\\-2u+v\end{pmatrix}$$

であることにより，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\qquad\cdots\ ①$$

という関係がある。

同じことであるが，注意 2.2.1 と同じ記号を用いれば，点 W_1，W_2 の座標は，$\boldsymbol{V}$（x-y）座標平面上では $W_1(3,\ -2)_{\mathbf{V}}$，$W_2(1,\ 1)_{\mathbf{V}}$，$\boldsymbol{W}$（u-v）座標平面上では，$W_1(1,\ 0)_{\mathbf{W}}$，$W_2(0,\ 1)_{\mathbf{W}}$ であった。このことを次のように対比させて表してみる。

【$\boldsymbol{W}$（u-v）座標平面上】	$\Longleftrightarrow$	【$\boldsymbol{V}$（x-y）座標平面上】	
$(1,\ 0)_{\mathbf{W}}$	$\Longleftrightarrow$	$(3,\ -2)_{\mathbf{V}}$	$\cdots$ ②
$(0,\ 1)_{\mathbf{W}}$	$\Longleftrightarrow$	$(1,\ 1)_{\mathbf{V}}$	$\cdots$ ③

u×②＋v×③より，

【W (u-v) 座標平面上】	$\Longleftrightarrow$	【V (x-y) 座標平面上】
$(u,\ v)_W$	$\Longleftrightarrow$	$(3u+v,\ -2u+v)_V$

となる。これを W (u-v) 座標平面上で$(u,\ v)_W$と表される点が，V (x-y) 座標平面上では$(x,\ y)_V$，ただし，

$$x=3u+v,\ y=-2u+v$$

と表される。この関係式は①と同じである。

例 2.4 例題 2.3 において，ベクトル$\vec{p}$に対して，

基底 $V_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ に関する座標ベクトルを$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$

基底 $V_2=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$ に関する座標ベクトルを$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$

基底 $V_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ に関する座標ベクトルを$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$

とするとき，$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$ の関係を調べよう。

まず，標準基底 V_1に関する座標ベクトルは$\vec{p}$に一致している。したがって，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ である。

(1) $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ の関係を調べる。$\vec{p}=x_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ とおくと，$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_2+3y_2\\x_2+2y_2\end{pmatrix}$ より，

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

である。

(2) $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$ の関係を調べる。$\vec{p}=x_3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とおくと，$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3+y_3\\y_3\end{pmatrix}$ より，

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$$

である。

(3) $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$ の関係を調べる。(1)，(2)より$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$ であるから，

$\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$ である。両辺に右から$\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}^{-1}$ をかけることによって，

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$$

である。

((3)の別解) はじめに基底 $V_2=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$ と $V_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ の関係を調べよう。基底 V_3のベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ を基底 V_2を用いて表すと，

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

であるから一つにまとめて，

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix} \qquad \cdots \quad ①$$

である。ここで，$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$ であることに気をつけると，

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$$

であり，また，$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ であることに気をつけると，

$$\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$$

である。両辺に右から$\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}^{-1}$ をかけることによって，

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$$

である。■

もちろん(1)〜(3)の解答で，両辺に右から逆行列をかけることによって，

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

も成り立つ。

例 2.4 で，①の右辺の行列$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ を，基底 $\boldsymbol{V_2}$ から基底 $\boldsymbol{V_3}$ への基底変換行列という。正確に定義すると次のようになる。

定義 2.5　2 つの基底 $\boldsymbol{V}=\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$と $\boldsymbol{W}=\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}$に対して，ベクトル$\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$の基底 $\boldsymbol{V}$ に関する座標ベクトルをそれぞれ$\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ とする。すなわち，

$$\overrightarrow{w_1}=a\overrightarrow{v_1}+c\overrightarrow{v_2},\quad \overrightarrow{w_2}=b\overrightarrow{v_1}+d\overrightarrow{v_2}$$

とする。これらを一つにまとめて，

$$(\overrightarrow{w_1}\ \ \overrightarrow{w_2})=(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})P \quad \text{ただし，} P \text{は行列} P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

である。この行列 P を基底 $\boldsymbol{V}$ から基底 $\boldsymbol{W}$ への**基底変換行列**という。

【注意 2.5.1】本によっては行列 P を基底 $\boldsymbol{W}$ から基底 $\boldsymbol{V}$ への**座標変換行列**ということもある。基底 $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ の順序が逆になっていることに注意が必要である。

混乱を避けるために本書では座標変換行列という言い方はしないで，以降は基底変換行列で統一する。

（旧基底）から（新基底）への基底変換行列 P は「新＝旧 P 」と覚えるとよい。

例　2.6　基底 $\boldsymbol{V}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right\}$ と $\boldsymbol{W}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}\right\}$ に対して，基底 $\boldsymbol{V}$ から基底 $\boldsymbol{W}$ への基底変換行列 P を求めよう。P の定義から，

$$\begin{pmatrix}1&-3\\-6&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&2\end{pmatrix}P$$

であるから両辺に左から $\begin{pmatrix}1&-3\\-2&2\end{pmatrix}^{-1}=-\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}$ をかけることによって，

$$P=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\-6&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}$$

である。■

命題 2.7　2 つの基底 $\boldsymbol{V}=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$ と $\boldsymbol{W}=\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}\}$ に対して，基底 $\boldsymbol{V}$ から基底 $\boldsymbol{W}$ への基底変換行列を P とする。このとき，次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) 行列 P は逆行列をもつ。

(2) ベクトル $\vec{p}$ の，基底 $\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{W}$ に関する座標ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{p_V}$，$\overrightarrow{p_W}$ とすると，

$$\overrightarrow{p_V}=P\overrightarrow{p_W}$$

が成り立つ。

［証明］(1) $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ は基底であるから $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$，$\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}\}$ はそれぞれ 1 次独立である。したがって，行列 $V=(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})$，$W=(\overrightarrow{w_1}\ \overrightarrow{w_2})$ に対して，$|V|\fallingdotseq 0$ かつ $|W|\fallingdotseq 0$ である。

一方，$(\overrightarrow{w_1}\ \overrightarrow{w_2})=(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})P$ であるから $|W|=|V||P|$ となり，$|P|\fallingdotseq 0$ すなわち P は逆行列をもつ。

(2) $\overrightarrow{p_V}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{p_W}=\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}$ とする。仮定より，

$$\vec{p}=x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2},\quad \vec{p}=z\overrightarrow{w_1}+u\overrightarrow{w_2}$$

である。定義 2.5 と同じ記号を用いれば，

$$\overrightarrow{w_1}=a\overrightarrow{v_1}+c\overrightarrow{v_2},\quad \overrightarrow{w_2}=b\overrightarrow{v_1}+d\overrightarrow{v_2},\quad P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

であるから，

$$\vec{p}=z\overrightarrow{w_1}+u\overrightarrow{w_2}=z(a\overrightarrow{v_1}+c\overrightarrow{v_2})+u(b\overrightarrow{v_1}+d\overrightarrow{v_2})=(az+bu)\overrightarrow{v_1}+(cz+du)\overrightarrow{v_2}$$

したがって，

$$x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}=(az+bu)\overrightarrow{v_1}+(cz+du)\overrightarrow{v_2}$$

である。系 0.4 より，

$$x=az+bu,\quad y=cz+du$$

となるので，

$$\overrightarrow{p_V}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}az+bu\\cz+du\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}=P\overrightarrow{p_W}$$

である。■

2.2　1 次変換の表現行列

例 1.4 で，2 点(2，1)，(3，2)が，それぞれ(1，3)，(2，4)に写る 1 次変換を表す行列 A は$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

であることを見た。この問題を，

（基底 $\boldsymbol{V}_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ に関して）座標ベクトル$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$がそれぞれ$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$に写る 1 次変換を表す行列 A_1 を求めなさい。

という問題とみなそう。もちろん答えは$A_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$である。

基底を $\boldsymbol{V}_2=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$，$\boldsymbol{V}_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ とすれば，この問題はそれぞれ（例題 2.3 を参考にすると），

（基底 $\boldsymbol{V}_2=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$ に関して）座標ベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$がそれぞれ$\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$に写る 1 次変換を表す行列 A_2 を求めなさい。

（基底 $\boldsymbol{V}_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ に関して）座標ベクトル$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$がそれぞれ$\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$に写る 1 次変換を表す行列 A_3 を求めなさい

という問題になる。例 1.4 と同様にして解くと，

$$A_2=\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 5 & 6\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

となる。

このように，基底を変えることによって座標ベクトルが変わり，1 次変換を表す行列は変わってくる。そこで，基底変換と 1 次変換の関係について調べよう。

f を 1 次変換とし，$\boldsymbol{V}=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$を基底とする。このとき，

1 次変換 f によって任意のベクトル$\vec{p}$ が写る先 $f(\vec{p})$ は，基底の写る先 $f(\overrightarrow{v_1})$，$f(\overrightarrow{v_2})$ によって決まる

ということに気をつけよう。実際，$\vec{p}=x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}$ と表したとき，

$$f(\vec{p})=f(x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2})=xf(\overrightarrow{v_1})+yf(\overrightarrow{v_2})$$

であるからである。

いま，$f(\overrightarrow{v_1})$，$f(\overrightarrow{v_2})$ の基底 $\boldsymbol{V}$ に関する座標ベクトルをそれぞれ$\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ としよう。すなわち，

$$f(\overrightarrow{v_1})=a\overrightarrow{v_1}+c\overrightarrow{v_2},\quad f(\overrightarrow{v_2})=b\overrightarrow{v_1}+d\overrightarrow{v_2}$$

である。このとき，

$$\left(f(\overrightarrow{v_1})\ \ f(\overrightarrow{v_2})\right)=(a\overrightarrow{v_1}+c\overrightarrow{v_2}\ \ b\overrightarrow{v_1}+d\overrightarrow{v_2})=(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となる。そこで次のような定義をする。

定義 2.8　f を 1 次変換とし，$\boldsymbol{V}=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$を基底とする。このとき，

$$\left(f(\overrightarrow{v_1})\ \ f(\overrightarrow{v_2})\right)=(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})A$$

となる行列 A を，基底 $\boldsymbol{V}$に関する 1 次変換 f の**表現行列**という。

【注意 2.8.1】基底として特に標準基底 $\boldsymbol{V}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ を用いると，

$$\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ \ f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A$$

となるので，注意 1.3.1 より標準基底に関する 1 次変換 f の表現行列は，f を表す行列に一致する。//

例　2.9　例 1.4 で，2 点(2，1)，(3，2)が，それぞれ(1，3)，(2，4)に写る 1 次変換 f を考えた。そして，$\boldsymbol{V}_2=\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ は基底であった。そこで，1 次変換 f が，

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

をみたすとき，基底 $\boldsymbol{V}_2=\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ に関する 1 次変換 f の表現行列 A を求めよう。定義より，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}A$$

であるから両辺に左から$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$をかけることによって，

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

となる。これは，先の A_2 に一致する。■

例題 2.10　$\boldsymbol{V}=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$を基底とする。1 次変換 f が次の条件をみたすとき，基底 $\boldsymbol{V}$に関する 1 次変換 f の表現行列を求めなさい。

(1) $f(\overrightarrow{v_1})=2\overrightarrow{v_1}+3\overrightarrow{v_2}$，$f(\overrightarrow{v_2})=3\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}$

(2) $f(\overrightarrow{v_1})=-5\overrightarrow{v_1}$，$f(\overrightarrow{v_2})=2\overrightarrow{v_1}-3\overrightarrow{v_2}$

(3) f によって$\overrightarrow{v_1}$は$\overrightarrow{v_1}$の 3 倍のベクトルに，$\overrightarrow{v_2}$は$\overrightarrow{v_1}$の 2 倍に$\overrightarrow{v_2}$だけ平行移動したベクトルに写る。

［解答］(1) 求める表現行列を A とすると，$\left(f(\overrightarrow{v_1})\ \ f(\overrightarrow{v_2})\right)=(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})A$ より，

$$(2\overrightarrow{v_1}+3\overrightarrow{v_2}\ \ 3\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2})=(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})A$$

$$(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})A$$

となる。ここで，$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$は 1 次独立だから命題 0.12(1)と定理 0.14(1)より行列$(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})$ は逆行列をもつ。両辺

に左から$(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})^{-1}$をかけて，

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

である。

(2) 求める表現行列をBとすると，$(f(\overrightarrow{v_1})\ \ f(\overrightarrow{v_2}))=(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})B$より，

$$(-5\overrightarrow{v_1}\ \ 2\overrightarrow{v_1}-3\overrightarrow{v_2})=(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})B$$

$$(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}=(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})B$$

となる。同様にして，

$$B=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

である。

(3) 求める表現行列をCとする。この条件は

$$f(\overrightarrow{v_1})=3\overrightarrow{v_1},\quad f(\overrightarrow{v_2})=2\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$$

ということである。$(f(\overrightarrow{v_1})\ \ f(\overrightarrow{v_2}))=(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})C$より，

$$(3\overrightarrow{v_1}\ \ 2\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})=(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})C$$

$$(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})C$$

となる。同様にして，

$$C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である。■

例 2.9 において，2 点(2，1)，(3，2)の写る先すなわち基底 $V_2=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$ の写る先がわかっているから定義 2.8 の式に直接代入できた。それでは写る先のわからない他の基底，たとえば $V_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ の場合はどうすればよいだろうか。このことについて，次の定理がある。

定理 2.11　$V=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$と$W=\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}\}$を 2 つの基底とし，$P$を基底$V$から基底$W$への基底変換行列とする。すなわち，

$$(\overrightarrow{w_1}\ \overrightarrow{w_2})=(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})P$$

とする。

fを 1 次変換とし，基底 V，W に関する 1 次変換fの表現行列をそれぞれ A，Bとする。すなわち，

$$(f(\overrightarrow{v_1})\ \ f(\overrightarrow{v_2}))=(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})A,\quad (f(\overrightarrow{w_1})\ \ f(\overrightarrow{w_2}))=(\overrightarrow{w_1}\ \overrightarrow{w_2})B$$

とする。このとき，

$$B=P^{-1}AP$$

が成り立つ。

［証明］$P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。このとき，

$$\overrightarrow{w_1}=a\overrightarrow{v_1}+c\overrightarrow{v_2},\quad \overrightarrow{w_2}=b\overrightarrow{v_1}+d\overrightarrow{v_2}$$

である。

さて，$(f(\overrightarrow{w_1})\ \ f(\overrightarrow{w_2}))=(\overrightarrow{w_1}\ \ \overrightarrow{w_2})B$ において，

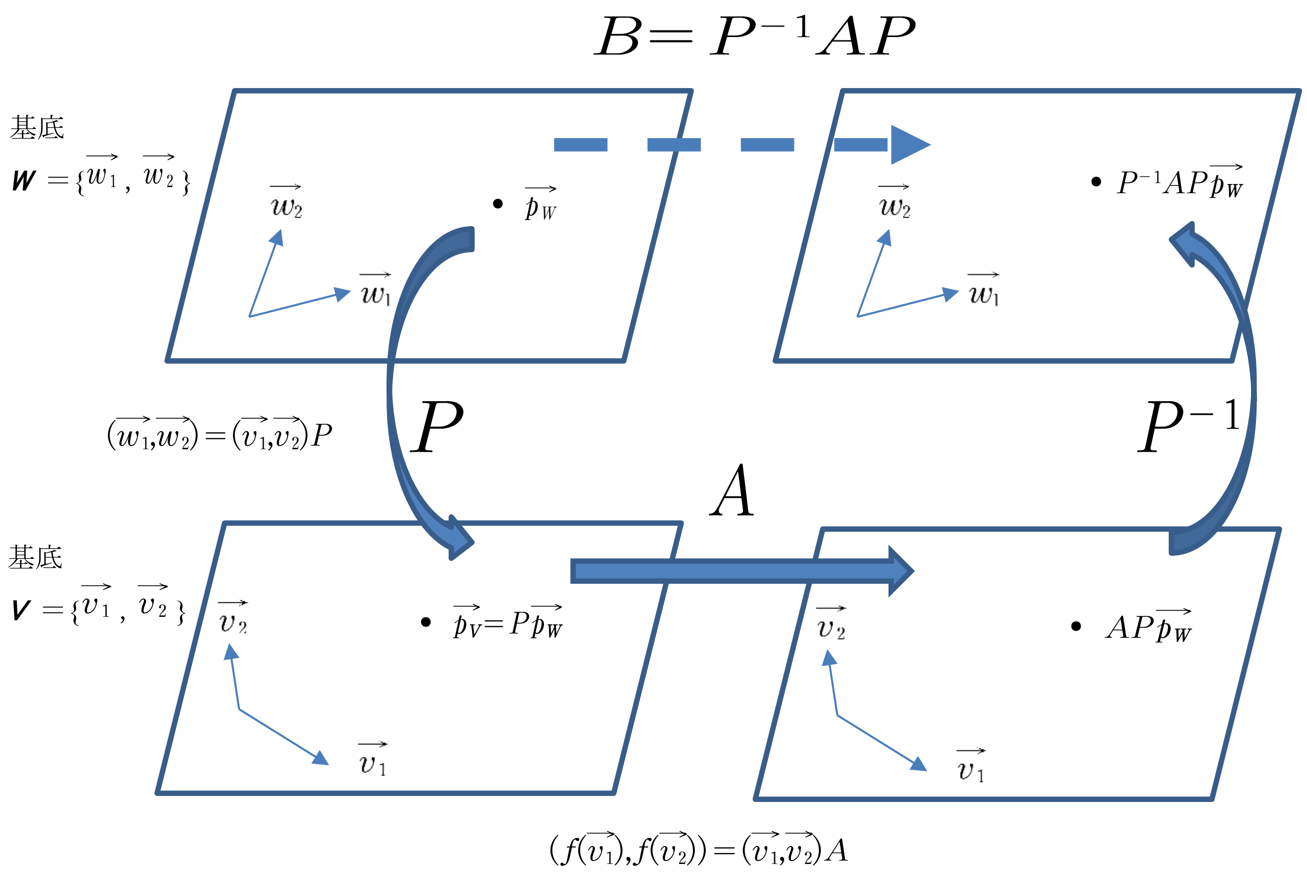
$$\begin{aligned}
(\text{左辺})&=(f(a\overrightarrow{v_1}+c\overrightarrow{v_2})\ \ f(b\overrightarrow{v_1}+d\overrightarrow{v_2}))\\
&=(af(\overrightarrow{v_1})+cf(\overrightarrow{v_2})\ \ bf(\overrightarrow{v_1})+df(\overrightarrow{v_2}))\\
&=(f(\overrightarrow{v_1})\ \ f(\overrightarrow{v_2}))\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\\
&=(f(\overrightarrow{v_1})\ \ f(\overrightarrow{v_2}))P\\
&=(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})AP\\
(\text{右辺})&=(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})PB
\end{aligned}$$

である。したがって，

$$(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})AP=(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})PB$$

となる。ここで，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ は 1 次独立であるから命題 0.12(1)と定理 0.14(1)より行列$(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})$ は逆行列をもつ。P も逆行列をもつので，両辺に左から$P^{-1}(\overrightarrow{v_1}\ \ \overrightarrow{v_2})^{-1}$ をかけることによって，$B=P^{-1}AP$ となる。■

【イメージ】



例　2.12　1 次変換 f が,

$$f\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

をみたすとき，基底 $\boldsymbol{V}_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ に関する 1 次変換 f の表現行列 B を求めよう。

基底 $\boldsymbol{V}_2=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$ から基底 $\boldsymbol{V}_3$ への基底変換行列は例 2.4 より，$P=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ であった。また，基底 $\boldsymbol{V}_2$ に関する 1 次変換 f の表現行列は例 2.9 より $A=\begin{pmatrix}-7&-8\\5&6\end{pmatrix}$ であった。したがって，定理 2.11 より，基底 $\boldsymbol{V}_3$ に関する 1 次変換 f の表現行列 B は,

$$\begin{aligned}B&=P^{-1}AP\\&=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-7&-8\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&-8\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&-1\\4&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&0\\2&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。これは，先の A_3 に一致する。■

例題 2.13　基底 $\boldsymbol{V}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ に関する 1 次変換 f の表現行列を $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-6\\-4&-1\end{pmatrix}$ とする。このとき，基底 $\boldsymbol{W}=\left\{\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ に関する 1 次変換 f の表現行列 B を求めなさい。

［解答］基底 $\boldsymbol{V}$ から基底 $\boldsymbol{W}$ への基底変換行列 P を求める。

$$\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P$$

より，$P=\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}$ である。

したがって，定理 2.11 より，基底 $\boldsymbol{W}$ に関する 1 次変換 f の表現行列 B は,

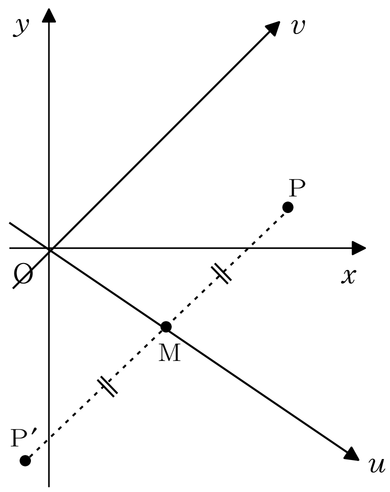
$$\begin{aligned}B&=P^{-1}AP\\&=\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-6\\-4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-6\\-4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15&-5\\-10&-5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & -25\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

である。■

例題 2.13 の図形的意味を考えよう。



例 2.2 のあとに述べたように，基底 ***V***, ***W*** に関する座標ベクトルをそれぞれ ***V*** (x-y) 座標平面上の点，***W*** (u-v) 座標平面上の点と考える。ベクトル $\vec{p}$ の表す点を P とし，その座標をそれぞれ $(x,\ y)_{\mathbf{V}}$, $(u,\ v)_{\mathbf{W}}$ とする。また，$f(\vec{p})$ の表す点をP' とし，その座標をそれぞれ $(x',\ y')_{\mathbf{V}}$, $(u',\ v')_{\mathbf{W}}$ とする。この表記を用いると，

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -6\\ -4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

と表される。このとき，

主張 2.13.1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ は v 軸に平行である。

(2) 線分$\mathrm{PP'}$ の中点 M は u 軸上にある。

［証明］(1) $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -6\\ -4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ より，$x'=\dfrac{x-6y}{5}$，$y'=\dfrac{-4x-y}{5}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=\begin{pmatrix}\dfrac{x-6y}{5}-x\\ \dfrac{-4x-y}{5}-y\end{pmatrix}=\frac{-4x-6y}{5}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

は$\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ に平行なので v 軸に平行である。

(2) M の座標は$\left(\dfrac{x+\dfrac{x-6y}{5}}{2},\dfrac{y+\dfrac{-4x-y}{5}}{2}\right)_V$ すなわち$\left(\dfrac{3x-3y}{5},\dfrac{-2x+2y}{5}\right)_V$ である。$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ は

$\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$ に平行なので u 軸上にある。■

このことから ***W*** (u-v) 座標平面で考えると，点 P に対して点P' は，u 成分は変わらず，v 成分は符号が変わる。すなわち，

$$\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

ということである。

【演習問題 2】

［2-1］次のベクトルを$\vec{v_1}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ を用いて表しなさい。

(1) $\vec{p}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$　　(2) $\vec{q}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$　　(3) $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

［2-2］次の 1 次変換 f の，基底 $\boldsymbol{V}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$ に関する表現行列 A を求めなさい。

(1) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x-y\\x+2y\end{pmatrix}$　　(2) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$

［2-3］1 次変換 f の，基底 $\boldsymbol{V}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ に関する表現行列が $\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$ であるとき，f を表す行列を求めなさい。

［2-4］1 次変換 f を表す行列 A が，$A\fallingdotseq O$，$A^2=O$ をみたすとする。$\vec{v}$ を $A\vec{v}\fallingdotseq\vec{0}$ なるベクトルとする。このとき次の各問いに答えなさい。

(1) $\boldsymbol{V}=\{\vec{v},A\vec{v}\}$ は基底になることを証明しなさい。

(2) 1 次変換 f の，この基底 $\boldsymbol{V}$ に関する表現行列 B を求めなさい。

［2-5］行列 A は $A^2=E$，$A\fallingdotseq\pm E$ をみたすとする。このとき，ある行列 P があって，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ となることを証明しなさい。

第 3 章　行列の標準化

本章では, 1 次変換に対して基底をうまく変更することによってその表現行列をわかりやすい形にしようということを目的とする。すでに例題 2.13 で見たように，1 次変換 f は,

$$\text{基底 } \boldsymbol{V}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ に関する } f \text{ の表現行列は } A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -6\\-4 & -1\end{pmatrix}$$

$$\text{基底 } \boldsymbol{W}=\left\{\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ に関する } f \text{ の表現行列は } B=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

というように，基底を $\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{W}$ に変更することによって表現行列が見やすくなった。

3.1 節では，行列に対してそれに付随する固有値，固有ベクトルという概念を述べる。

3.2 節では，固有ベクトルを基にした基底を 1 つ定め，行列を標準化する，つまりわかりやすい形に変更することについて述べる。

3.3 節では，行列の標準化の応用として，特に対角化可能な行列に対して行列のべき乗を求める計算について述べる。この方法は高等学校の受験参考書にもよく記述されている。

3.1　固有値と固有ベクトル

この節では，1 次変換によって自分自身の定数倍に写るようなベクトルを考える。

定義 3.1　行列 A に対して,

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v}$$

をみたす実数 λ とベクトル $\vec{v}$ （$\vec{v}\neq\vec{0}$ ）が存在するとき，λ を A の**固有値**, $\vec{v}$ を λ に対する A の**固有ベクトル**という。

命題 3.2　行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ に対して次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) 実数 λ において，λ に対する A の固有ベクトル $\vec{v}$ は,

$$(A-\lambda E)\vec{v}=\vec{0}\quad（E \text{ は単位行列}）$$

の $\vec{v}\neq\vec{0}$ なる解である。

(2) 固有値 λ は 2 次方程式

$$t^2-(a+d)t+(ad-bc)=0$$

の実数解である。

［2 次式 $\Phi_A(t)=t^2-(a+d)t+(ad-bc)$ を A の**固有多項式**, 2 次方程式 $\Phi_A(t)=0$ を A の**固有方程式**という。］

［証明］(1) $A\vec{v}=\lambda\vec{v} \iff A\vec{v}=\lambda E\vec{v} \iff (A-\lambda E)\vec{v}=\vec{0}$　より明らか。

(2) A の固有値 λ が存在する $\iff$ $(A-\lambda E)\vec{v}=\vec{0}$ が $\vec{v}\neq\vec{0}$ なる解をもつと，命題 0.16(2)に注意すれば，固有値は t についての方程式 $|A-tE|=0$ の解である。ここで,

$$|A-tE|=\left|\begin{pmatrix}a-t & b \\ c & d-t\end{pmatrix}\right|=(a-t)(d-t)-bc=t^2-(a+d)t+(ad-bc)$$

であるから，固有値は t についての 2 次方程式

$$t^2-(a+d)t+(ad-bc)=0$$

の実数解である。■

定義 3.3　A を行列とする。A の固有値 λ に対して，

$$E(\lambda)=\{\vec{v}|(A-\lambda E)\vec{v}=\vec{0}\}$$

とおき，λ に対する A の**固有空間**という。

例　3.4　次の(1)～(3)の行列に対して，固有値と，その固有値に対する固有ベクトル，固有空間を求めよう。

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 \\ 2 & 2\end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix}6 & -4 \\ 4 & -2\end{pmatrix}$　　(3) $C=\begin{pmatrix}3 & -7 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$

(1) まず，固有値を求める。固有方程式は，$t^2-(1+2)t+(1\times2-3\times2)=0$ すなわち，

$$t^2-3t-4=0$$

である。これより，固有値は -1 と 4 である。

次に固有ベクトルを求める。

(i) 固有値 -1 のとき，$(A+1E)\vec{u}=\vec{0}$ より，

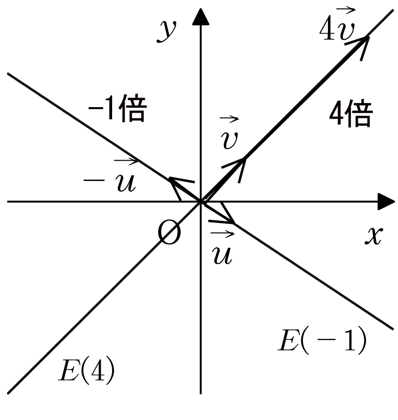
$$\begin{pmatrix}2 & 3 \\ 2 & 3\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは $\vec{u}=\begin{pmatrix}3t \\ -2t\end{pmatrix}$ である（t は 0 と異なる任意の実数)。

(ii) 固有値 4 のとき，$(A-4E)\vec{v}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix}-3 & 3 \\ 2 & -2\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは $\vec{v}=\begin{pmatrix}t \\ t\end{pmatrix}$ である（t は 0 と異なる任意の実数)。



このことから固有空間は，

$$E(-1)=\left\{\begin{pmatrix}3t \\ -2t\end{pmatrix}\middle| t\text{はすべての実数}\right\}$$

$$E(4)=\left\{\begin{pmatrix}t \\ t\end{pmatrix}\middle| t\text{はすべての実数}\right\}$$

である。すなわちこれらは右の図の直線を表す。

なお，固有空間の定義から，行列 A によって定まる 1 次変換によって，

$E(-1)$のベクトルはそれを -1 倍したベクトルに写る

$E(4)$のベクトルはそれを 4 倍したベクトルに写る

ことがわかるであろう。

(2) まず，固有値を求める。固有方程式は，$t^2-\{6+(-2)\}t+\{6\times(-2)-(-4)\times 4\}=0$ すなわち，

$$t^2-4t+4=0$$

である。これより，固有値は 2 のみである。

次に固有ベクトルを求める。$(A-2E)\vec{u}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix}4 & -4\\ 4 & -4\end{pmatrix}\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは$\vec{u}=\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}$ である（t は 0 と異なる任意の実数)。

このことから固有空間は，

$$E(2)=\left\{\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}\middle| t\text{はすべての実数}\right\}$$

である。

なお，(1)の場合と同様に，固有空間の定義から，行列 A によって定まる 1 次変換によって，

$E(2)$のベクトルはそれを 2 倍したベクトルに写る

ことがわかるであろう。

(3) まず，固有値を求める。固有方程式は，$t^2-\{3+(-1)\}t+\{3\times(-1)-(-7)\times 1\}=0$ すなわち，

$$t^2-2t+4=0$$

である。この 2 次方程式を解くと，$t=1\pm\sqrt{3}\,i$ と虚数解になるので固有値，固有ベクトル，固有空間は存在しない。

なお，形式的に複素数を認めるとする。このとき，固有値は $1+\sqrt{3}\,i$ と $1-\sqrt{3}\,i$ である。

次に固有ベクトルを求める。

(i) 固有値 $1+\sqrt{3}\,i$ のとき，$\{A-(1+\sqrt{3}\,i)E\}\overrightarrow{v_+}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\,i & -7\\ 1 & -2-\sqrt{3}\,i\end{pmatrix}\overrightarrow{v_+}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは$\overrightarrow{v_+}=\begin{pmatrix}(2+\sqrt{3}\,i)t\\ t\end{pmatrix}$ である（t は 0 と異なる任意の複素数)。

(ii) 固有値 $1-\sqrt{3}\,i$ のとき，$\{A-(1-\sqrt{3}\,i)E\}\overrightarrow{v_-}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\,i & -7\\ 1 & -2+\sqrt{3}\,i\end{pmatrix}\overrightarrow{v_-}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは$\overrightarrow{v_-}=\begin{pmatrix}(2-\sqrt{3}\,i)t\\ t\end{pmatrix}$ である（t は 0 と異なる任意の複素数)。

このことから固有空間は，

$$E(1+2i)=\left\{\begin{pmatrix}(2+\sqrt{3}\,i)t\\ t\end{pmatrix}\middle| t\text{ はすべての複素数}\right\}$$

$$E(1-2i)=\left\{\begin{pmatrix}(2-\sqrt{3}\,i)t\\ t\end{pmatrix}\middle| t\text{ はすべての複素数}\right\}$$

である。■

3.2　行列の標準化

この節では次の定理 3.5〜定理 3.7 を証明する。いずれの場合も固有ベクトルやそれをもとにしたベクトルを用いた基底 $\boldsymbol{W}=\{\vec{u},\ \vec{v}\}$で，標準基底から基底 $\boldsymbol{W}$ への基底変換行列を P としている。この基底 $\boldsymbol{W}=\{\vec{u},\ \vec{v}\}$に関する 1 次変換の表現行列として行列を見やすくしているのである。

定理 3.5　（異なる 2 つの実固有値をもつ場合）行列 A が異なる 2 つの実固有値λ，μ をもつとする。λ，μ に対する固有ベクトルの 1 つをそれぞれ$\vec{u}$，$\vec{v}$ とし，行列 P を $P=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}$ とする。このとき，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$$

となる。

定理 3.6　（1 つの実固有値をもつ場合）行列 A が 1 つの実固有値λ をもつとする。

(1) $A-\lambda E=O$ のとき

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

である。

(2) $A-\lambda E\fallingdotseq O$ のとき

次の手順で行列 P を定める。

(i) $(A-\lambda E)\vec{v}\fallingdotseq\vec{0}$ となる任意のベクトル$\vec{v}$ を一つ取り固定する。

(ii) $\vec{u}=(A-\lambda E)\vec{v}$ とする。

(iii) $P=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}$ とする。

このとき，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

となる。

なお，行列 A の成分はすべて実数であるが，固有方程式が異なる 2 つの虚数解をもつ場合もある。この場合，実数の代わりに複素数で考えることによって，固有値や固有ベクトルなど，今までの議論は複素数のままで同様に考えることができる。

行列 A の成分はすべて実数で，異なる 2 つの虚固有値をもつ場合については次の定理が成り立つ。

定理 3.7　（異なる 2 つの虚固有値をもつ場合）行列 A が異なる 2 つの虚固有値$\alpha+i\beta$，$\alpha-i\beta$，(α，β は実数，$\beta\fallingdotseq 0$ ）をもつとする。

$\alpha+i\beta$ に対する固有ベクトルの 1 つを$\overrightarrow{v_+}=\begin{pmatrix}a+ib\\ c+id\end{pmatrix}$ （a，b は実数）とする。このとき$\overrightarrow{v_-}=\begin{pmatrix}a-ib\\ c-id\end{pmatrix}$ は $\alpha-i\beta$ に対する固有ベクトルになる。

さらに，$\vec{u}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{v_+}+\overrightarrow{v_-})$，$\vec{v}=\dfrac{i}{2}(\overrightarrow{v_+}-\overrightarrow{v_-})$ とすると，$\vec{u}$，$\vec{v}$ の成分は実数で，行列 P を $P=(\vec{u}\ \ \vec{v})$ とすると，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$$

となる。

定義 3.8　行列 A に対して A を定理 3.5～定理 3.7 のように，

$$\text{(i)}\ \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\qquad \text{(ii)}\ \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\qquad \text{(iii)}\ \begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$$

のいずれかの形に変形することを，A を**標準化**するといい，特に，(i)の形に変形することを**対角化**するという。

また，この形の行列を A の**標準形**といい，特に，(ii)の行列を A の**ジョルダン標準形**という。

定理 3.5～定理 3.7 を証明する前に例を示す。

例　3.9　（例 3.4 の続き）次の(1)～(3)の行列に対して，標準形で表そう。

$$\text{(1)}\ A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\qquad \text{(2)}\ B=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}\qquad \text{(3)}\ C=\begin{pmatrix}3 & -7\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

(1) 行列$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$について，$A$ の固有値は-1 と 4 であるから，定理 3.5 の異なる 2 つの実固有値をもつ場合である。

-1，4 に対する固有ベクトルの 1 つをそれぞれ$\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$とし（いずれも t=1 とした），行列 P を$P=(\vec{u}\ \vec{v})=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$とする。このとき，

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 20\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

(2) 行列$B=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$について，$B$ の固有値は 2 のみであるから，定理 3.6 の 1 つの実固有値をもつ場

合である。さらに，$B-2E=\begin{pmatrix}4 & -4\\4 & -4\end{pmatrix}\neq O$ であるから(2)の場合である。

(i) まずは$(B-2E)\vec{v}\neq\vec{0}$ となる任意のベクトル$\vec{v}$を一つ取ろう。たとえば$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ とする。

(ii) $\vec{u}=(B-2E)\vec{v}$ より，$\vec{u}=\begin{pmatrix}4 & -4\\4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ である。

(iii) $P=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}$ より，$P=\begin{pmatrix}4 & 1\\4 & 0\end{pmatrix}$ である。

このとき，

$$
\begin{aligned}
P^{-1}BP&=\begin{pmatrix}4 & 1\\4 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}6 & -4\\4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\4 & 0\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}0 & -1\\-4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -4\\4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\4 & 0\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}0 & -1\\-4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 6\\8 & 4\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-8 & -4\\0 & -8\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である。

(3) 行列$C=\begin{pmatrix}3 & -7\\1 & -1\end{pmatrix}$ について，Cの固有値は $t=1\pm\sqrt{3}\,i$ であるから，定理 3.7 の場合である。

$1+\sqrt{3}\,i$ に対する固有ベクトルの 1 つを$\overrightarrow{v_+}=\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\,i\\1\end{pmatrix}$ とする（$t=1$ とした）。このとき $\overrightarrow{v_-}=\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\,i\\1\end{pmatrix}$ は $1-\sqrt{3}\,i$ に対する固有ベクトルになる。さらに，

$$
\vec{u}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{v_+}+\overrightarrow{v_-})=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\,i\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\,i\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}
$$

$$
\vec{v}=\frac{i}{2}(\overrightarrow{v_+}-\overrightarrow{v_-})=\frac{i}{2}\left\{\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\,i\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\,i\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}
$$

とし，行列 P を $P=(\vec{u}\ \ \vec{v})=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{3}\\1 & 0\end{pmatrix}$ とする。このとき，

$$
\begin{aligned}
P^{-1}CP&=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{3}\\1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & -7\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{3}\\1 & 0\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -7\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{3}\\1 & 0\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\sqrt{3}\\1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -3\\ 3 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

である。■

例 3.9(1)，(2)の結果は図形的には何を意味しているのか考えよう。

(1)について，基底を行列 A の固有値−1，4 に対する固有ベクトルにとろう。つまり，基底 $\boldsymbol{V}=\left\{\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ とする。例 3.4 で述べたように，行列 A によって定まる 1 次変換によって，

$\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ は（$E(-1)$のベクトルであるので）それを−1 倍したベクトルに写る

$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ は（$E(4)$のベクトルであるので）それを 4 倍したベクトルに写る

ので，基底 $\boldsymbol{V}_1=\left\{\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ に関するこの 1 次変換の表現行列は$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ となる。

(2)について，まず，$\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ は行列 A の固有値 2 に対する固有ベクトルであることに注意しよう。これはたまたまではなく，必ずそうなるのである（主張 3.6.1 参照）。(1)と同様に，

$\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ は（$E(2)$のベクトルであるので）それを 2 倍したベクトルに写る

のである。次に，$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ について，$\vec{u}=(B-2E)\vec{v}$ であるから，$B\vec{v}=2\vec{v}+\vec{u}$ である。つまり

$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ はそれを 2 倍したベクトルに$\vec{u}$だけ平行移動したベクトルに写る

のである。したがって基底 $\boldsymbol{V}_2=\left\{\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ に関するこの 1 次変換の表現行列は$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ となる。

定理 3.5～定理 3.7 を証明するために補題を 2 つ準備する。

補題 3.10　行列 A が異なる 2 つの実固有値λ，μ をもつとし，λ，μ に対する固有ベクトルの 1 つをそれぞれ$\vec{u}$，$\vec{v}$ とする。このとき，$\vec{u}$，$\vec{v}$ は 1 次独立である。

［証明］$x\vec{u}+y\vec{v}=\vec{0}$　…　①　とする。

①の両辺を A で写すと，$A(x\vec{u}+y\vec{v})=A\vec{0}$ より$xA\vec{u}+yA\vec{v}=\vec{0}$ であるが，$\vec{u}$，$\vec{v}$ は A の固有ベクトルであるから，

$x\lambda\vec{u}+y\mu\vec{v}=\vec{0}$　…　②

である。②−①×μ より，

$x(\lambda-\mu)\vec{u}=\vec{0}$

となるが，$\lambda \neq \mu$，$\vec{u} \neq \vec{0}$ より $x=0$ である。①に代入して $y=0$ である。

命題 0.3（6）より $\vec{u}$，$\vec{v}$ は 1 次独立である。■

一般に，行列 A と 2 次式 $\Phi(t)=at^2+bt+c$ に対して，行列 $\Phi(A)$ を，

$$\Phi(A)=aA^2+bA+cE$$

で定義する。

補題 3.11　（ハミルトン-ケーリーの定理）行列 A の固有多項式を $\Phi_A(t)$ とすれば，$\Phi_A(A)=O$ である。

［証明］行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\Phi_A(t)=t^2-(a+d)t+(ad-bc)$ であるから，

$$\Phi_A(A)=A^2-(a+d)A+(ad-bc)E$$

である。ここで，

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\Phi_A(A) &=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O\end{aligned}$$

となる。よって等式は成り立つ。■

このハミルトン-ケーリーの定理は，いまは定理を証明するための補題としての役割しか果たさないが，演習問題を解くときに威力を発揮するのでぜひ覚えておいていただきたい。また，第 6 章 6.3 節でも再び考察する。

［定理 3.5 の証明］$\vec{u}$，$\vec{v}$ はそれぞれ λ，μ に対する固有ベクトルであるから，

$$A\vec{u}=\lambda\vec{u}，\ A\vec{v}=\mu\vec{v}$$

である。$P=(\vec{u}\ \ \vec{v})$ であるから，

$$AP=A(\vec{u}\ \ \vec{v})=(\lambda\vec{u}\ \ \mu\vec{v})=(\vec{u}\ \ \vec{v})\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

である。補題 3.10 より，$\vec{u}$，$\vec{v}$ は 1 次独立であるから $P=(\vec{u}\ \ \vec{v})$ は逆行列をもつ。両辺に左から P^{-1} をかけると，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

となる。■

［定理 3.6 の証明］(1) は明らか。

(2) $A-\lambda E \neq O$ より，(i)の$(A-\lambda E)\vec{v} \neq \vec{0}$ となるベクトル$\vec{v}$は存在する。(ii)のように$\vec{u}$を定義すると，(i)より$\vec{u} \neq \vec{0}$ である。

主張 3.6.1　$(A-\lambda E)\vec{u}=\vec{0}$

> ［証明］A の固有値はλのみであるから, その固有多項式$\Phi_A(t)$ は,
>
> $$\Phi_A(t)=(t-\lambda)^2=t^2-2\lambda t+\lambda^2$$
>
> である。ハミルトン-ケーリーの定理（補題 3.11）より$\Phi_A(A)=O$ であるから,
>
> $$A^2-2\lambda A+\lambda^2 E=O$$
>
> である。したがって,
>
> $$(A-\lambda E)\vec{u}=(A-\lambda E)(A-\lambda E)\vec{v}=(A^2-2\lambda A+\lambda^2 E)\vec{v}=O\vec{v}=\vec{0}$$ ■

したがって,

$$\begin{aligned}(A-\lambda E)P&=((A-\lambda E)\vec{u}\ \ (A-\lambda E)\vec{v})\\&=(\vec{0}\ \ \vec{u})\\&=(\vec{u}\ \ \vec{v})\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\&=P\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

主張 3.6.2　P は逆行列をもつ

> ［証明］$P=(\vec{u}\ \ \vec{v})$ であるから，$\vec{u}$ と$\vec{v}$ が 1 次独立であることを示せばよい。
>
> $\vec{u}$ と$\vec{v}$ が 1 次従属であると仮定すると，$\vec{v}=k\vec{u}$ となる 0 でない実数 k がある。このとき,
>
> $$(A-\lambda E)\vec{v}=(A-\lambda E)(k\vec{u})=k(A-\lambda E)\vec{u}=\vec{0}$$
>
> となり，(i)に矛盾する。■

両辺に左からP^{-1} をかけると,

$$P^{-1}(A-\lambda E)P=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

となる。ここで,

$$左辺=P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda E)P=P^{-1}AP-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$$

であるから，$P^{-1}AP-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ すなわち,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}$$

である。■

［定理 3.7 の証明］（前半）（形式的に）$\overrightarrow{v_+}=\begin{pmatrix}a+ib\\c+id\end{pmatrix}$ は$\alpha+i\beta$ に対する固有ベクトルなので,

$A\overrightarrow{v_+}=(\alpha+i\beta)\overrightarrow{v_+}$ すなわち,

$$A\begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}=(\alpha+i\beta)\begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$$

である。これより，

$$A\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+iA\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha a-\beta b)+i(\alpha b+\beta a) \\ (\alpha c-\beta d)+i(\alpha d+\beta c) \end{pmatrix}$$

となるので実部と虚部を比較することによって，

$$A\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a-\beta b \\ \alpha c-\beta d \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha b+\beta a \\ \alpha d+\beta c \end{pmatrix}$$

である。このとき，

$$\begin{aligned}
A\overrightarrow{v_-}&=A\begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix}\\
&=A\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}-iA\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} \alpha a-\beta b \\ \alpha c-\beta d \end{pmatrix}-i\begin{pmatrix} \alpha b+\beta a \\ \alpha d+\beta c \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} (\alpha a-\beta b)-i(\alpha b+\beta a) \\ (\alpha c-\beta d)-i(\alpha d+\beta c) \end{pmatrix}\\
&=(\alpha-i\beta)\begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix}\\
&=(\alpha-i\beta)\overrightarrow{v_-}
\end{aligned}$$

となる。

（後半）$\overrightarrow{v_+}=\begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{v_-}=\begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix}$ （a，b は実数）であるから，

$$\vec{u}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{v_+}+\overrightarrow{v_-})=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}=\frac{i}{2}(\overrightarrow{v_+}-\overrightarrow{v_-})=\frac{i}{2}\left\{\begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} -b \\ -d \end{pmatrix}$$

となり，これらの成分は実数である。さらに，

$$\begin{aligned}
A\vec{u}&=\frac{1}{2}(A\overrightarrow{v_+}+A\overrightarrow{v_-})=\frac{1}{2}\{(\alpha+i\beta)\overrightarrow{v_+}+(\alpha-i\beta)\overrightarrow{v_-}\}\\
&=\frac{1}{2}\alpha(\overrightarrow{v_+}+\overrightarrow{v_-})+\frac{i}{2}\beta(\overrightarrow{v_+}-\overrightarrow{v_-})=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\vec{v}&=\frac{i}{2}(A\overrightarrow{v_+}-A\overrightarrow{v_-})=\frac{i}{2}\{(\alpha+i\beta)\overrightarrow{v_+}-(\alpha-i\beta)\overrightarrow{v_-}\}\\
&=\frac{i}{2}\alpha(\overrightarrow{v_+}-\overrightarrow{v_-})-\frac{1}{2}\beta(\overrightarrow{v_+}+\overrightarrow{v_-})=-\beta\vec{u}+\alpha\vec{v}
\end{aligned}$$

であるから，

$$AP=A(\vec{u}\ \ \vec{v})=(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\ \ -\beta\vec{u}+\alpha\vec{v})=(\vec{u}\ \ \vec{v})\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

である。

主張 3.7.1　Pは逆行列をもつ

[証明]$P=(\vec{u}\ \ \vec{v})$ であるから，$\vec{u}$ と$\vec{v}$ が 1 次独立であることを示せばよい。

$x\vec{u}+y\vec{v}=\vec{0}$ とする（x，y は複素数）。このとき$\dfrac{x}{2}(\overrightarrow{v_+}+\overrightarrow{v_-})+\dfrac{yi}{2}(\overrightarrow{v_+}-\overrightarrow{v_-})=\vec{0}$ すなわち，

$$\frac{1}{2}(x+yi)\overrightarrow{v_+}+\frac{1}{2}(x-yi)\overrightarrow{v_-}=\vec{0}$$

である。

補題 3.10 より，$\overrightarrow{v_+}$，$\overrightarrow{v_-}$ は 1 次独立である（補題 3.10 は固有値が複素数の場合にも成り立つ）から

$x+yi=0$　　…①　　$x-yi=0$　　…②

となる。①＋②より $x=0$ が，①－②より $y=0$ が得られる。

したがって$\vec{u}$ と$\vec{v}$ は 1 次独立である。■

両辺に左からP^{-1}をかけると，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$$

となる。■

3.3　行列のべき乗 (1)

定理 3.5～定理 3.7 の応用例として，行列のべき乗を求めることができる。まず，

［1］ $(P^{-1}AP)^2=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}AEAP=P^{-1}A^2P$

$(P^{-1}AP)^3=(P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP)=P^{-1}A^2EAP=P^{-1}A^3P$

…（以下同様にして）

$(P^{-1}AP)^n=(P^{-1}A^{n-1}P)(P^{-1}AP)=P^{-1}A^{n-1}EAP=P^{-1}A^nP$

となることに注意しよう。

また，行列の標準形のべき乗について，

［2］(i) $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ に対して，

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 0 \\ 0 & \mu^3\end{pmatrix}$$

…（以下同様にして）

$$A^n=\begin{pmatrix}\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & \mu^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}$$

(ii) $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ に対して，

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & \lambda^3\end{pmatrix}$$

…（以下同様にして）

$$A^n=\begin{pmatrix}\lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$$

(iii) $A=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ に対して,

$$A=r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

と表すことができる。ただし，$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\cos\theta=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\sin\theta=\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ である。ここで注意 1.12.1(2)に気をつければ,

$$A^2=r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=r^2\begin{pmatrix}\cos2\theta & -\sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta\end{pmatrix}$$

$$A^3=r^2\begin{pmatrix}\cos2\theta & -\sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta\end{pmatrix}r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=r^3\begin{pmatrix}\cos3\theta & -\sin3\theta\\ \sin3\theta & \cos3\theta\end{pmatrix}$$

…（以下同様にして）

$$A^n=r^{n-1}\begin{pmatrix}\cos(n-1)\theta & -\sin(n-1)\theta\\ \sin(n-1)\theta & \cos(n-1)\theta\end{pmatrix}r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=r^n\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

となる。

例題 3.12　n を正の整数とする。次の(1)～(3)の行列に対して，行列の n 乗を求めなさい。

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$　　(3) $C=\begin{pmatrix}3 & -7\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

［解答］（これらの行列は例 3.4，例 3.9 のものと同じである。）

(1) 例 3.9(1)より，$P=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ である。両辺を n 乗すると,

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}$$

となる。したがって,

$$A^n=P\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n & -(-1)^n\\ 2\times4^n & 3\times4^n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\times(-1)^n+2\times4^n & -3\times(-1)^n+3\times4^n \\ -2\times(-1)^n+2\times4^n & 2\times(-1)^n+3\times4^n \end{pmatrix}$$

となる。

(2) 例 3.9(2)より，$P=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ である。両辺を n 乗すると，

$$P^{-1}B^nP=\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

となる。したがって，

$$B^n=P\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4n2^{n-1} & -2^n+4n2^{n-1} \\ -4\cdot2^n & 4\cdot2^n \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -16n2^{n-1}-4\cdot2^n & 16n2^{n-1} \\ -16n2^{n-1} & -4\cdot2^n+16n2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4n2^{n-1}+2^n & -4n2^{n-1} \\ 4n2^{n-1} & 2^n-4n2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (2n+1)2^n & -n2^{n+1} \\ n2^{n+1} & (-2n+1)2^n \end{pmatrix}$$

となる。

(3) 例 3.9(3)より，$P=\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1}CP=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ である。ここで，

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} \cos60^\circ & -\sin60^\circ \\ \sin60^\circ & \cos60^\circ \end{pmatrix}$$

である。両辺を n 乗すると，

$$P^{-1}C^nP=2^n\begin{pmatrix} \cos(60^\circ\times n) & -\sin(60^\circ\times n) \\ \sin(60^\circ\times n) & \cos(60^\circ\times n) \end{pmatrix}$$

となる。したがって，

$$C^n=P2^n\begin{pmatrix} \cos(60^\circ\times n) & -\sin(60^\circ\times n) \\ \sin(60^\circ\times n) & \cos(60^\circ\times n) \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}2^n\begin{pmatrix} \cos(60^\circ\times n) & -\sin(60^\circ\times n) \\ \sin(60^\circ\times n) & \cos(60^\circ\times n) \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{2^n}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(60^\circ\times n) & \sqrt{3}\cos(60^\circ\times n)-2\sin(60^\circ\times n) \\ -\cos(60^\circ\times n) & \sqrt{3}\sin(60^\circ\times n)+2\cos(60^\circ\times n) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{2^n}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2\sin(60^\circ\times n)+\sqrt{3}\cos(60^\circ\times n) & -7\sin(60^\circ\times n) \\ \sin(60^\circ\times n) & \sqrt{3}\cos(60^\circ\times n)-2\sin(60^\circ\times n) \end{pmatrix}$$

となる。■

【演習問題 3】

［3-1］次の行列の固有値と，その固有値に対する固有ベクトルを求め，標準形で表しなさい。

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

［3-2］$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$ とする。次の多項式 $f(t)$ に対して，行列 $f(A)$ を求めなさい。

(1) $f(t)=t^{20}$　　(2) $f(t)=t^{11}+t^{7}-2$

［3-3］行列 A の固有値を λ，μ とするとき，$\mathrm{trace}A=\lambda+\mu$ であることを証明しなさい。

［3-4］A，B を行列とする。A，B のいずれか一方が逆行列をもつとき，AB と BA の固有多項式は一致することを証明しなさい。

［3-5］行列 A の固有値を λ，μ とする。このとき次の(1)，(2)の事項を証明しなさい。

(1) A が逆行列をもつ　$\Longleftrightarrow$　$\lambda\fallingdotseq 0$ かつ $\mu\fallingdotseq 0$

(2) $A^2=O$　$\Longleftrightarrow$　$\lambda=\mu=0$

第 4 章　行列のスペクトル分解

本章では，行列が異なる 2 つの実固有値をもつとき，2 つの射影という行列の 1 次結合で表されることについて述べる。

4.1 節では，射影の性質について述べ，それを用いて上記のように行列を 2 つの射影の 1 次結合に分解することについて述べる。

4.2 節では，4.1 節の事項の応用として，再び行列のべき乗を求める計算について述べる。この手法を用いた解法は高等学校の受験参考書にはあまり見受けられない。

4.1　行列のスペクトル分解

例 3.4 の行列$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$に対して，$A$ の固有値は-1 と 4 で，

$$E(-1)=\left\{\begin{pmatrix}3t\\-2t\end{pmatrix}\middle|\, t\text{はすべての実数}\right\}$$

$$E(4)=\left\{\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}\middle|\, t\text{はすべての実数}\right\}$$

であった。

いま，天下り的ではあるが，行列 P,　Q を，

$$P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-3\\-2&2\end{pmatrix},\quad Q=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}$$

とおく。実際に計算することによって，

(1) $P+Q=E$（E は単位行列）

(2) $-P+4Q=A$

が成り立つ。さらに，

(3) $PQ=QP=O$（O は零行列）

(4) $P^2=P$,　$Q^2=Q$

が成り立つことがわかる。ところで，この行列 P,　Q は何を表しているのだろうか。

まず，行列$P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-3\\-2&2\end{pmatrix}$について考えよう。

(5) P によって定まる 1 次変換によって任意のベクトルは $E(-1)$のベクトルに写る。

［証明］任意のベクトル$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$に対して，

$$P\vec{p}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-3\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3x-3y\\-2x+2y\end{pmatrix}=\frac{x-y}{5}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

であるからこれは $E(-1)$のベクトルである。■

(6) 点 M が P によって定まる 1 次変換で写される点をM′ とすると，線分 MM′ は直線 $E(4)$に平行であ

る。

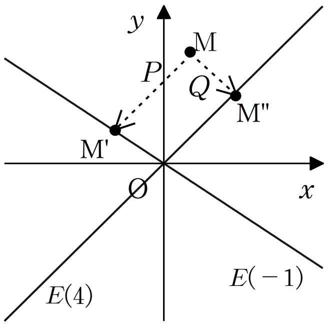
[証明] $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ が $E(4)$のベクトルであることを示せばよい。

点 M の座標を M$(x,\ y)$とすると，点M′ の座標は(5)の証明よりM′$\left(\dfrac{3x-3y}{5},\dfrac{-2x+2y}{5}\right)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}=\begin{pmatrix}\dfrac{3x-3y}{5}-x\\ \dfrac{-2x+2y}{5}-y\end{pmatrix}=\dfrac{2x+3y}{5}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ は $E(4)$のベクトルである。■

同様にして，行列$Q=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}$について考えると，

(5)′ Q によって定まる 1 次変換によって任意のベクトルは $E(4)$のベクトルに写る。

(6)′ 点 M が Q によって定まる 1 次変換で写される点をM″ とすると，線分 MM″ は直線 $E(-1)$に平行である。



これらのことより，Pによって定まる 1 次変換は，点を（直線 $E(4)$に平行に）直線 $E(-1)$上に射影し，Qによって定まる 1 次変換は，点を（直線 $E(-1)$に平行に）直線 $E(4)$上に射影するものである。このことより，

(1) $P+Q=E$

(3) $PQ=QP=O$

(4) $P^2=P,\ \ Q^2=Q$

は理解できるであろう。一般に，行列 P が $P^2=P$をみたすとき，**射影**という。

次に(2)について考えよう（$-P+4Q=A$ の左辺の係数の由来は何だろうか)。

任意のベクトル$\vec{p}$に対して，(1)より，

$A\vec{p}=A(P+Q)\vec{p}=AP\vec{p}+AQ\vec{p}$

であるが，$P\vec{p}$ は $E(-1)$のベクトル，$Q\vec{p}$ は $E(4)$のベクトルであるから，

$AP\vec{p}=-P\vec{p}$，$AQ\vec{p}=4Q\vec{p}$

である。したがって，

$A\vec{p}=-P\vec{p}+4Q\vec{p}=(-P+4Q)\vec{p}$

となる。ベクトル$\vec{p}$は任意であるから，

(2) $-P+4Q=A$

となる。係数の-1，4 は A の固有値である。この(2)式を A のスペクトル分解という。

まとめると，行列のスペクトル分解とは，

(i) 射影を用いることによってベクトルを 2 つの固有空間のベクトルの和に分解し，

(ii) ベクトルの像を各固有空間に射影したベクトルに固有値倍して和をとる

ということである。

それでは，一般に行列 A が異なる 2 つの実固有値 λ，μ をもつとき，射影 P, Q をどのように求めたらよいであろうか。それは,

$$\begin{cases} P+Q=E \\ \lambda P+\mu Q=A \end{cases}$$

を逆に解いて,

$$P=\frac{1}{\lambda-\mu}(A-\mu E),\quad Q=-\frac{1}{\lambda-\mu}(A-\lambda E)$$

とすればよい。

今までのことを一般化して，定理としてまとめておく。

定理 4.1　（行列のスペクトル分解）行列 A が異なる 2 つの実固有値 λ，μ をもつとし，各固有値 λ，μ に対する固有空間をそれぞれ $E(\lambda)$，$E(\mu)$ とする。

いま，行列 P, Q を,

$$P=\frac{1}{\lambda-\mu}(A-\mu E),\quad Q=-\frac{1}{\lambda-\mu}(A-\lambda E)$$

で定義する。このとき，次の(1)～(6)の事項が成り立つ。

(1) $P+Q=E$

(2) $\lambda P+\mu Q=A$

(3) $PQ=QP=O$

(4) $P^2=P$, $Q^2=Q$

(5) 任意のベクトル $\vec{p}$ に対して，$P\vec{p}$ は $E(\lambda)$ のベクトル，$Q\vec{p}$ は $E(\mu)$ のベクトルである。

(6) 任意のベクトル $\vec{p}$ に対して，$\vec{p}-P\vec{p}$ は $E(\mu)$ のベクトル，$\vec{p}-Q\vec{p}$ は $E(\lambda)$ のベクトルである。

［(2)式を行列 A の**スペクトル分解**という。］

定理 4.1 を証明するために補題を 1 つ準備する。

補題 4.2　行列 A が異なる 2 つの実固有値 λ，μ をもつとき,

$$(A-\lambda E)(A-\mu E)=O,\quad (A-\mu E)(A-\lambda E)=O$$

が成り立つ。

［証明］行列 A を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。実固有値 λ，μ は固有方程式

$$t^2-(a+d)t+(ad-bc)=0$$

の 2 つの解であるから，2 次方程式の解と係数の関係より,

$$\lambda+\mu=a+d,\quad \lambda\mu=ad-bc$$

である。また，ハミルトン-ケーリーの定理（補題 3.11）より,

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

である。したがって,

$$(A-\lambda E)(A-\mu E)=A^2-(\lambda+\mu)A+\lambda\mu E=A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

$$(A-\mu E)(A-\lambda E)=A^2-(\lambda+\mu)A+\lambda\mu E=A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

である。■

［定理 4.1 の証明］(1) $P+Q=\dfrac{1}{\lambda-\mu}(A-\mu E)-\dfrac{1}{\lambda-\mu}(A-\lambda E)=E$

(2) $\lambda P+\mu Q=\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}(A-\mu E)-\dfrac{\mu}{\lambda-\mu}(A-\lambda E)=A$

(3) $PQ=-\dfrac{1}{(\lambda-\mu)^2}(A-\lambda E)(A-\mu E)$, $QP=-\dfrac{1}{(\lambda-\mu)^2}(A-\lambda E)(A-\mu E)$

であるが，補題 4.2 より $PQ=QP=O$ である。

(4) $P+Q=E$ に注意すれば,

$$P-P^2=P(E-P)=PQ=O,\ Q-Q^2=Q(E-Q)=QP=O$$

となる。したがって，$P^2=P$, $Q^2=Q$ である。

(5) $E(\lambda)=\{\vec{v}\,|\,(A-\lambda E)\vec{v}=\vec{0}\}$, $E(\mu)=\{\vec{v}\,|\,(A-\mu E)\vec{v}=\vec{0}\}$ であるから，任意のベクトル $\vec{p}$ に対して，$(A-\lambda E)P\vec{p}=\vec{0}$，$(A-\mu E)Q\vec{p}=\vec{0}$，すなわち,

$$(A-\lambda E)P=O,\ (A-\mu E)Q=O$$

を示せばよい。実際，補題 4.2 より,

$$(A-\lambda E)P=\frac{1}{\lambda-\mu}(A-\lambda E)(A-\mu E)=O$$

$$(A-\mu E)Q=-\frac{1}{\lambda-\mu}(A-\mu E)(A-\lambda E)=O$$

である。

(6) (5)と同様にして，任意のベクトル $\vec{p}$ に対して，$(A-\mu E)(E-P)\vec{p}=\vec{0}$，$(A-\lambda E)(E-Q)\vec{p}=\vec{0}$，すなわち,

$$(A-\mu E)(E-P)=O,\ (A-\lambda E)(E-Q)=O$$

を示せばよいが，$P+Q=E$ であるから,

$$(A-\mu E)(E-P)=(A-\mu E)Q=O,\ (A-\lambda E)(E-Q)=(A-\lambda E)P=O$$

である。■

例 4.3 行列 $A=\begin{pmatrix}10 & 6\\ -9 & -5\end{pmatrix}$ のスペクトル分解を求めよう。

まず，固有値を求める。固有方程式は,

$$t^2-5t+4=0$$

である。これより，固有値は 4 と 1 である。

次に射影 P, Q を求める。

$$P=\frac{1}{4-1}(A-1E)=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}10 & 6\\ -9 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -3 & -2\end{pmatrix}$$

$$Q=-\frac{1}{4-1}(A-4E)=-\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}10 & 6\\ -9 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

である。［Qは定理 4.1(1)より，$Q=E-P$ として求めたほうが簡単。］したがって A のスペクトル分解は,

$$A=4P+1Q=4\begin{pmatrix}3 & 2\\ -3 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

である。■

なお，この分解が定理 4.1 の諸事項をみたすことも容易に確認できる。

4.2　行列のべき乗 (2)

定理 4.1 の応用例として，行列のべき乗を求めることができる。例題 3.12(1)と同じ問題を行列のスペクトル分解の方法を用いて解こう。まず,

$$\lambda P+\mu Q=A,\ PQ=QP=O,\ P^2=P,\ Q^2=Q$$

であるから,

$$A^2=(\lambda P+\mu Q)(\lambda P+\mu Q)=\lambda^2P^2+\lambda\mu PQ+\mu\lambda QP+\mu^2Q^2=\lambda^2P+\mu^2Q$$

$$A^3=(\lambda^2P+\mu^2Q)(\lambda P+\mu Q)=\lambda^3P^2+\lambda^2\mu PQ+\mu^2\lambda QP+\mu^3Q^2=\lambda^3P+\mu^3Q$$

…（以下同様にして）

$$A^n=(\lambda^{n-1}P+\mu^{n-1}Q)(\lambda P+\mu Q)=\lambda^nP^2+\lambda^{n-1}\mu PQ+\mu^{n-1}\lambda QP+\mu^nQ^2=\lambda^nP+\mu^nQ$$

となることに注意しよう。

例題 4.4　n を正の整数とする。行列$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$について A^nを求めなさい。

［解答］第 4 章の初めに述べたように，行列 P, Qを,

$$P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix},\quad Q=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

とおく。このとき,

$$-P+4Q=A,\ PQ=QP=O,\ P^2=P,\ Q^2=Q$$

であるから,

$$\begin{aligned}A^n&=(-P+4Q)^n\\ &=(-1)^nP+4^nQ\\ &=(-1)^n\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix}+4^n\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\times(-1)^n+2\times4^n & -3\times(-1)^n+3\times4^n\\ -2\times(-1)^n+2\times4^n & 2\times(-1)^n+3\times4^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。■

もちろん例題 3.12(1)と同じ答えになっている。

【演習問題 4】

［4-1］次の行列のスペクトル分解を求めなさい。

(1) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

［4-2］n を正の整数とする。行列 $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ について A^n を求めなさい。

［4-3］行列 P を射影とする（すなわち $P^2=P$)。次の(1), (2)の事項を証明しなさい。

(1) P の固有値は 0 または 1 に限る。

(2) P の固有値は 0 のみである　$\Longleftrightarrow$　$P=O$

［4-4］行列 $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ を O でない射影とする。このとき，$a\geqq\frac{1}{2}$ または $d\geqq\frac{1}{2}$ であることを証明しなさい。

［4-5］次の各問いに答えなさい。

(1) 行列 A が異なる 2 つの正値実固有値 λ，μ（λ，$\mu>0$）をもつとき，$B^2=A$ となる行列 B があることを証明しなさい。

(2) (1)を利用して，行列 $A=\begin{pmatrix}10 & 6\\ -9 & -5\end{pmatrix}$ に対して $B^2=A$ となる行列 B を求めなさい。

第 5 章　対称行列の対角化

本章では，対称行列という行列に対して，その行列を対角化すること，ならびにその応用について述べる。

5.1 節では，準備として，直交行列についてその定義と性質を述べる。

5.2 節では，対称行列が直交行列を用いて対角化できることについて述べる。

5.3 節では，対称行列の応用例として，2 次形式について述べる。これにより，2 次曲線の概形を描くことならびに絶対不等式へ応用できることについて述べる。

5.1　直交行列

この節では直交行列について述べる。直交行列について説明するためにはベクトルの内積の知識を必要とする。はじめに，ベクトルの内積について簡単に復習しよう。

復習 5.1　（ベクトルの内積）

［1］2 つのベクトル $\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}$ に対して，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ の内積　$\vec{p}\cdot\vec{q}=xz+yu$

［2］ベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$，実数 k に対して，

(1)　（分配法則）$(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{r}=\vec{p}\cdot\vec{r}+\vec{q}\cdot\vec{r}$

(2)　（結合法則）$(k\vec{p})\cdot\vec{q}=k(\vec{p}\cdot\vec{q})$

(3)　（交換法則）$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{q}\cdot\vec{p}$

さらに，

(4) $\vec{p}\cdot\vec{p}\geqq 0$，特に $\vec{p}\cdot\vec{p}=0 \iff \vec{p}=\vec{0}$

［3］ベクトル $\vec{p}$ の大きさ　$|\vec{p}|=\vec{p}\cdot\vec{p}$

［4］$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ に対して，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ が垂直 $\iff$ $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$

定義 5.2　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，A の行と列を入れ替えた行列を ${}^tA$ と表す。すなわち，

$${}^tA=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

である。これを A の**転置行列**という。

命題 5.3　行列 A，B に対して，次の(1)～(3)の事項が成り立つ。

(1) ${}^t({}^tA)=A$

(2) ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$，${}^t(ABC)={}^tC\,{}^tB\,{}^tA$，（行列が 4 つ以上でも同様）

(3) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のとき，$(x' \;\; y')=(x \;\; y)\,{}^tA$

［証明］$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とする。

(1) ${}^t({}^tA)={}^t\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=A$ である。

(2) $AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$，${}^tB\,{}^tA=\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & ce+dg \\ af+bh & cf+dh \end{pmatrix}$

より ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$ である。

これより，

$${}^t(ABC)={}^t\{A(BC)\}={}^t(BC)\,{}^tA={}^tC\,{}^tB\,{}^tA$$

が成り立つ。

(3) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ であるから

$$x'=ax+by,\ y'=cx+dy$$

である。したがって，

$$(x\ \ y)\,{}^tA=(x\ \ y)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=(ax+by\ \ cx+dy)=(x'\ \ y')$$

である。■

命題 5.4　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，次の(1)～(5)の条件は同値である。

(1) 任意のベクトル $\vec{p}$ に対して，$|A\vec{p}|=|\vec{p}|$ が成り立つ。

(2) 任意のベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ に対して，$(A\vec{p})\cdot(A\vec{q})=\vec{p}\cdot\vec{q}$ が成り立つ。

(3) $a^2+c^2=b^2+d^2=1$，$ab+cd=0$ が成り立つ。

(4) ある θ （$0^\circ\leqq\theta<180^\circ$ ）を用いて，

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\quad \text{または}\quad A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

と表される。

(5) 行列 A は逆行列をもち，$A^{-1}={}^tA$ が成り立つ。

［行列 A が(1)～(5)のいずれか（したがってすべて）をみたすとき，**直交行列**という。］

命題 5.4 において，条件(3)は次のように言い換えられる。

(3)′　$A=(\vec{u}\ \ \vec{v})$ とすると，2 つのベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ について，

(i) $\vec{u}$，$\vec{v}$ の大きさはともに 1 で

(ii) $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は垂直である

これが直交行列という名の由来である。

条件(4)の行列について，図形的には，

$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は，原点を中心とする角 θ の回転移動

$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ は，原点を通り，x 軸と角 $\dfrac{\theta}{2}$ をなす直線に関する対称移動を表している（定理 1.12，定理 1.14 参照）。

命題 5.4 を証明するために補題を 1 つ準備する。

補題 5.5　行列 A とベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ に対して，

$$(A\vec{p})\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot({}^tA\vec{q})$$

が成り立つ。

［証明］ $A=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix}z \\ u\end{pmatrix}$ とする。このとき，

$$A\vec{p}=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by \\ cx+dy\end{pmatrix},\quad {}^tA\vec{q}=\begin{pmatrix}a & c \\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}au+cv \\ bu+dv\end{pmatrix}$$

であるから，

$$(A\vec{p})\cdot\vec{q}=(ax+by)z+(cx+dy)u=axz+byz+cxu+dyu$$

$$\vec{p}\cdot({}^tA\vec{q})=x(az+cu)+y(bz+du)=axz+cxu+byz+dyu$$

となる。よって，$(A\vec{p})\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot({}^tA\vec{q})$ が成り立つ。■

［命題 5.4 の証明］((1)$\Longrightarrow$(2)) (1)が成り立つとする。任意のベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ に対して，$A\vec{p}+A\vec{q}=A(\vec{p}+\vec{q})$ であり，仮定より $|A(\vec{p}+\vec{q})|=|\vec{p}+\vec{q}|$ であるから，

$$|A\vec{p}+A\vec{q}|=|\vec{p}+\vec{q}|$$

である。両辺を 2 乗して，

$$|A\vec{p}|^2+2(A\vec{p})\cdot(A\vec{q})+|A\vec{q}|^2=|\vec{p}|^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

となるが，仮定より $|A\vec{p}|=|\vec{p}|$，$|A\vec{q}|=|\vec{q}|$ であるから，$(A\vec{p})\cdot(A\vec{q})=\vec{p}\cdot\vec{q}$ が成り立つ。

((2)$\Longrightarrow$(3)) (2)が成り立つとする。$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$，$\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$ とする。このとき，

$$A\vec{e_1}=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a \\ c\end{pmatrix},\quad A\vec{e_2}=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b \\ d\end{pmatrix}$$

である。したがって，

$(A\vec{e_1})\cdot(A\vec{e_1})=\vec{e_1}\cdot\vec{e_1}$ より，$a^2+c^2=1$

$(A\vec{e_2})\cdot(A\vec{e_2})=\vec{e_2}\cdot\vec{e_2}$ より，$b^2+d^2=1$

$(A\vec{e_1})\cdot(A\vec{e_2})=\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}$ より，$ab+cd=0$

が成り立つ。

((3)$\Longrightarrow$(4)) (3)が成り立つとする。連立方程式

$$\begin{cases}a^2+c^2=1 & \cdots ① \\ b^2+d^2=1 & \cdots ② \\ ab+cd=0 & \cdots ③\end{cases}$$

について，①より，ある θ （$0^\circ\leqq\theta<180^\circ$ ）を用いて，

$$a=\cos\theta,\quad b=\sin\theta$$

と表される。③に代入して，$b\cos\theta+d\sin\theta=0$ となるから，ある実数 k を用いて，

$$b=-k\sin\theta,\quad d=k\cos\theta$$

と表される。②に代入して，$k^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=1$ すなわち $k^2=1$ であるから，$k=\pm1$ である。よって，

$$b=-\sin\theta,\ d=\cos\theta \quad \text{または} \quad b=\sin\theta,\ d=-\cos\theta$$

となる。よって，$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ または $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ である。

((4)$\Longrightarrow$(5)) (4)が成り立つとする。

$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ のとき，$|A|=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\neq0$ であるから A は逆行列をもち，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}={}^tA$$

である。

$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ のとき，$|A|=-\cos^2\theta-\sin^2\theta=-1\neq0$ であるから A は逆行列をもち，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}={}^tA$$

である。

((5)$\Longrightarrow$(1)) (5)が成り立つとする。任意のベクトル $\vec{p}$ に対して，

$$\begin{aligned}|A\vec{p}|^2 &=(A\vec{p})\cdot(A\vec{p})\\ &=\vec{p}\cdot({}^tAA\vec{p}) && \text{（補題 5.5 より）}\\ &=\vec{p}\cdot(A^{-1}A\vec{p}) && \text{（仮定より）}\\ &=\vec{p}\cdot\vec{p}\\ &=|\vec{p}|^2\end{aligned}$$

となる。$|A\vec{p}|\geqq0$，$|\vec{p}|\geqq0$ より，$|A\vec{p}|=|\vec{p}|$ が成り立つ。■

5.2 対称行列の対角化

5.1 節の準備のもと，いよいよ対称行列の対角化について調べよう。まずは対称行列の定義と，簡単な性質を述べ，定理 5.9 で対称行列の対角化を述べる。

定義 5.6 行列 A が**対称行列**とは，${}^tA=A$ となること，すなわち A が，

$$A=\begin{pmatrix}a & h \\ h & b\end{pmatrix} \quad (a,\ b,\ h \text{ は実数})$$

の形をしていることである。

命題 5.7 対称行列 A について次の(1), (2)の事項が成り立つ。

(1) A の固有値はつねに実数値として存在する。

(2) A が異なる 2 つの固有値をもつとき，それぞれの固有値に対する固有ベクトルは垂直である。

［証明］対称行列を$A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$とする。

(1) A の固有方程式は,

$$t^2-(a+b)t+(ab-h^2)=0$$

である。この 2 次方程式の判別式を D とすれば,

$$D=(a+b)^2-4(ab-h^2)=(a-b)^2+4h^2 \qquad \cdots \quad ①$$

であるから $D \geqq 0$ で，固有方程式は実数解をもつ。よって，固有値はつねに実数値として存在する。

(2) A の異なる 2 つの固有値をλ，μ ($\lambda \fallingdotseq \mu$)とし, λ，μ に対する固有ベクトルの 1 つをそれぞれ$\vec{u}$，$\vec{v}$ とする。すなわち，$A\vec{u}=\lambda\vec{u}$，$A\vec{v}=\mu\vec{v}$ である。

補題 5.5 より$(A\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot({}^tA\vec{v})$ であるが，A は対称行列（${}^tA=A$）であるから，$(A\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(A\vec{v})$ すなわち，$(A\vec{u})\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot(A\vec{v})=0$ である。ここで,

$$(A\vec{u})\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot(A\vec{v})=(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot(\mu\vec{v})=(\lambda-\mu)\vec{u}\cdot\vec{v}$$

であるから，$(\lambda-\mu)\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ であるが，$\lambda \fallingdotseq \mu$ より$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ である。すなわち，$\vec{u}$ と$\vec{v}$ は垂直である。■

命題 5.8　対称行列$A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$について，次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) A が異なる 2 つの固有値λ，μ ($\lambda \fallingdotseq \mu$)をもつ　$\Longleftrightarrow$　$a \fallingdotseq b$ または$h \fallingdotseq 0$

(2) A がただ 1 つの固有値λ をもつ　$\Longleftrightarrow$　$a=b$ かつ$h=0$

さらにこのとき，$A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ である。

［証明］(2)を示せばよい。

（$\Longrightarrow$）A がただ 1 つの固有値λをもつとする。命題 5.7 の証明の①において，$D=0$ であるから，$a=b$ かつ$h=0$ である。

（$\Longleftarrow$）$a=b$ かつ$h=0$ とする。このとき$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ である。この固有方程式は,

$$t^2-2at+a^2=0$$

であるから，この方程式の解は$t=a$ のみである。したがって，A がただ 1 つの固有値$\lambda=a$ をもつ。

後半は，$\lambda=a$ であることがすでに示されているので明らか。■

さて，対称行列の対角化を考察しよう。A がただ 1 つの固有値をもつ場合は命題 5.8(2)より A は初めから対角化されているので（直交行列 L を$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすればよい)，A が異なる 2 つの固有値をもつ場合を考える。

定理 5.9　(1) 対称行列 A は，直交行列L を用いて対角化できる。

すなわち，対称行列 A が異なる 2 つの固有値λ，μ ($\lambda \fallingdotseq \mu$)をもつとする。$\lambda$，$\mu$ に対する固有ベクトルで，大きさが 1 のものをそれぞれ$\vec{u}$，$\vec{v}$ とし，行列 L を $L=(\vec{u}\ \ \vec{v})$ とする。このとき,

$${}^tLAL=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

となる。

(2) 逆に，行列 A が直交行列 L を用いて対角化できるとき，A は対称行列である。

定理 5.9 で L は直交行列であるから, 命題 5.4(5)より $L^{-1}={}^tL$ である。したがって, $L^{-1}AL$ は, ${}^tLAL$ で計算することができる。

定理 5.9 を証明する前に例を示す。

例　5.10　対称行列 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ を直交行列 L を用いて対角化しよう。

まず，固有値を求める。固有方程式は,

$$t^2-2t-3=0$$

である。これより，固有値は -1 と 3 である。

次に固有ベクトルのひとつを求める。

(i) 固有値 -1 のとき，$(A+1E)\vec{u}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは $\vec{u}=\begin{pmatrix}t\\-t\end{pmatrix}$ である（t は 0 と異なる任意の実数)。直交行列で対角化するために，大きさが 1 の固有ベクトルをとる。すなわち，$\vec{u}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ をとる。

(ii) 固有値 3 のとき，$(A-3E)\vec{v}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトル $\vec{v}=\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}$ である（t は 0 と異なる任意の実数)。直交行列で対角化するために，大きさが 1 の固有ベクトルをとる。すなわち，$\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ をとる。

行列 L を $L=(\vec{u},\vec{v})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とする。命題 5.4(3)より L は直交行列であり，

$${}^tLAL=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である。■

［定理 5.9 の証明］(1) 固有値λ，μ に対する固有ベクトルで，大きさが 1 のものをそれぞれ$\vec{u}$，$\vec{v}$ とする。命題 5.7(2)より$\vec{u}$ と$\vec{v}$ は垂直である。

行列 L を $L=(\vec{u}\ \ \vec{v})$ とする。命題 5.4(3)′ より L は直交行列である。

また，$A\vec{u}=\lambda\vec{u}$，$A\vec{v}=\mu\vec{v}$ であるから，

$$AL=A(\vec{u},\vec{v})=(A\vec{u},A\vec{v})=(\lambda\vec{u},\mu\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}=L\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

である。L は直交行列であるから命題 5.4(5)より逆行列$L^{-1}={}^tL$ をもつ。両辺に左からこの逆行列をかけることによって，

$${}^tLAL=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

となる。

(2) 行列 A が直交行列L を用いて${}^tLAL=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ のように対角化できるとする。このとき，

$$A=({}^tL)^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}L^{-1}=L\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}L^{-1}$$

であるから命題 5.3(2)より，

$${}^tA={}^t(L^{-1})\,{}^t\!\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}{}^tL=L\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}L^{-1}=A$$

となり，A は対称行列である。■

【注意 5.9.1】定理 5.9 の直交行列 L として，原点を中心とする角θ の回転移動$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ をとることができる。

実際，定理 5.9 の証明で$\vec{u}$，$\vec{v}$ をとってくるときに，必要ならば$\vec{v}$ の代わりに$-\vec{v}$ を考えることにより，

$$\vec{u}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (0^\circ \leqq \theta < 180^\circ)$$

としてよいからである。//

5.3　2 次形式

定理 5.9 の応用例として，2 次形式について述べる。

定義 5.11　x と y についての 2 次式

$$q(x,y)=ax^2+2hxy+by^2 \quad (a,\ b,\ h \text{は実数の定数})$$

を **2 次形式**という。

命題 5.12　2 次形式

$$q(x,y)=ax^2+2hxy+by^2 \quad (a,\ b,\ h \text{は実数の定数})$$

は，次のように表される。

$$q(x,y)=(x\ \ y)\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

［右辺の対称行列 $\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ を 2 次形式 $q(x,y)$ の**係数行列**という。］

［証明］実際に右辺を計算してみる。

$$\begin{aligned}(x\ \ y)\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (x\ \ y)\begin{pmatrix} ax+hy \\ hx+by \end{pmatrix} \\ &= x(ax+hy)+y(hx+by) \\ &= ax^2+hxy+hxy+by^2 \\ &= ax^2+2hxy+by^2 \\ &= q(x,y)\end{aligned}$$

である。■

定理 5.13　（2 次形式の標準形）2 次形式

$$q(x,y)=ax^2+2hxy+by^2 \quad (a,\ b,\ h \text{は実数の定数})$$

に対して，次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) 適当な直交行列 L をとって，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=L\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

とすれば，

$$q(x,y)=\lambda X^2+\mu Y^2$$

のように XY の項がない形に変換できる。

(2) 係数 λ，μ は 2 次形式 $q(x,y)$ の係数行列の固有値である。

［(1)の XY の項がない式を 2 次形式 $q(x,y)$ の**標準形**という。］

［証明］2 次形式 $q(x,y)$ の係数行列を A とする。$A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ である。

$h=0$ のときは $q(x,y)=ax^2+by^2$ であるからはじめから xy の項がない（直交行列 L を $L=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすればよい）。

$h\neq 0$ のとき，命題 5.8(1)より A は異なる 2 つの固有値 λ，μ（$\lambda\neq\mu$）をもつ。

A は対称行列なので定理 5.9 より直交行列 L で，

$$ {}^tLAL=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix} $$

となるものがある。これより，

$$ A=L\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}{}^tL $$

である。ここで，$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}={}^tL\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ である。また，命題 5.3(1)，(3)より $(X\ \ Y)=(x\ \ y)^t({}^tL)$，すなわち$(X\ \ Y)=(x\ \ y)L$ である。したがって，

$$
\begin{aligned}
q(x,y)&=(x\ \ y)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\
&=(x\ \ y)L\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}{}^tL\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\
&=(X\ \ Y)\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\\
&=(X\ \ Y)\begin{pmatrix}\lambda X\\ \mu Y\end{pmatrix}\\
&=\lambda X^2+\mu Y^2
\end{aligned}
$$

となる。

例　5.14　2 次形式$x^2+4xy+y^2$ を標準形で表そう。

係数行列 A は$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ である。例 5.10 より直交行列$L=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ を用いて，

$$ {}^tLAL=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} $$

となった。

$$ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\\ \frac{-X+Y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} $$

とすれば，

$$ x^2+4xy+y^2=\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2+4\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-X+Y}{\sqrt{2}}+\left(\frac{-X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2=-X^2+3Y^2 $$

となる。■

例題 5.15　次の 2 次曲線の概形を描きなさい。

(1) C_1：$5x^2+2\sqrt{3}xy+7y^2=32$

(2) C_2：$7x^2+6xy-y^2=2$

［解答］(1) 左辺の 2 次形式の係数行列 A は$A=\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$ である。

まず，固有値を求める。固有方程式は，

$$t^2-12t+32=0$$

である。これより，固有値は 8 と 4 である。

次に固有ベクトルのひとつを求める。

(i) 固有値 8 のとき，$(A-8E)\vec{u}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\vec{u}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトル$\vec{u}$ として$\vec{u}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ をとる。

(ii) 固有値 4 のとき，$(A-4E)\vec{v}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトル$\vec{v}$ として$\vec{v}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ をとる。

行列 L を$L=(\vec{u},\vec{v})=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とする。L は直交行列であり，

$$\begin{aligned} {}^tLAL &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=L\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{X-\sqrt{3}Y}{2} \\ \frac{\sqrt{3}X+Y}{2} \end{pmatrix}$$

とすれば,

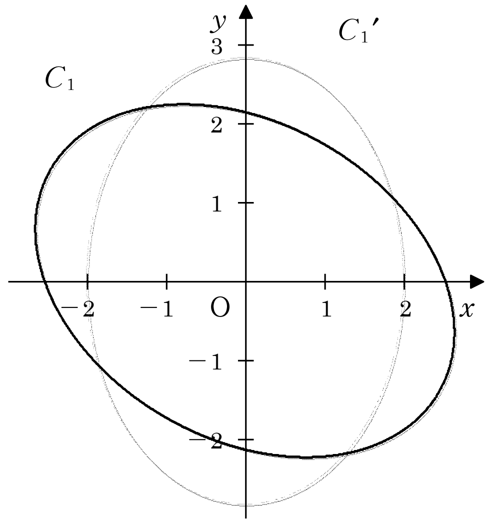
$$5x^2+2\sqrt{3}xy+7y^2$$

$$=5\left(\frac{X-\sqrt{3}Y}{2}\right)^2+2\sqrt{3}\frac{X-\sqrt{3}Y}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}X+Y}{2}+7\left(\frac{\sqrt{3}X+Y}{2}\right)^2=8X^2+4Y^2$$

となる。したがって $5x^2+2\sqrt{3}xy+7y^2=32$ は $8X^2+4Y^2=32$ すなわち，

$$C_1' \quad : \frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{8}=1$$

になる。



また，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=L\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ であるが，

$$L=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$$

は原点を中心とする回転角 60°の回転移動を表す。

したがって 2 次曲線 C は，楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$ を，原点を中心として 60°だけ回転させた曲線を表す。

(2) 左辺の 2 次形式の係数行列 A は $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ である。

まず，固有値を求める。固有方程式は，

$$t^2-6t-16=0$$

である。これより，固有値は 8 と−2 である。

次に固有ベクトルのひとつを求める。

(i) 固有値 8 のとき，$(A-8E)\vec{u}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\vec{u}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトル $\vec{u}$ として $\vec{u}=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ をとる。

(ii) 固有値−2 のとき，$(A+2E)\vec{v}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトル $\vec{v}$ として $\vec{v}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ をとる。

行列 L を $L=(\vec{u},\vec{v})=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ とする。L は直交行列であり，

$${}^tLAL=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{24}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{8}{\sqrt{10}} & -\frac{6}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

である。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=L\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3X-Y}{\sqrt{10}} \\ \frac{X+3Y}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

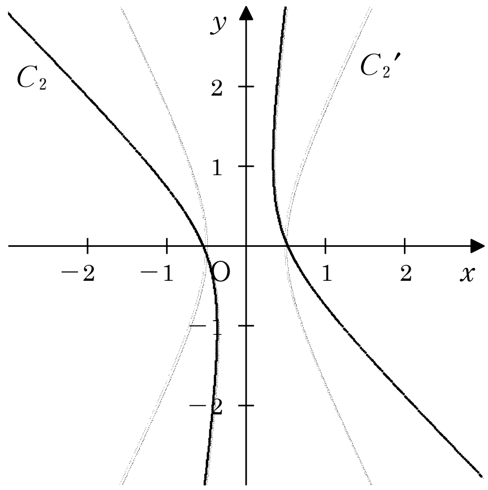
とすれば，

$$7x^2+6xy-y^2=7\left(\frac{3X-Y}{\sqrt{10}}\right)^2+6\frac{3X-Y}{\sqrt{10}}\cdot\frac{X+3Y}{\sqrt{10}}-\left(\frac{X+3Y}{\sqrt{10}}\right)^2=8X^2-2Y^2$$

となる。したがって$7x^2+6xy-y^2=2$ は$8X^2-2Y^2=2$ すなわち，

$$C_2' \quad : 4X^2-Y^2=1$$

になる。



また，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=L\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ であるが，

$$L=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

は原点を中心とする回転角θ（ただし，θ は$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$）の回転移動を表す。

したがって 2 次曲線 C は，双曲線$4X^2-Y^2=1$ を，原点を中心としてθ（ただし，θ は$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$）だけ回転させた曲線を表す。■

2 次形式$q(x,y)$ について，不等式$q(x,y)\geqq 0$ がつねに成り立つための条件として次のことが成り立つ。

命題 5.16 2 次形式$q(x,y)=ax^2+2hxy+by^2$（a，b，h は実数の定数）の係数行列を$A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$とする。このとき次の(1)～(3)の条件は同値である。

(1) 任意の実数 x，y に対して，$q(x,y)\geqq 0$ 特に $q(x,y)=0 \iff x=y=0$

(2) A の固有値をλ，μ とすると，$\lambda>0$，$\mu>0$

(3) $a>0$ かつ $|A|>0$

［2 次形式$q(x,y)$が(1)～(3)のいずれか（したがってすべて）をみたすとき，**半正値**という。］

［証明］A の固有値λ，μ に対する固有ベクトルで，大きさが 1 のものをそれぞれ$\vec{u}$，$\vec{v}$とする。

((1) $\Longrightarrow$ (2)) $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$とする。$|\vec{u}|=1$ より，$u_1^2+u_2^2=1$ である。これより$u_1\neq 0$ または$u_2\neq 0$ であるから(1)より，$q(x,y)>0$ である。一方，

$$q(u_1,u_2)=(u_1\ \ u_2)A\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=(u_1\ \ u_2)\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\lambda(u_1^2+u_2^2)=\lambda$$

であるから, $\lambda>0$ である。

$\vec{v}$についても同様に考えることによって$\mu>0$も得られる。

((2) $\Longrightarrow$ (1)) $L=(\vec{u}\ \ \vec{v})$，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$とすれば，定理 5.13 より$q(x,y)=\lambda X^2+\mu Y^2$となる。(2)より明らかに$q(x,y)\geqq 0$ である。

後半について，$x=y=0$ のとき$q(x,y)=0$ となるのは明らか。

$q(x,y)=0$ とすると，$\lambda X^2+\mu Y^2=0$ で，$\lambda>0$，$\mu>0$ であるから$X=Y=0$ である。よって，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$となり，$x=y=0$ である。

((2) $\Longleftrightarrow$ (3)) (2) $\Longleftrightarrow$ A の固有方程式$t^2-(a+b)t+(ab-h^2)=0$ の 2 つの解がともに正

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}(a+b)^2-4(ab-h^2)\geqq 0 & \cdots ① \\ a+b>0 & \cdots ② \\ ab-h^2>0 & \cdots ③\end{cases}$$

である（2 つ目の$\Longleftrightarrow$は 2 次方程式の 2 つの解α,βがともに正であるための必要十分条件が①判別式$D\geqq 0$ ②$\alpha+\beta>0$ ③$\alpha\beta>0$ であることと，2 次方程式の解と係数の関係を用いた）。ここで，①については命題 5.7 の①よりつねに成り立つ。また，③より $ab>0$ すなわち a と b は同符号であるので，②は $a>0$ のみで十分である。よって，

$$(2)\quad\Longleftrightarrow\quad a>0\ \ \text{かつ}\ \ ab-h^2>0\quad\Longleftrightarrow\quad(3)$$

となる。■

例　5.17　不等式$x^2+7y^2\geqq 4xy$が成り立つ。等号が成り立つのは$x=y=0$ のときである。

このことを証明してみよう。

(i) 平方完成を用いた証明

［証明］(左辺)－(右辺)$=x^2+7y^2-4xy=(x-2y)^2+3y^2\geqq 0$　より不等式が成り立つ。

等号が成り立つのは$x-2y=0$ かつ$y=0$ すなわち$x=y=0$ のときである。■

(ii) 命題 5.16(2)を用いた証明

［証明］(左辺)－(右辺)$=x^2+7y^2-4xy(=q(x,y)$ とおく)の係数行列は$A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&7\end{pmatrix}$である。

A の特性方程式は $t^2-8t+11=0$ である。この解は$t=4\pm\sqrt{5}$ である。

これより，固有値は 2 つとも正であるから，2 次形式$q(x,y)$は半正値である。

したがって，$q(x,y)\geqq 0$　特に　$q(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y=0$ である。■

(iii) 命題 5.16(3)を用いた証明

［証明］（左辺）－（右辺）$=x^2+7y^2-4xy(=q(x,y)$ とおく)の係数行列は$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ である。

$1>0$ かつ$|A|=11>0$ であるから，2 次形式$q(x,y)$ は半正値である。
したがって，$q(x,y)\geqq 0$　特に　$q(x,y)=0 \iff x=y=0$ である。■

【演習問題 5】

［5-1］次の対称行列を直交行列を用いて対角化しなさい。

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

［5-2］$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル$\vec{u}$ と$\vec{v}$ が垂直であるとき，$\vec{u}$ と$\vec{v}$ は 1 次独立であることを証明しなさい。

［5-3］2 次形式$q(x,y)=4x^2+2axy+9y^2$ が半正値になるような定数 a の範囲を求めなさい。

［5-4］対称移動を表す行列$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ を直交行列 L を用いて対角化しなさい。

［5-5］2 次形式$q(x,y)$ について，その係数行列の固有値をλ，μ（$\lambda \leqq \mu$）とし，固有値λ，μ に対する固有ベクトルで，大きさが 1 のものをそれぞれ$\vec{u}$，$\vec{v}$ とする。$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく。

$|\vec{x}|=1$（すなわち$x^2+y^2=1$）のとき，次の(1)，(2)が成り立つことを証明しなさい。
(1) $\lambda=\mu$ のとき，$q(x,y)=\lambda$（定数）
(2) $\lambda<\mu$ のとき，$q(x,y)$ の最小値はλ（$\vec{x}=\pm\vec{u}$ のとき），最大値はμ（$\vec{x}=\pm\vec{v}$ のとき）である。

第 6 章　高等学校の数学教材としての行列

本章では，高等学校の数学科において，高等学校で従前まで学習していた「行列」を指導することの意義として，高等学校の行列における教材の裏付けとなる事項や発展的な事項について考察する。また，このことを通じて，特に代数的な事項が中心にはなるが，発展的な内容を扱い，理解を深めるための一手段とする。もちろん今までの章でも，その専門性を高め，理解を深めることを目的として，特に幾何的内容について高い位置から見てきた。特にこの章では，行列に関連した高等学校数学科における発展的内容の教材を模索し，教材研究をする。

6.1 節では，高等学校数学科で行列を学習することの意義として，4 つの観点を掲げ，既習の内容について意味理解を深めることができるということについて述べる。このことに関する具体的な教材研究については以下の節で述べる。

6.2 節では，行列の乗法において交換法則が必ずしも成り立つとは限らないということに注目して教材研究を行う。

6.3 節では，ハミルトン-ケーリーの定理と係数比較に関する典型的な誤答例をもとに教材研究を行う。

6.4 節では，行列と複素数に関する関係を用いて教材研究を行う。

6.5 節では，任意の行列に対して対称行列と交代行列がただ一つ存在して，それらの和で表されることを中心に，存在と一意に関する教材研究を行う。

6.6 節では，行列式とトレースを用いて，存在命題で，「存在しない」ことに関する教材研究を行う。

6.7 節では，高校生でも理解できるような行列の応用例としてマルコフ連鎖を題材として教材研究を行う。

6.1　高等学校で行列を学習することの意義

5 章までに述べてきたことは，2 次元に限るとはいえ，大学 1 年程度の線形代数で学ぶような内容でもあり，高等学校で指導することの妥当性については問題が残る。そこで本章では，高校生でも理解できるような，発展的な内容を題材として教材を開発する。

なお，高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　数学編　理数編（[4］137p）に，『高等学校数学科においては，教科の目標に基づいて科目を設け，生徒の特性や学科の特色及び学校の実態に応じた教育が一層進められるようにすることが期待される。たとえば，（中略）大学との接続を考慮し高等学校数学の発展的・拡充的な内容を取り扱う科目（例 :「線形代数学入門」，「解析学入門」など）を設けたりすることが考えられる。』と明記されている。このことから本章で述べることも含めて，今まで述べてきた行列に関する事項を「線形代数への橋渡し」として高等学校で扱うことも不可能ではないと考える。

高校生が行列を学ぶことの意義について，以下に述べる 4 つの観点を掲げる。

【観点 1】行列も一種の「数」と考えると，行列は今までの数とは異なった数の体系であるということである。高校生は今までに，整数，有理数，実数，複素数等いろいろな数について学んできた。そしてこ

れらには交換法則をはじめ，いずれもほぼ共通する性質を持っていた。しかし，行列においては乗法の交換法則が一般には成り立つとは限らないことなど，今までの数とは異なった性質がある。このような数の体系もあるということ知り，数の世界の認識を新たにすることも必要だと考える。

【観点 2】行列と一見関係のなさそうな複素数との体系と対応があるということである。一見異なるように見える複素数の体系と，行列のある集合との間に一対一の対応があり，さらにそれらの演算について同じような性質が成り立つ。そしてこれら二つのものを同一視することができるという考え方ができるということを知ることもできることである。今まで学んできたことで二つのものを同一視する例として，平面上の（矢線）ベクトルと，2 次元の数ベクトルがある。したがってこのことは高校生にも理解できる内容もあるのではないと考える。

【観点 3】行列に関することで，高等学校ではめったに扱われない存在命題や一意命題にも触れることができるということである。高等学校数学科の目標を，(1)知識及び技能，(2)思考力，判断力，表現力等，(3)学びに向かう力，人間性等の 3 つの柱に基づいて示している。特に(2)においては，論理的に考察し表現することが求められる。そのための教材も少なくない。しかし論理的に説明するという教材の中には，存在に関する命題として，（数学Ⅲには中間値の定理，平均値の定理があるが）鳩ノ巣原理のようなごく限られたものしかない。また一意性に関する命題も多くない。ここでは存在に関する命題と一意性に関する命題の教材になるようなものの例を挙げることにより，目標の(2)に資することを目指す。

【観点 4】行列の理論は応用範囲が広いということである。線形代数は数学だけだはなく，物理学，工学，経済学，社会学など，様々な分野で使われている。それは線形代数の汎用性にも理由がある。多くは専門的な内容を必要とするが，中には高校生にも理解できるような応用もあるだろう。

以上のような理由で，行列を学習することによって，既習の内容について意味理解を深める一助になると考える。以下，節を起こして上記 4 つの観点に即して具体的内容を検討していく。

6.2　積の非可換性をめぐって

行列において，生徒にとってまず違和感があるのは行列の乗法において交換法則が必ずしも成り立つとは限らないということであろう。生徒にとっては今まで学んできたものはすべて乗法について交換法則が成り立っているので，それが成り立たないものがあるというのは意外に感じるのは無理もない。この節では【観点 1】の立場から，その具体的な内容を述べる。

現代の代数学では，加法と乗法が定義されている集合を環という。正確に述べると次の通り。

定義 6.1　集合 R において 2 つの演算である加法＋と乗法・が定義されており，次の（i）～（vii）の条件をみたすとき，3 つ組（R，＋，・）を**環**という。

（Ⅰ）（R，＋）はアーベル群である。すなわち，R の元 a，b に対して，$a+b$ も R の元で，

（i）（加法の交換法則）R の任意の元 a, b に対して，$a+b=b+a$

（ii）（加法の結合法則）R の任意の元 a, b, c に対して，$(a+b)+c=a+(b+c)$

（iii）（零元の存在）R の任意の元 a に対して共通に $a+o=o+a=a$ となる元 o が存在する。

（iv）（加法の逆元の存在）R の任意の元 a に対して $a+b=b+a=o$ となる a によって定まる元 b が存在する。

（Ⅱ）（R, ・）は単位元を持つ半群である。すなわち，R の元 a, b に対して，$a\cdot b$ も R の元で，

（v）（乗法の結合法則）R の任意の元 a, b, c に対して，$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

（vi）（単位元の存在）R の任意の元 a に対して共通に $a\cdot e=e\cdot a=a$ となる元 e が存在する。

（Ⅲ）（R, ＋,・）について次が成り立つ。

（vii）（分配法則）R の任意の元 a, b, c に対して，$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

さらに,

（viii）（乗法の交換法則）R の任意の元 a, b に対して，$a\cdot b=b\cdot a$

が成り立つとき,（R, ＋,・）は**可換環**という。

【注意 6.1.1】3 つ組（R, ＋,・）を簡単に R で表すことも多い。

【注意 6.1.2】通常，乗法の・は省略する。

高校生でも知っているなじみのある環の例はたとえば，整数全体の集合，多項式全体の集合である。これ以外にも，閉区間で定義された連続関数全体の集合も環になる。これらはいずれも可換環である。一方，行列全体の集合は環ではあるが，乗法の交換法則は一般には成り立つとは限らない（例 0.8(2)参照）ので可換環ではない。

定義 6.2　R を環とする。

(1) R が**整域**とは，R の元 a, b に対して,

$$ab=o \implies a=o \quad \text{または} \quad b=o$$

が成り立つことである。

(2) R が**体**とは,

（i）　R が整域であり

（ii）（乗法の逆元の存在）o 以外の R の任意の元 a に対して，$ab=ba=e$ をみたす R の元 b が存在する

が成り立つことである。

たとえば，整数全体の集合は整域であるが体ではない。有理数全体の集合や実数全体の集合，複素数全体の集合は体である。

一方，行列全体の集合は整域ではない。実際，$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}$ とすれば,

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

なので，$AB=O$ であるが，A も B も O ではない。このような A, B を**零因子**という。

その他の例として剰余系がある。m を 2 以上の整数とする。集合 $R=\{0,1,2,\cdots,m-1\}$に加法と乗法を a，$b\in R$ に対して，

$a+b=$（$a+b$ を m で割った余り），$ab=$（ab を m で割った余り）

で定義するとき，R は可換環になる。m が素数のときは体になるが，m が合成数のときは整域ではない。（反例：$m=6$ のとき，$2\cdot 3=6\equiv 0 \bmod 6$）。

2×2 行列全体の集合のなす環は**行列環**とよばれる。しかし，先述のとおり，行列環は可換環ではない。整域でもない。行列の積の特徴を念のためにまとめておく。

［1］（積の非可換性）$AB=BA$ がつねに成り立つとは限らない。

［2］（零因子の存在）$AB=O$ であっても $A=O$ または $B=O$ とは限らない。

行列という数の体系ではこのような奇妙なことが起こりうることに注意を要する。

例題 6.3　A，B，X を行列とする。次の(1)～(5)の事項は成り立つであろうか。

(1) $(AB)^2=A^2B^2$

(2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

(3) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

(4) $(A+E)^2=A^2+2A+E$

(5) $(X-A)(X-B)=O \implies X=A$ または $X=B$

［解答］(1)について，つねに成り立つとはいえない。

$$(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B$$

であるが，$BA=AB$ がつねに成り立つとは限らないので，(1)はつねに成り立つとはいえない。

(2)について，つねに成り立つとはいえない。

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

であるが，$BA=AB$ がつねに成り立つとは限らないので，(2)はつねに成り立つとはいえない。

(3)について，つねに成り立つとはいえない。

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$$

であるが，$BA=AB$ がつねに成り立つとは限らないので，(3)はつねに成り立つとはいえない。

(4)について，成り立つ。

$$(A+E)^2=(A+E)(A+E)=A^2+AE+EA+E^2$$

であるが，$EA=AE=E$ が成り立つので，

$$=A^2+A+A+E=A^2+2A+E$$

は成り立つ。

(5)について，つねに成り立つとはいえない。$X-A$，$X-B$ が零因子である場合もあるからである。

たとえば，$A=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ とする。このとき，$X=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ とすれば，

$$(X-A)(X-B)=\left\{\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right\}\left\{\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

であるが，X は A とも B とも異なる。■

行列環は可換環ではないから乗法についての交換法則は一般には成り立つとは限らないが，ここでは交換法則が成り立つ行列のいくつかの例を見てみよう。

例 6.4 (1) A を行列とする。

任意の行列 B に対して　$AB=BA \iff A=kE$　となる実数 k がある。

(2) A，B を行列とし，すべての実数 k に対して $A \neq kE$ とする。

$AB=BA \iff B=xA+yE$　となる x，y がある。

［証明］(1)（$\Longrightarrow$）$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。任意の$B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ に対して $AB=BA$ とすると，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix}$$

である。成分を比較すると，

$$\begin{cases} bg=cf \\ (a-d)f=b(e-h) \\ c(e-h)=(a-d)g \end{cases}$$

となる。これが任意の e，f，g，h に対して成り立つので，$b=c=0$，$a-d=0$ である。$a=d=k$ とおけば，

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}=kE$$

である。

（$\Longleftarrow$）$A=kE$ とする。このとき

$AB=(kE)B=kB=B(kE)=BA$

である。

(2)（$\Longrightarrow$）$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とする。$AB=BA$ とすると，(1)（$\Longrightarrow$）と同様にして，

$$\begin{cases} bg=cf & \cdots ① \\ (a-d)f=b(e-h) & \cdots ② \\ c(e-h)=(a-d)g & \cdots ③ \end{cases}$$

となる。ここで，$A \neq kE$ であるから，b，c，$a-d$ の少なくとも 1 つは 0 ではない。

以下，ある x に対して，$B-xA=\begin{pmatrix} e-xa & f-xb \\ g-xc & h-xd \end{pmatrix}$ が yE と表されることを示す。

(i) $b \neq 0$ のとき　$x=\dfrac{f}{b}$ とおくと，

$$e-xa=\frac{be-af}{b}, \quad f-xb=0,$$

$$g-xc=\frac{bg-cf}{b}=0\ (①より),\ h-xd=\frac{bh-df}{b}=\frac{be-af}{b}\ (②より)$$

であるから，$y=\dfrac{be-af}{b}$ とおくと，$B-xA=yE$ である。

（ii）$c \fallingdotseq 0$ のとき　$x=\dfrac{g}{c}$ とおくと，

$$e-xa=\frac{ce-ag}{c},\ f-xb=\frac{cf-bg}{c}=0\ (①より),$$

$$g-xc=0,\ h-xd=\frac{ch-dg}{c}=\frac{ce-ag}{c}\ (③より)$$

であるから，$y=\dfrac{ce-ag}{c}$ とおくと，$B-xA=yE$ である。

（iii）$a-d \fallingdotseq 0$ のとき　$x=\dfrac{e-h}{a-d}$ とおくと，

$$e-xa=\frac{(a-d)e-a(e-h)}{a-d}=\frac{ah-de}{a-d},\ f-xb=\frac{(a-d)f-b(e-h)}{a-d}=0\ (②より),$$

$$g-xc=\frac{(a-d)g-c(e-h)}{a-d}=0\ (③より),\ h-xd=\frac{(a-d)h-d(e-h)}{a-d}=\frac{ah-de}{a-d}$$

であるから，$y=\dfrac{ah-de}{a-d}$ とおくと，$B-xA=yE$ である。

（$\Longleftarrow$）$B=xA+yE$　となる x，y があるとする。このとき

$$AB=A(xA+yE)=xA^2+yA=(xA+yE)A=BA$$

である。■

6.3　ハミルトン-ケーリーの定理と係数比較

この節では，ハミルトン-ケーリーの定理と係数比較に関する典型的な誤答例を確認する。この節で述べることも，生徒のとっては今まで学習してきたこととは異なった性質であり，【観点 1】の立場から行列を学ぶ意義の例であると考えることもできるだろう。

ハミルトン-ケーリーの定理とは補題 3.11 でも述べたが念のために確認しておこう。

定理 6.5　（ハミルトン-ケーリーの定理）任意の行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対して，

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

が成り立つ。

［証明］行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対して，

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

であるから，

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E$

$$=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

となる。よって等式は成り立つ。■

注意しなければならないのが，この定理の逆が一般には成り立つとは限らないことである。すなわち，

「行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$が等式$A^2-pA+qE=O$をみたす $\Longrightarrow$ $a+d=p$，$ad-bc=q$」

とは限らないのである。これも生徒にとっては今までの経験とは異なり意外に感じるかもしれない。

例題 6.6　次の(1)～(6)の事項は成り立つであろうか。

(1) a，bを有理数とする。$a+b\sqrt{2}=5+6\sqrt{2}$をみたすとき，$a=5$，$b=6$である。

(2) a，bを実数，iを虚数単位とする。$a+bi=5+6i$をみたすとき，$a=5$，$b=6$である。

(3) a，bを実数とする。$x^2+ax+b=x^2+5x+6$がxについての恒等式のとき，$a=5$，$b=6$である。

(4) a，bを実数とする。$\vec{p}$，$\vec{q}$が平行でない2つのベクトルで，$a\vec{p}+b\vec{q}=5\vec{p}+6\vec{q}$のとき，$a=5$，$b=6$である。

(5) 2数α，βに対して，2次方程式$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$は$\alpha$，$\beta$を解とする。

2次方程式$x^2+5x+6=0$の2つの解をα，βとするとき，$\alpha+\beta=5$，$\alpha\beta=6$である。

(6) 行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対して，$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$が成り立つ。

行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$が等式$A^2-5A+6E=O$をみたすとき，$a+d=5$，$ad-bc=6$である。

［解答］(1) 成り立つ。実際，与式より

$$(a-5)+(b-6)\sqrt{2}=0 \qquad \cdots \quad ①$$

である。

いま，$b\fallingdotseq 6$であると仮定する。このとき，$b-6\fallingdotseq 0$であるから①より，$\sqrt{2}=-\dfrac{a-5}{b-6}$となる。

a，bは有理数であるから右辺は有理数となるが，左辺は無理数であり，矛盾する。よって，$b=6$である。①に代入して，$a-5=0$であるから$a=5$である。

(2) 成り立つ。複素数の相等の定義である。

(3) 成り立つ。恒等式の定義（係数比較法）である。

(4) 成り立つ。系 0.4 から成り立つ。

(5) 成り立つ。実際に 2 次方程式を解くと，$(x-2)(x-3)=0$ より，解は $x=2$，3 である。したがって，$(\alpha, \beta)=(2, 3)$または$(3, 2)$であるが，いずれの場合も$\alpha+\beta=5$，$\alpha\beta=6$ である。

(6) つねに成り立つとは限らない。$a+d=5$，$ad-bc=6$ とは限らない。

ハミルトン-ケーリーの定理（定理 6.5）から，

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O \qquad \cdots \quad ②$$

が成り立つ。また，仮定から，

$$A^2-5A+6E=O \qquad \cdots \quad ③$$

であるから①－②より，

$$(a+d-5)A=(ad-bc-6)E \qquad \cdots \quad ④$$

である。ここで場合分けをする。

(i) $a+d-5=0$ のとき

④より $O=(ad-bc-6)E$ で，$E \fallingdotseq O$ より，$ad-bc-6=0$ である。

よって，$a+d=5$，$ad-bc=6$ である。

(ii) $a+d-5 \fallingdotseq 0$ のとき

$k=\dfrac{ad-bc-6}{a+d-5}$ とおけば，④より $A=kE$ である。

これを③に代入すると，$(k^2+5k+6)E=O$ で，$E \fallingdotseq O$ より，$k^2+5k+6=0$ である。ゆえに，$k=2$，3 である。

$k=2$ のとき，$A=2E=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ であるから，$a+d=4$，$ad-bc=4$ である。

$k=3$ のとき，$A=3E=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ であるから，$a+d=6$，$ad-bc=9$ である。

したがって，$(a+d, ad-bc)=(5, 6)$または$(4, 4)$または$(6, 9)$である。■

本節の本題からは外れるが，ハミルトン-ケーリーの定理の応用例として行列のべき乗を求めることができる。行列のべき乗を求める方法がいくつかあり，それぞれの方法について特徴があることを知ることも，生徒にとっては興味深いものがあると考えたからついでに述べる。

例題 3.12，例題 4.4 と同じ問題をハミルトン-ケーリーの定理を使って解いてみよう。

例題 6.7　n を正の整数とする。行列$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$について A^nを求めなさい。

［解答］ハミルトン-ケーリーの定理（定理 6.5）から，

$$A^2-3A-4E=O \qquad \cdots \quad ①$$

が成り立つ。

ここで，t^nを $t^2-3t-4=(t+1)(t-4)$で割ったときの商を $Q(t)$，余りを $at+b$（a, b は実数）とすると，

$$t^n=(t+1)(t-4)Q(t)+at+b$$

となる。$t=-1$，4 を代入すると，$(-1)^n=-a+b$，$4^n=4a+b$ であるからこれを解いて，

$$a=\frac{-(-1)^n+4^n}{5},\quad b=\frac{4\times(-1)^n+4^n}{5}$$

である。よって，恒等式

$$t^n=(t^2-3t-4)Q(t)+\frac{-(-1)^n+4^n}{5}t+\frac{4\times(-1)^n+4^n}{5}$$

が成り立つ。これより，

$$A^n=(A^2-3A-4E)Q(A)+\frac{-(-1)^n+4^n}{5}A+\frac{4\times(-1)^n+4^n}{5}E$$

が成り立つが，①より，

$$\begin{aligned}A^n&=\frac{-(-1)^n+4^n}{5}A+\frac{4\times(-1)^n+4^n}{5}E\\&=\frac{-(-1)^n+4^n}{5}\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}+\frac{4\times(-1)^n+4^n}{5}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\times(-1)^n+2\times4^n&-3\times(-1)^n+3\times4^n\\-2\times(-1)^n+2\times4^n&2\times(-1)^n+3\times4^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。■

もちろん例題 3.12(1)，例題 4.4 と同じ答えになっている。

6.4　複素数との関連

行列と複素数については，一見何も関係のないような 2 つではあるが，この節で述べるような興味深い関係がある。この節では，【観点 2】の立場から，その具体的な内容を述べる。これも生徒にとっては意外な関係で興味を引くかもしれない。

例題 6.8　複素数$\alpha=1+2i$ に対して行列$A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}$を，複素数$\beta=3+4i$ に対して行列$B=\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}$を対応させる。このとき次の値または行列を求め，気づいたことを書きなさい。

(1) $\alpha+\beta$　と　$A+B$

(2) $\alpha-\beta$　と　$A-B$

(3) $\alpha\beta$　と　AB

(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}$　と　AB^{-1}

［解答］(1) $\alpha+\beta=(1+2i)+(3+4i)=4+6i$,　$A+B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6\\6&4\end{pmatrix}$

(2) $\alpha-\beta=(1+2i)-(3+4i)=-2-2i$,　$A-B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$

(3) $\alpha\beta=(1+2i)(3+4i)=-5+10i$,　$AB=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-10\\10&-5\end{pmatrix}$

(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1+2i}{3+4i}=\dfrac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{11}{25}+\dfrac{2}{25}i$,

$$AB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{25}\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}11 & -2\\ 2 & 11\end{pmatrix}$$

（気づいたことの例）①複素数と行列の対応について，$a+bi \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$

②和・差・積を計算しても複素数と行列が対応している。

③複素数の商$\dfrac{\alpha}{\beta}$を$\alpha\beta^{-1}$と考えれば，商についても複素数と行列は対応している。■

例題 6.8 で気づいたことについては，一般の複素数と対応する行列に対しても成り立つ。このことを証明してみよう。

a，b，c，d を実数とする。

複素数$\alpha=a+bi$に対して行列$A=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$を対応させる。

複素数$\beta=c+di$に対して行列，$B=\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}$を対応させる。

［1］複素数の和$\alpha+\beta$に対して，

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

であるから，対応する行列は，

$$\begin{pmatrix}a+c & -(b+d)\\ b+d & a+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}=A+B$$

である。

［2］複素数の差$\alpha-\beta$に対して，

$$\alpha-\beta=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

であるから，対応する行列は，

$$\begin{pmatrix}a-c & -(b-d)\\ b-d & a-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}=A-B$$

である。

［3］複素数の積$\alpha\beta$に対して，

$$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

であるから，対応する行列は，

$$\begin{pmatrix}ac-bd & -(ad+bc)\\ ad+bc & ac-bd\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}=AB$$

である。

［4］$\beta\fallingdotseq 0$ のとき，複素数の商$\alpha\beta^{-1}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ に対して，

$$\alpha\beta^{-1}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

であるから，対応する行列は，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} & -\left(\dfrac{-ad+bc}{c^2+d^2}\right) \\ \dfrac{-ad+bc}{c^2+d^2} & \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \frac{1}{c^2+d^2} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = AB^{-1}$$

である。

まとめると，$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列の和・差・積・商（逆行列の積）がそれぞれ複素数の和・差・積・商に対応している。つまり，$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ は複素数の行列による表現になっている。

このことを現代数学風に述べてみると次のようになる。

複素数全体の集合を $\mathbf{C}$ とし，行列環の部分集合 D を

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \text{は実数} \right\}$$

で定義する。このとき，$\mathbf{C}$，D は環（特に可換環）になる。

写像φ: $\mathbf{C} \to D$ を，a，b を実数として，$\alpha = a + bi$ に対して，

$$\varphi(\alpha) = \varphi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

で定義すれば，［1］～［4］でわかったことは，それぞれ，

［1］$\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$

［2］$\varphi(\alpha-\beta) = \varphi(\alpha) - \varphi(\beta)$

［3］$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$

［4］$\varphi(\alpha\beta^{-1}) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)^{-1}$

ということである。さらにφ は明らかに全射かつ単射である。

一般に，R，S を環とし，写像φ: $R \to S$ が［1］と［3］をみたすとき，φ を R から S への**環準同型**という。全射かつ単射の環準同型を**環同型**という。環同型の定義域である環 R と値域である環 S は環として**同型**という。R と S は同じ構造を持つと考えられ，しばしば同一視される。

この場合，$\mathbf{C}$ と D は環として同一視されるということである。したがって，次のようにまとめられる。

複素数全体の集合を $\mathbf{C}$ とし，行列環の部分集合 D を

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \text{は実数} \right\}$$

で定義する。このとき，$\mathbf{C}$ と D は環として同型である。

6.5　対称行列と交代行列

この節では，【観点 3】の立場から，存在と一意に関する命題の例と，その具体的な証明を述べる。特に任意の行列に対して対称行列と交代行列がただ一つ存在して，それらの和で表されることを中心に述

べる。

対称行列については定義 5.6 でも述べた。交代行列とは次のような行列である。

定義 6.9　行列 A が**交代行列**とは，${}^tA=-A$ となること，すなわち A が，

$$A=\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}\quad(b\text{ は実数})$$

の形をしていることである。

命題 6.10　任意の行列は，対称行列と交代行列の和として一意に表わされる。
すなわち，任意の行列 A に対して，$A=B+C$ となる対称行列 B と交代行列 C がただ一つ存在する。

この命題 6.10 の意味することは，たとえば行列$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$は，

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

のように対称行列$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$と交代行列$\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$の和で表される。しかし，これ以外の対称行列と交代行列の和では表されないということである。

その証明は，対称行列と交代行列があること（存在）は実際に構成してみせることであり，ただ一つしかないこと（一意）は，2 つあったとしたらその 2 つは同じものであるという方針である。

［命題 6.10 の証明］任意の行列 A をとり固定する。

（存在）$B=\dfrac{1}{2}(A+{}^tA)$，$C=\dfrac{1}{2}(A-{}^tA)$ とおく。このとき，

$${}^tB=\frac{1}{2}\,{}^t(A+{}^tA)=\frac{1}{2}({}^tA+{}^t({}^tA))=\frac{1}{2}({}^tA+A)=B$$

$${}^tC=\frac{1}{2}\,{}^t(A-{}^tA)=\frac{1}{2}({}^tA-{}^t({}^tA))=\frac{1}{2}({}^tA-A)=-C$$

であるから B，C はそれぞれ対称行列，交代行列である。また，

$$B+C=\frac{1}{2}(A+{}^tA)+\frac{1}{2}(A-{}^tA)=A$$

である。

（一意）$A=B+C=B'+C'$（B，B' は対称行列，C，C' は交代行列）と 2 通りに表わされたとする。このとき，移項して，

$$B-B'=C'-C \qquad \cdots\quad ①$$

となる。両辺の転置行列を考えると ${}^t(B-B')={}^t(C'-C)$となるが，

$$(\text{左辺})={}^tB-{}^tB'=B-B',\quad(\text{右辺})={}^tC'-{}^tC=-(C'-C)$$

であるから，

$$B - B' = -(C' - C) \quad \cdots \quad ②$$

となる。①＋②より，$2(B - B') = O$ であるから，$B = B'$ となる。これを①に代入して $O = C' - C$ であるから，$C = C'$ となる。■

これと同じように考えれば，

(1) 2 変数の任意の多項式は対称式と交代式の和として一意に表わされる。

(2) 実数全体を定義域とする任意の関数は偶関数と奇関数の和として一意に表わされる。

ことも証明できる（演習問題 6［6-4］参照）。

6.6　行列式とトレース

この節では，【観点 3】の立場から，存在命題で，特に「存在しない」ことの命題の例を中心に扱う。また，本観点とは外れるが，行列式とトレースの概念は意外と便利であるので，これらを用いた教材についても述べる。

いきなりだがまずは問題から始める。

例題 6.11　X，A の各成分は実数とする。次のような行列は存在するか。

(1) $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ をみたす行列 X は存在するか。

(2) $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$XA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ をみたす行列 X，A は存在するか。

存在するか否を問う問題は高校数学にはあまり見当たらないので，この問題を初めて見たときはどこから手を付ければいいのかわからないかもしれない。実はこの問題は「行列式」と「トレース」を用いれば解決できる。

［例題 6.11(1)の解答］与式の両辺の行列式を計算する。$|X^2| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right|$ である。ここで，

$$(\text{左辺}) = |XX| = |X||X| = |X|^2 \geqq 0,\ (\text{右辺}) = -1$$

であるが，これはあり得ない。したがって，このような行列 X は存在しない。■

このように(1)は行列式を用いれば存在しないことを鮮やかに証明できるが，(2)は行列式を用いてもうまくいかない。(2)はトレースを用いるとうまくいく。

トレースについては演習問題 0［0-4］でも簡単に触れたが，改めて詳しく見てみる。

定義 6.12　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，

$$\mathrm{trace}A = a + d$$

とおいて，A の**トレース**という。

命題 6.13　A，B を行列とし，k，l を実数とする。このとき次の(1)，(2)が成り立つ。

(1) $\mathrm{trace}(kA+lB) = k\,\mathrm{trace}A + l\,\mathrm{trace}B$

(2) $\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$

［証明］　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$　とする。

(1)　$kA+lB=\begin{pmatrix} ka+le & kb+lf \\ kc+lg & kd+lh \end{pmatrix}$ であるから，

$$\mathrm{trace}(kA+lB) = (ka+le)+(kd+lh) = k(a+d)+l(e+h) = k\,\mathrm{trace}A + l\,\mathrm{trace}B$$

となる。

(2)　$AB=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix}$ であるから，

$$\mathrm{trace}(AB) = (ae+bg)+(cf+dh) = (ae+cf)+(bg+dh) = \mathrm{trace}(BA)$$

となる。■

トレースの性質を用いて例題 6.11(2)を解いてみよう。

［例題 6.11(2)の解答］与式の両辺のトレースを計算する。

$\mathrm{trace}(AX) = \mathrm{trace}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，$\mathrm{trace}(AX) = 2$

$\mathrm{trace}(XA) = \mathrm{trace}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ より，$\mathrm{trace}(XA) = 1$

である。

命題 6.13(2)より，$\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$であるからこれは矛盾である。したがって，このような行列 X は存在しない。■

本節の本題からは外れるが，ベキ零行列についての証明問題においては，次の命題が役に立つことがある。

命題 6.14　A を行列とする。このとき，

$$A^2 = O \iff |A| = 0 \text{ かつ } \mathrm{trace}A = 0$$

［証明］$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

ハミルトン-ケーリーの定理（定理 6.5）から，$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ すなわち，

$$A^2-(\mathrm{trace}A)A+|A|E = O \quad \cdots \quad ①$$

である。

（$\Longrightarrow$）$A^2=O$ とする。このとき，

$-(\mathrm{trace}A)A+|\mathrm{A}|E=O \quad \cdots \quad ②$

である。いま，$\mathrm{trace}A \fallingdotseq 0$ と仮定する。このとき，$A=\dfrac{|\mathrm{A}|}{\mathrm{trace}A}E$ であるから，

$$A^2=\left(\frac{|\mathrm{A}|}{\mathrm{trace}A}\right)^2 E \fallingdotseq O$$

となり $A^2=O$ に矛盾する。したがって，$\mathrm{trace}A=0$ である。

②に代入して，$|\mathrm{A}|E=O$ であるから，$|\mathrm{A}|=0$ である。

（$\Longleftarrow$）$|\mathrm{A}|=0$ かつ $\mathrm{trace}A=0$ とする。①に代入して，$A^2=O$ である。■

命題 6.14 を用いると次のような証明問題は方針がたちやすい。

例題 6.15　A，B を行列とする。次の(1)，(2)を証明しなさい。

(1) $(AB)^2=O \quad \Longrightarrow \quad (BA)^2=O$

(2) $AB-BA=A \quad \Longrightarrow \quad A^2=O$

［解答］(1) $(AB)^2=O$ とする。命題 6.14 より，$\mathrm{trace}(AB)=0$ かつ $|AB|=0$ である。ここで，

$$\mathrm{trace}(AB)=\mathrm{trace}(BA),\quad |AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$$

であるから，$\mathrm{trace}(BA)=0$ かつ $|BA|=0$ となる。したがって再び命題 6.14 より，$(BA)^2=O$ となる。

(2) $AB-BA=A$ とする。命題 6.14 より $\mathrm{trace}A=0$ かつ $|A|=0$ を示せばよい。

（$\mathrm{trace}A=0$ であること）両辺のトレースを計算する。

$$\mathrm{trace}(AB-BA)=\mathrm{trace}A$$

である。ここで，

$$（左辺）=\mathrm{trace}(AB)-\mathrm{trace}(BA)=\mathrm{trace}(AB)-\mathrm{trace}(AB)=0$$

であるから，$\mathrm{trace}A=0$ である。

（$|A|=0$ であること）$|A|\fallingdotseq 0$ と仮定する。このとき A は逆行列 A^{-1} をもつ。

$AB-BA=A$ の両辺に左から A^{-1} をかけると，

$$B-A^{-1}(BA)=E$$

となる。両辺のトレースを計算する。

$$\mathrm{trace}(B-A^{-1}(BA))=\mathrm{trace}E$$

である。ここで，

$$\begin{aligned}(左辺)&=\mathrm{trace}B-\mathrm{trace}(A^{-1}(BA))\\&=\mathrm{trace}B-\mathrm{trace}((BA)A^{-1})\\&=\mathrm{trace}B-\mathrm{trace}B=0\end{aligned}$$

$$(右辺)=\mathrm{trace}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=2$$

となり矛盾である。したがって，$|A|=0$ である。■

次の問題は演習問題 4［4-5］(2)と同じ問題である。これも本節の本題からは外れるが，本節で学んだことを利用して求めてみよう。

例題 6.16　行列$A=\begin{pmatrix}10 & 6\\ -9 & -5\end{pmatrix}$に対して $B^2=A$ となる行列 B を求めなさい。

［解答］ハミルトン-ケーリーの定理（定理 6.5）より$B^2-(\mathrm{trace}B)B+|B|E=O$ であるから，

$$A-(\mathrm{trace}B)B+|B|E=O$$

すなわち，

$$(\mathrm{trace}B)B=A+|B|E \qquad \cdots \quad ①$$

となる。

いま，$B^2=A$ の両辺の行列式を計算する。$|B^2|=|A|$である。ここで，

$$(\text{左辺})=|BB|=|B|^2,\ (\text{右辺})=\left|\begin{pmatrix}10 & 6\\ -9 & -5\end{pmatrix}\right|=4$$

であるから$|B|^2=4$，すなわち$|B|=\pm 2$ である。

(i) $|B|=2$ のとき　①より$(\mathrm{trace}B)B=\begin{pmatrix}10 & 6\\ -9 & -5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$すなわち，

$$(\mathrm{trace}B)B=\begin{pmatrix}12 & 6\\ -9 & -3\end{pmatrix} \qquad \cdots \quad ②$$

である。両辺のトレースを計算すると，$\mathrm{trace}\{(\mathrm{trace}B)B\}=\mathrm{trace}\begin{pmatrix}12 & 6\\ -9 & -3\end{pmatrix}$より，$(\mathrm{trace}B)^2=9$ である。

よって，$\mathrm{trace}B=\pm 3$ となる。②に代入して，

$$B=\pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12 & 6\\ -9 & -3\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}4 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$$

である。これはたしかに $B^2=A$ をみたす。

(ii) $|B|=-2$ のとき　①より$(\mathrm{trace}B)B=\begin{pmatrix}10 & 6\\ -9 & -5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$すなわち，

$$(\mathrm{trace}B)B=\begin{pmatrix}8 & 6\\ -9 & -7\end{pmatrix} \qquad \cdots \quad ③$$

である。両辺のトレースを計算すると，$\mathrm{trace}\{(\mathrm{trace}B)B\}=\mathrm{trace}\begin{pmatrix}8 & 6\\ -9 & -7\end{pmatrix}$より，$(\mathrm{trace}B)^2=1$ である。

よって，$\mathrm{trace}B=\pm 1$ となる。③に代入して，

$$B=\pm\begin{pmatrix}8 & 6\\ -9 & -7\end{pmatrix}$$

である。これはたしかに $B^2=A$ をみたす。■

もちろん演習問題 4［4-5］(2)と同じ答えになっている。

6.7　マルコフ連鎖

この節では，【観点 4】の立場から，高校生でも理解できるような行列の応用例を扱う。ここではマルコフ連鎖についてのみ触れる。

マルコフ連鎖とは大ざっぱにいうと，離散的な時間経過に伴って確率的に変化する現象で，時間的に「次の状態」がどうなるのかが「現在の状態」にのみ依存して確率的に決まり，「過去の履歴」には無関係なもののことである。具体例をあげよう。

例　6.17　S 市と T 町は隣り合っている。人口移動を調べたところ，毎年 S 市の人口の 10%の人が T 町へ移住し，逆に T 町の人口の 30%の人が S 市に移住していることが分かった。S 市と T 町の人口の総和が 6 万人とする。十分年月が経ったとき，S 市と T 町の人口はどのようになっているか調べよう。

S 市, T 町の最初の人口をそれぞれx_0（人），y_0（人）とし，n 年後の人口をそれぞれx_n（人），y_n（人）としよう。このとき，$x_0+y_0=60000$ である。

S 市では毎年 S 市の人口の 90%が S 市にとどまり，T 町の人口の 70%が S 市に移住する。

T 町では毎年 S 市の人口の 10%が T 町に移住し，T 町の人口の 30%が T 町にとどまる。

したがって，最初と 1 年後の人口の関係は,

$$\begin{cases} x_1=0.9x_0+0.3y_0 \\ y_1=0.1x_0+0.7y_0 \end{cases}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

である。

次に，1 年後と 2 年後の人口の関係は,

$$\begin{cases} x_2=0.9x_1+0.3y_1 \\ y_2=0.1x_1+0.7y_1 \end{cases}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

である。

以下同様にして，$n-1$ 年後と n 年後の人口の関係は,

$$\begin{cases} x_n=0.9x_{n-1}+0.3y_{n-1} \\ y_n=0.1x_{n-1}+0.7y_{n-1} \end{cases}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

である。

いま，$A=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

である。ここで，A^nを求めよう。ここでは行列のスペクトル分解の方法を用いて求める。

まず，固有値を求める。固有方程式は,

$$t^2-1.6t+0.6=0$$

である。これより，固有値は 1 と 0.6 である。

次に射影 P，Q を求める。

$$P=\frac{1}{1-0.6}(A-0.6E)=\frac{1}{0.4}\left\{\begin{pmatrix}0.9 & 0.3\\ 0.1 & 0.7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0.6 & 0\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}0.75 & 0.75\\ 0.25 & 0.25\end{pmatrix}$$

$$Q=-\frac{1}{1-0.6}(A-E)=-\frac{1}{0.4}\left\{\begin{pmatrix}0.9 & 0.3\\ 0.1 & 0.7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}0.25 & -0.75\\ -0.25 & 0.75\end{pmatrix}$$

である。

A のスペクトル分解は，$A=P+0.6Q$ であるから，$PQ=QP=O$，$P^2=P$，$Q^2=Q$ に注意すれば，

$$A^n=(P+0.6Q)^n=P+(0.6)^nQ\ =\begin{pmatrix}0.75 & 0.75\\ 0.25 & 0.25\end{pmatrix}+(0.6)^n\begin{pmatrix}0.25 & -0.75\\ -0.25 & 0.75\end{pmatrix}$$

となる。したがって，

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}0.75 & 0.75\\ 0.25 & 0.25\end{pmatrix}+(0.6)^n\begin{pmatrix}0.25 & -0.75\\ -0.25 & 0.75\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

となるが，$\lim_{n\to\infty}(0.6)^n=0$ であるから，十分年月が経ったとき，$(0.6)^n=0$ とみなすことにすると，

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.75 & 0.75\\ 0.25 & 0.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.75(x_0+y_0)\\ 0.25(x_0+y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.75\times 60000\\ 0.25\times 60000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45000\\ 15000\end{pmatrix}$$

となる。

したがって，十分年月が経ったとき，S 市の人口は 4 万 5000 人，T 町の人口は 1 万 5000 人である。■

例題 6.18　ある町の人たちは，夕食に必ず和食か洋食の一方を食べる。そして，

夕食に和食を食べた翌日，夕食に和食を食べる人は町全体の 50%，洋食を食べる人は町全体の 50%

夕食に洋食を食べた翌日，夕食に和食を食べる人は町全体の 70%，洋食を食べる人は町全体の 30%

であるという。

十分日数が経ったとき，この町の人たちは和食と洋食についてどのくらいの割合で夕食に食べるのか求めなさい。

［解答］初日に和食，洋食を食べる割合をそれぞれx_0，y_0 とし，n 日後の割合をそれぞれx_n，y_n とする。このとき，$x_0+y_0=1$ である。

$n-1$ 日後と n 日後の和食，洋食を食べる割合の関係は，

$$\begin{cases}x_n=0.5x_{n-1}+0.7y_{n-1}\\ y_n=0.5x_{n-1}+0.3y_{n-1}\end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.5 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}$$

である。

いま，$A=\begin{pmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.5 & 0.3\end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

である。ここで，A^nを求めよう。ここでは行列のスペクトル分解の方法を用いて求める。

まず，固有値を求める。固有方程式は，

$$t^2-0.8t-0.2=0$$

である。これより，固有値は 1 と-0.2 である。

次に射影 P，Q を求める。

$$P=\frac{1}{1+0.2}(A+0.2E)=\frac{1}{1.2}\left\{\begin{pmatrix}0.5 & 0.7\\0.5 & 0.3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.2 & 0\\0 & 0.2\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{1.2}\begin{pmatrix}0.7 & 0.7\\0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

$$Q=-\frac{1}{1+0.2}(A-E)=-\frac{1}{1.2}\left\{\begin{pmatrix}0.5 & 0.7\\0.5 & 0.3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{1.2}\begin{pmatrix}0.5 & -0.7\\-0.5 & 0.7\end{pmatrix}$$

である。

A のスペクトル分解は，$A=P-0.2Q$ であるから，$PQ=QP=O$，$P^2=P$，$Q^2=Q$ に注意すれば，

$$A^n=(P-0.2Q)^n=P+(-0.2)^nQ=\frac{1}{1.2}\begin{pmatrix}0.7 & 0.7\\0.5 & 0.5\end{pmatrix}+(-0.2)^n\frac{1}{1.2}\begin{pmatrix}0.5 & -0.7\\-0.5 & 0.7\end{pmatrix}$$

となる。したがって，

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\left\{\frac{1}{1.2}\begin{pmatrix}0.7 & 0.7\\0.5 & 0.5\end{pmatrix}+(-0.2)^n\frac{1}{1.2}\begin{pmatrix}0.5 & -0.7\\-0.5 & 0.7\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

となるが，$\lim_{n\to\infty}(-0.2)^n=0$ であるから，十分日数が経ったとき，$(-0.2)^n=0$ とみなすことにすると，

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\frac{1}{1.2}\begin{pmatrix}0.7 & 0.7\\0.5 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\frac{1}{1.2}\begin{pmatrix}0.7(x_0+y_0)\\0.5(x_0+y_0)\end{pmatrix}=\frac{1}{1.2}\begin{pmatrix}0.7\\0.5\end{pmatrix}$$

となる。

したがって，十分日数が経ったとき，和食：洋食＝7：5 の割合で夕食に食べる。■

【演習問題 6】

［6-1］行列$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}e & f\\g & h\end{pmatrix}$に対して，積 AB を$AB=\begin{pmatrix}ae+bg & af+bh\\ce+dg & cf+dh\end{pmatrix}$と定義することが自然なものとして納得できるために，以下のようにして合成を用いて説明しなさい。

1 次変換 f，g を表す行列をそれぞれ A，B として，

① gによりベクトル$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$がベクトル$\vec{q}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$に

② fによりベクトル$\vec{q}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$がベクトル$\vec{r}=\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$に

写される。

［6-2］A を O でない行列とする。このとき，

A が零因子である（すなわち，ある O でない行列 B があって，$AB=O$ となる)。

$\Longleftrightarrow$ A は逆行列を持たない

を証明しなさい。

［6-3］A，B を行列とする。$AB=kE$ のとき，$AB=BA$ であることを証明しなさい。

［6-4］命題 6.10 の証明を参考にして，次の(1)，(2)の事項を証明しなさい。

(1) 2 変数の任意の多項式は対称式と交代式の和として一意に表わされる。すなわち，任意の多項式 $p(x,y)$ に対して，$p(x,y)=s(x,y)+a(x,y)$ となる対称式 $s(x,y)$ と交代式 $a(x,y)$ がただ一つ存在する。

ここで，x と y を変数とする多項式 $s(x,y)$ が**対称式**とは，$s(y,x)=s(x,y)$ が成り立つことをいい，多項式 $a(x,y)$ が**交代式**とは，$a(y,x)=-a(x,y)$ が成り立つことをいう。

(2) 実数全体を定義域とする任意の関数は偶関数と奇関数の和として一意に表わされる。すなわち，任意の関数 $f(x)$ に対して，$f(x)=e(x)+o(x)$ となる偶関数 $e(x)$ と奇関数 $o(x)$ がただ一つ存在する。

ここで，実数全体を定義域とする関数 $e(x)$ が**偶関数**とは，$e(-x)=e(x)$ が成り立つことをいい，関数 $o(x)$ が**奇関数**とは，$o(-x)=-o(x)$ が成り立つことをいう。

［6-5］$AB-BA=E$ をみたす行列 A，B は存在するか。

おわりに

第 0 章から第 5 章までは，理工系大学の初年度に学習する線形代数について，特に 2 次元の場合に限ってではあるが，従前高等学校で学習した行列から自然に接続できるように内容を洗練して解説したものである。中学・高等学校数学科教員に（そして可能ならば意識の高い高校生にも）理解できるように述べようとしてきたが，目的は数学科教員が，高等学校の教材を高い視点から眺められるように，そのための基礎となる事項が理解できるようにしたかったことである。

1968 年学習指導要領のいわゆる「数学教育の現代化」以来続いていた平面上のベクトルと，ベクトルの 1 次変換に付随してきた行列であるから，現職の数学科教員はおそらく高等学校で平面上のベクトルと行列については学んできたと思われる。そして大学に進学して初年度に線形代数と微分・積分を学んできたと思われる。ところが，高校まで得意だった数学が，大学初年度でいきなり抽象的なベクトル空間や，イプシロン - デルタ論法などで挫折してしまったのではないだろうか（少なくとも筆者もそうである）。結局大学初年度で学ぶ程度の線形代数ですら満足に理解できないまま教員になってしまった方も少なくはないと思われる。

筆者もいまだに線形代数がよくわかっていないが，せめてものリベンジとして平面上の線形代数くらいはわかりたいとは常々思っていた。数学科教員の中にもそう思っている方は多いのではないだろうか。そういう方のためにこの本を執筆した。教員の「学びなおし」である。ただし，平面上のベクトルと行列を用いて定義される 1 次変換に限って対象にしたので線形代数のうちのかなりの部分を犠牲にせざるを得なかった。だから線形代数の参考書としては不十分である。しかし，数学科教員のための参考書としては教材研究に役に立つ 1 歩先の内容ばかりのものである。スローガンは「今度こそわかりたい線形代数」である。

現行の学習指導要領においては行列については「数学活用」において若干学習する程度にとどまっている。したがって多くの高校生は理系の生徒といえども行列について学ばずに大学に進学しているのが現状である。さらに次期の学習指導要領では，行列を学ばないだけではなく，平面ベクトルが数学 C に移行することになった。つまり文系の生徒の中にはベクトルですら学ばないということもありえるということになる。この現状に危機感を覚える。

そこで第 6 章では，高等学校で行列を学習することの意義として，既習の内容について意味理解を深めるための一助になるということを述べた。4 つの観点を柱にして，その周辺の事項や高等学校数学科の授業でも使えそうな教材について考察した。

今後は，これらの教材の具体的な学習指導案を作成し，実践にあたれることを希望する。同時に，どのような効果が得られるのかも検証できたらとも考えている。これらのことを通して高等学校数学科に行列が復活することを強く望む。

線形代数のわかっていない筆者が書いたものだからその中には間違いが潜んでいる可能性が大いにあるものと考える。その際はご容赦いただきたいのと，ご連絡いただけると幸いである。

演習問題の解答

【演習問題 0】

［0-1］(1) $|A|=1\times7-(-3)\times(-2)=1\fallingdotseq 0$ であるから A は逆行列をもち，

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

(2) $|B|=1\times4-2\times3=-2\fallingdotseq 0$ であるから B は逆行列をもち，

$$B^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(3) $|C|=1\times6-2\times3=0$ であるから C は逆行列をもたない。

［0-2］(1) この連立方程式を行列で表すと，

$$\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

となる。

$A=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ とおくと，$|A|=3\times2-7\times1=-1\fallingdotseq 0$ であるから，$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ で，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$

したがって，$x=-2$，$y=1$ である。

(2) この連立方程式を行列で表すと，

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 6\end{pmatrix}$$

となる。

$B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ とおくと，$|B|=2\times5-(-1)\times(-1)=9\fallingdotseq 0$ であるから，$B^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ で，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}-3\\ 6\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 6\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-9\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

したがって，$x=-1$，$y=1$ である。

(3) この連立方程式を行列で表すと，

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\ l\end{pmatrix}$$

となる。

$C=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とおくと，$|C|=ad-bc\fallingdotseq 0$ であるから，$C^{-1}=\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ で，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix}=\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix}=\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix}dk-bl\\-ck+al\end{pmatrix}=\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}k & b\\l & d\end{pmatrix}\right|\\\left|\begin{pmatrix}a & k\\c & l\end{pmatrix}\right|\end{pmatrix}$$

したがって，$x=\dfrac{\left|\begin{pmatrix}k & b\\l & d\end{pmatrix}\right|}{|C|}$，$y=\dfrac{\left|\begin{pmatrix}a & k\\c & l\end{pmatrix}\right|}{|C|}$ である。

［0-3］連立方程式を変形すると，

$$\begin{cases}(3-k)x+\qquad y=0\\\qquad 2x+(4-k)y=0\end{cases}$$

であるから，系 0.17(2)より，$\left|\begin{pmatrix}3-k & 1\\2 & 4-k\end{pmatrix}\right|=0$ すなわち，$(3-k)(4-k)-1\times2=0$ である。

これより $k^2-7k+10=0$ となり，これを解いて $k=2$，5 である。

［0-4］$B=\begin{pmatrix}e & f\\g & h\end{pmatrix}$ とする。

$$AB=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e & f\\g & h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae+bg & af+bh\\ce+dg & cf+dh\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}e & f\\g & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae+cf & be+df\\ag+ch & bg+dh\end{pmatrix}$$

より

$$\mathrm{trace}(AB)=ae+bg+cf+dh,\quad \mathrm{trace}(BA)=ae+cf+bg+dh$$

となる。したがって，$\mathrm{trace}(AB)=\mathrm{trace}(BA)$である。

［0-5］$A^2=O$ とする。このとき，

$(E-A)\,(E+A)=E+A-A-\mathrm{A}^2=E-\mathrm{A}^2=E$

となる。同様にして，

$(E+A)\,(E-A)=E-A+A-\mathrm{A}^2=E-\mathrm{A}^2=E$

も成り立つ。

したがって $E-A$ は逆行列をもち，$(E-A)^{-1}=E+A$ である。

【演習問題 1】

［1-1］(1) $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ であるから，点(2，1)に写る。

(2) $\begin{pmatrix}1 & -3\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ であるから，点(0，1)に写る。

(3) $\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ であるから，点(0，5)に写る。

［1-2］$\begin{pmatrix} a & -2 \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} 2a-2 \\ -2+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

よって，$2a-2=2$，$-2+b=1$ から $a=2$，$b=3$ である。

［1-3］(1) 点 P の座標を$(x,\ y)$とする。行列 A について，$|A|=2\times3-4\times1=2\neq0$ であるから A は逆行列$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$をもつ。

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。したがって点 P の座標は P(1，－1)である。

(2) 点 P$(x,\ y)$が f によって直線上の点$(x',\ y')$に写るとする。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+4y \\ x+3y \end{pmatrix}$$

であるから，$x'=2x+4y$，$y'=x+3y$ である。

これを $3x'+4y'-12=0$ に代入して $3(2x+4y)+4(x+3y)-12=0$ となる。

これを整理すれば求める図形は直線 $5x+12y-6=0$ である。

［1-4］f，g を表す行列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

であるから，合成変換 $g\circ f$ を表す行列は，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

である。なおこの行列は

$$\begin{pmatrix} \cos30^\circ & \sin30^\circ \\ \sin30^\circ & -\cos30^\circ \end{pmatrix}$$

であるから，合成変換 $g\circ f$ は，原点 O を通り，x 軸と角 15°をなす直線に関する対称移動を表す。

［1-5］($\Longrightarrow$) $\overrightarrow{w_1}$，$\overrightarrow{w_2}$ が 1 次独立とする。ベクトル$\vec{p}$ に対して $f(\vec{p})=\vec{0}$ とする。

$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ は 1 次独立だから命題 0.3(5)より $\vec{p}=x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}$ をみたす実数の組$(x,\ y)$がただ 1 組ある。このとき，

$$f(\vec{p})=f(x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2})=xf(\overrightarrow{v_1})+yf(\overrightarrow{v_2})=x\overrightarrow{w_1}+y\overrightarrow{w_2}$$

であるから，$x\overrightarrow{w_1}+y\overrightarrow{w_2}=\vec{0}$ となる。

ここで，$\overrightarrow{w_1}$，$\overrightarrow{w_2}$ が 1 次独立だから，命題 0.3(6)より $x=y=0$ である。

したがって，$\vec{p}=x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}=\vec{0}$ となるので命題 1.5，定理 1.6 より f は非退化である。

（$\Longleftarrow$）f は非退化とする。$x\overrightarrow{w_1}+y\overrightarrow{w_2}=\vec{0}$ とする。

このとき $xf(\overrightarrow{v_1})+yf(\overrightarrow{v_2})=\vec{0}$ より $f(x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2})=\vec{0}$ であるから，命題 1.5(2)より $x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}=\vec{0}$ である。

ここで，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ は 1 次独立だから命題 0.3(6)より $x=y=0$ である。

したがって，$\overrightarrow{w_1}$，$\overrightarrow{w_2}$ は 1 次独立である。

【演習問題 2】

［2-1］(1) $\vec{p}=x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+y\\x+2y\end{pmatrix}$$

であるから，$-1=-x+y$，$4=x+2y$ である。これを解いて $x=2$，$y=1$ である。

したがって，$\vec{p}=2\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$ である。

(2) $\vec{q}=x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+y\\x+2y\end{pmatrix}$$

であるから，$4=-x+y$，$5=x+2y$ である。これを解いて $x=-1$，$y=3$ である。

したがって，$\vec{q}=-\overrightarrow{v_1}+3\overrightarrow{v_2}$ である。

(3) $\vec{r}=x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+y\\x+2y\end{pmatrix}$$

であるから，$2=-x+y$，$-2=x+2y$ である。これを解いて $x=-2$，$y=0$ である。

したがって，$\vec{p}=-2\overrightarrow{v_1}$ である。

［2-2］(1) $f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1-2\\1+2\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$，$f\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2-3\\2+2\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}$ である。定義より，

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\5&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}A$$

であるから両辺に左から $\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}$ をかけることによって，

$$A=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\5&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&19\\-7&-10\end{pmatrix}$$

となる。

(2) $f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$，$f\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ である。定義より，

$$\begin{pmatrix}0&0\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}A$$

であるから両辺に左から$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$をかけることによって，

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

となる。

［別解］標準基底$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$から基底 $\boldsymbol{V}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$への基底変換行列 P は$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P$より$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

である。

(1) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$であるから f の標準基底に関する表現行列は$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$である。よって，求める表現行列 A は定理 2.11 より，

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 5 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 19\\ -7 & -10\end{pmatrix}$$

である。

(2) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$であるから$f$の標準基底に関する表現行列は$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$である。よって，求める表現行列 A は定理 2.11 より，

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

である。

［2-3］ 求める行列を A とする。$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$f\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$である。定義より，

$$\left(A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ \ A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\quad \text{すなわち}\quad A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

である。両辺に右から$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$をかけることによって，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -6\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

となる。

［別解］標準基底$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$から基底 $\boldsymbol{V}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$への基底変換行列 P は$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P$より$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

である。

求める行列を A とすると，A は f の標準基底に関する表現行列である。よって，定理 2.11 より$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=P^{-1}AP$であるから，

$$A=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

である。

［2-4］(1) $\vec{v}$ と $A\vec{v}$ が 1 次独立であることを示せばよい。

$$x\vec{v}+yA\vec{v}=\vec{0} \quad \cdots \quad ①$$

とする。

①の両辺に右から A をかけると，$xA\vec{v}+yA^2\vec{v}=A\vec{0}$ となるが，$A^2=O$ より $xA\vec{v}=\vec{0}$ である。ところが $A\vec{v}\neq\vec{0}$ より $x=0$ である。

①に代入して，$yA\vec{v}=\vec{0}$ となるが，$A\vec{v}\neq\vec{0}$ より $y=0$ である。

したがって，$x=y=0$ となるので $\vec{v}$ と $A\vec{v}$ は 1 次独立である。

(2) 定義より $\begin{pmatrix}A\vec{v} & A(A\vec{v})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{v} & A\vec{v}\end{pmatrix}B$ であるから，

$$\begin{pmatrix}A\vec{v} & A^2\vec{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{v} & A\vec{v}\end{pmatrix}B \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix}A\vec{v} & \vec{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{v} & A\vec{v}\end{pmatrix}B$$

である。これより，

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

である。

［2-5］$A\neq\pm E$ であるから $E-A\neq O$, $E+A\neq O$ である。また，$A^2=E$ より，

$$(E-A)(E+A)=E+A-A-A^2=E-E=O$$

であるから，$E-A$, $E+A$ はともに逆行列をもたない。したがって系 0.17(2)より，連立方程式

$$(E-A)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\quad (E+A)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

は $x=y=0$ 以外の解をもつ。すなわち，$(E-A)\vec{p}=\vec{0}$，$(E+A)\vec{q}=\vec{0}$ をみたす $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ がある。

$(E-A)\vec{p}=\vec{0}$ より $\vec{p}-A\vec{p}=\vec{0}$，すなわち $A\vec{p}=\vec{p}$ である。

$(E+A)\vec{q}=\vec{0}$ より $\vec{q}+A\vec{q}=\vec{0}$，すなわち $A\vec{q}=-\vec{q}$ である。

ここで，$\vec{p}$，$\vec{q}$ は 1 次独立である。実際. いま，$x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{0}$ …① とする。このとき，$A(x\vec{p}+y\vec{q})=A\vec{0}$ より，$x\vec{p}-y\vec{q}=\vec{0}$ …② となるので，①，②より，$x=y=0$，したがって，$\vec{p}$，$\vec{q}$ は 1 次独立になる。

行列 P を $P=\begin{pmatrix}\vec{p} & \vec{q}\end{pmatrix}$ とすれば，P は逆行列をもち，

$$AP=A\begin{pmatrix}\vec{p} & \vec{q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\vec{p} & A\vec{q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{p} & -\vec{q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{p} & \vec{q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

となる。両辺に左から P^{-1} をかけて，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

となる。

【演習問題 3】

［3-1］以下は解答の一例である。標準形の計算は 1 通りではない。

(1) まず，固有値を求める。固有方程式は，

$$t^2-3t+2=0$$

である。これより，固有値は 1 と 2 である。

次に固有ベクトルを求める。

(i) 固有値 1 のとき，$(A-1E)\vec{u}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\vec{u}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは$\vec{u}=\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$ である（t は任意の実数)。

(ii) 固有値 2 のとき，$(A-2E)\vec{v}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは$\vec{v}=\begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix}$ である（t は任意の実数)。

固有値 1，2 に対する固有ベクトルの 1 つをそれぞれ$\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とし（いずれも $t=1$ とした)，行列 P を$P=(\vec{u}\ \vec{v})=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とする。このとき，

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP&=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。

(2) まず，固有値を求める。固有方程式は，

$$t^2-2t+1=0$$

である。これより，固有値は 1 のみである。

次に固有ベクトルを求める。$(B-E)\vec{v}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは$\vec{u}=\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ である（t は任意の実数)。

(i) まずは$(B-E)\vec{v}\fallingdotseq\vec{0}$ となる任意のベクトル$\vec{v}$ を一つ取る。たとえば$\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

(ii) $\vec{u}=(B-E)\vec{v}$ より，$\vec{u}=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ である。

(iii) $P=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}$ より，$P=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ である。

このとき，

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である。

［3-2］A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ は $\Phi_A(t)=t^2+t+1$ である。

ハミルトン-ケーリーの定理（補題 3.11）より，$\Phi_A(A)=A^2+A+E=O$ である。これより，

$$A^2=-A-E$$

$$A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)=O \quad したがって \quad A^3=E$$

である。

(1) $f(A)=A^{20}=(A^3)^6A^2=E^6A^2=A^2=-A-E=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 7 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$

(2) $f(A)=A^{11}+A^7-2E=(A^3)^3A^2+(A^3)^2A-2E=A^2+A-2E$

$$=(-A-E)+A-2E=-3E=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

［3-3］$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とする。このとき，trace$A=a+d$ である。

A の固有値 λ，μ は，A の固有方程式 $t^2-(a+d)t+(ad-bc)=0$ の解であるから 2 次方程式の解と係数の関係より，$\lambda+\mu=a+d$ である。

よって，trace$A=\lambda+\mu$ が成り立つ。

［別解］演習問題 0［0-4］より，

$$\mathrm{trace}(P^{-1}AP)=\mathrm{trace}(P^{-1}(AP))=\mathrm{trace}((AP)P^{-1})=\mathrm{trace}A$$

である。

(i) 行列 A が異なる 2 つの実固有値 λ，μ をもつとき，定理 3.5 より $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ であるから，trace$A$ $=\mathrm{trace}(P^{-1}AP)=\lambda+\mu$ が成り立つ。

(ii)-i 行列 A が 1 つの実固有値 λ をもち，$A-\lambda E=O$ のとき，定理 3.6(1)より $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ であるから，

trace$A$ ＝trace$(P^{-1}AP)$＝2λ が成り立つ。

(ii)-ii 行列 A が 1 つの実固有値λ をもち，$A-\lambda E \fallingdotseq O$ のとき，定理 3.6(2)より $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ であるから，trace$A$ ＝trace$(P^{-1}AP)$＝2λ が成り立つ。

(iii) 行列 A が異なる 2 つの虚固有値$\alpha+i\beta$，$\alpha-i\beta$（α，β は実数，$\beta \fallingdotseq 0$）をもつとき，定理 3.7 より $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ であるから，trace$A$ ＝trace$(P^{-1}AP)$＝2α が成り立つ。

いずれの場合も trace$A$ の値は固有値の和になっている。

［3-4］AB, BA の固有多項式をそれぞれ$\Phi_{AB}(t)$，$\Phi_{BA}(t)$ とする。

A が逆行列をもつとする。このとき，$AB=A(BA)A^{-1}$ である。

$\Phi_{AB}(t)=|AB-tE|=|A(BA)A^{-1}-tE|$

$\qquad=|A(BA-tE)A^{-1}|=|A||BA-tE||A^{-1}|=|BA-tE|=\Phi_{BA}(t)$

B が逆行列をもつとする。このとき，$BA=B(AB)B^{-1}$ である。

$\Phi_{BA}(t)=|BA-tE|=|B(AB)B^{-1}-tE|$

$\qquad=|B(AB-tE)B^{-1}|=|B||AB-tE||B^{-1}|=|AB-tE|=\Phi_{AB}(t)$

いずれの場合も AB と BA の固有多項式は一致する。

［3-5］(1) （$\Longrightarrow$）A が逆行列 A^{-1} をもつとする。$\lambda \fallingdotseq 0$ であると仮定する。

λ に対する固有ベクトルの 1 つを$\vec{u}(\fallingdotseq\vec{0})$ とする。このとき，$A\vec{u}=0\vec{u}$ より $A\vec{u}=\vec{0}$ である。

両辺に左から A^{-1} をかければ，$\vec{u}=\vec{0}$ となり矛盾である。

よって，$\lambda=0$ である。

μ についても同様である。

（$\Longleftarrow$）$\lambda \fallingdotseq 0$ かつ$\mu \fallingdotseq 0$ とする。A が逆行列をもたないと仮定する。

系 0.17 より，$A\vec{u}=\vec{0}$ となるベクトル$\vec{u}(\fallingdotseq\vec{0})$ がある。

このとき，$A\vec{u}=0\vec{u}$ となるので，0 は A の固有値になる。これは$\lambda \fallingdotseq 0$ かつ$\mu \fallingdotseq 0$ に矛盾する。

よって，A は逆行列をもつ。

(2) （$\Longrightarrow$）$A^2=O$ とする。λ に対する固有ベクトルの 1 つを$\vec{u}(\fallingdotseq\vec{0})$ とする。このとき，$A\vec{u}=\lambda\vec{u}$ であるから$A^2\vec{u}=A(A\vec{u})=A(\lambda\vec{u})=\lambda^2\vec{u}$ であるが，$A^2=O$ より$\lambda=0$ である。

μ についても同様である。

（$\Longleftarrow$）$\lambda=\mu=0$ であるとする。このとき A の固有多項式$\Phi_A(t)$ は$\Phi_A(t)=t^2$ である。

ハミルトン-ケーリーの定理（補題 3.11）より$\Phi_A(A)=O$ であるから，$A^2=O$ である。

【演習問題 4】

［4-1］(1) まず，固有値を求める。固有方程式は，

$$t^2-4t-5=0$$

である。これより，固有値は 5 と－1 である。

次に射影 P，Q を求める。

$$P=\frac{1}{5-(-1)}(A+1E)=\frac{1}{6}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\5&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{5}{6}&\frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

$$Q=-\frac{1}{5-(-1)}(A-5E)=-\frac{1}{6}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\5&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}&-\frac{1}{6}\\-\frac{5}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

である。したがって A のスペクトル分解は,

$$A=5P+(-1)Q=5\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{5}{6}&\frac{5}{6}\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}\frac{5}{6}&-\frac{1}{6}\\-\frac{5}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

である。

(2) まず，固有値を求める。固有方程式は,

$$t^2-7t+10=0$$

である。これより，固有値は 5 と 2 である。

次に射影 P，Q を求める。

$$P=\frac{1}{5-2}(B-2E)=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$Q=-\frac{1}{5-2}(B-5E)=-\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

である。したがって B のスペクトル分解は,

$$B=5P+2Q=5\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

である。

［4-2］まず，固有値を求める。固有方程式は,

$$t^2-5t+6=0$$

である。これより，固有値は 3 と 2 である。

次に射影 P，Q を求める。

$$P=\frac{1}{3-2}(A-2E)=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$Q=-\frac{1}{3-2}(A-3E)=-\left\{\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}$$

である。

A のスペクトル分解は,

$$A=3P+2Q$$
であるから，$PQ=QP=O$，$P^2=P$，$Q^2=Q$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}A^n&=(3P+2Q)^n\\&=3^nP+2^nQ\\&=3^n\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\times3^n-2^n&-2\times3^n+2\times2^n\\3^n-2^n&-3^n+2\times2^n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\times3^n-2^n&-2\times3^n+2^{n+1}\\3^n-2^n&-3^n+2^{n+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

［別解］（対角化を用いる）まず，固有値を求める。固有方程式は，

$$t^2-5t+6=0$$

である。これより，固有値は 3 と 2 である。

次に固有ベクトルを求める。

(i) 固有値 3 のとき，$(A-3E)\vec{u}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix}1&-2\\1&-2\end{pmatrix}\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは$\vec{u}=\begin{pmatrix}2t\\t\end{pmatrix}$ である（t は任意の実数）。

(ii) 固有値 2 のとき，$(A-2E)\vec{v}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは$\vec{v}=\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}$ である（t は任意の実数）。

固有値 3，2 に対する固有ベクトルの 1 つをそれぞれ$\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とし（いずれも $t=1$ とした），

行列 P を$P=(\vec{u}\ \vec{v})=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ とする。このとき，

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&2\\3&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。したがって，

$$A^n=P\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & -3^n\\ -2^n & 2\times2^n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & -3^n\\ -2^n & 2^{n+1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\times3^n-2^n & -2\times3^n+2^{n+1}\\ 3^n-2^n & -3^n+2^{n+1}\end{pmatrix}$$

となる。

［4-3］(1) λ を P の固有値とし，λ に対する固有ベクトルの 1 つを$\vec{v}(\neq\vec{0})$ とする。

このとき，$P\vec{v}=\lambda\vec{v}$ である。両辺に左から P をかけると，$P^2\vec{v}=P(\lambda\vec{v})$ であるが，$P^2=P$ より，

$$(\text{左辺})=P\vec{v}=\lambda\vec{v}\quad(\text{右辺})=\lambda P\vec{v}=\lambda^2\vec{v}$$

である。このことから，$\lambda\vec{v}=\lambda^2\vec{v}$ すなわち$(\lambda-\lambda^2)\vec{v}=\vec{0}$ である。

$\vec{v}\neq\vec{0}$ であるから$\lambda-\lambda^2=0$ である。よって，$\lambda=0$ または 1 である。

(2) （$\Longrightarrow$）P の固有値は 0 のみであるとする。このとき P の固有多項式$\Phi_P(t)=t^2$ である。

ハミルトン-ケーリーの定理（補題 3.11）より$\Phi_P(P)=O$ であるから，$P^2=O$ である。

$P^2=P$ であるから $P=O$ である。

（$\Longleftarrow$）$P=O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ とする。このとき P の固有方程式は $t^2=0$ であるから P の固有値は 0 のみである。

［4-4］P の固有値をλ，μ とする。［4-3］よりλ，$\mu=0$ または 1 である。また $P\neq O$ よりλ とμ は同時に 0 となることはない。すなわち，$(\lambda,\ \mu)=(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 1)$のいずれかである。

演習問題 3［3-3］より $\mathrm{trace}A=\lambda+\mu$ であるから，$a+d=1$ または 2 である。

したがって，$a\geqq\dfrac{1}{2}$ または$d\geqq\dfrac{1}{2}$ である。

［4-5］(1) A のスペクトル分解を $A=\lambda P+\mu Q$ とする。λ，$\mu>0$ であるから，いま，

$$B=\pm\sqrt{\lambda}P\pm\sqrt{\mu}Q$$

とおけば，

$$B^2=(\pm\sqrt{\lambda}P\pm\sqrt{\mu}Q)(\pm\sqrt{\lambda}P\pm\sqrt{\mu}Q)$$
$$=\lambda P^2\pm\sqrt{\lambda\mu}PQ\pm\sqrt{\lambda\mu}QP+\mu Q^2$$
$$=\lambda P+\mu Q$$
$$=A$$

となる。

(2) 例 4.3 より，行列 A は正値実固有値 4，1 をもつ。また，A のスペクトル分解は，

$$A=4\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

である。したがって，

$$B=\pm\sqrt{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\pm\sqrt{1}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\pm 2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -9 & -7 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

【演習問題 5】

［5-1］以下は解答の一例である。標準形の計算は 1 通りではない。

(1)まず，固有値を求める。固有方程式は，

$$t^2-5t=0$$

である。これより，固有値は 0 と 5 である。

次に固有ベクトルのひとつを求める。

(i) 固有値 0 のとき，$(A-0E)\vec{u}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\vec{u}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトル$\vec{u}$ として$\vec{u}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ をとる。

(ii) 固有値 5 のとき，$(A-5E)\vec{v}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトル$\vec{v}$ として$\vec{v}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ をとる。

行列 L を $L=(\vec{u},\vec{v})=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ とする。L は直交行列であり，

$${}^tLAL=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{5}{\sqrt{5}}\\ 0 & \frac{10}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

である。

(2) まず，固有値を求める。固有方程式は，

$$t^2-1=0$$

である。これより，固有値は 1 と -1 である。

次に固有ベクトルのひとつを求める。

(i) 固有値 1 のとき，$(B-1E)\vec{u}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトル$\vec{u}$ として$\vec{u}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ をとる。

(ii) 固有値-1 のとき，$(B+1E)\vec{v}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトル$\vec{v}$ として$\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ をとる。

行列 L を$L=(\vec{u},\vec{v})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とする。L は直交行列であり，

$$^tLBL=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

である。

［5-2］$x\vec{u}+y\vec{v}=\vec{0}$ 　 $\cdots$ ① 　とする。

このとき，$\vec{u}\cdot(x\vec{u}+y\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{0}$ であるが，$\vec{u}$ と$\vec{v}$ が垂直であるから，

$$(\text{左辺})=x\vec{u}\cdot\vec{u}+y\vec{u}\cdot\vec{v}=x\left|\vec{u}\right|^2 \quad (\text{右辺})=0$$

である。したがって，$x|\vec{u}|^2=0$ であるが，$\vec{u}\neq\vec{0}$ より，$x=0$ である。

①に代入して，$y\vec{v}=\vec{0}$ であるが，$\vec{v}\neq\vec{0}$ より，$y=0$ である。

したがって，$x=y=0$ となり，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は 1 次独立である。

［5-3］係数行列は$\begin{pmatrix}4 & a\\ a & 9\end{pmatrix}$ である。命題 5.16(3)より，$q(x,y)$ が半正値になる条件は

$$4>0,\ 4\times9-a^2>0$$

であるから求める範囲は$-6<a<6$ である。

［5-4］A は対称行列であるから直交行列 L を用いて対角化可能である。

まず，固有値を求める。固有方程式は，

$$t^2-1=0$$

である。これより，固有値は 1 と -1 である。

次に固有ベクトルのひとつを求める。

(i) 固有値 1 のとき，$(A-1E)\vec{u}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix}\cos\theta-1 & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta-1\end{pmatrix}\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad \text{すなわち}\quad \begin{pmatrix}-2\sin^2\frac{\theta}{2} & 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & -2\cos^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトル$\vec{u}$ として$\vec{u}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ をとる。

(ii) 固有値-1 のとき，$(A+1E)\vec{v}=\vec{0}$ より，

$$\begin{pmatrix}\cos\theta+1 & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta+1\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad \text{すなわち}\quad \begin{pmatrix}2\cos^2\frac{\theta}{2} & 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 2\sin^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトル$\vec{v}$ として$\vec{v}=\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ をとる。

行列 L を$L=(\vec{u},\vec{v})=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ とする。L は直交行列であり，

$$\begin{aligned}{}^tLAL &=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}+\sin\theta\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}+\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} & -\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}-\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & -\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

である。

［5-5］直交行列 L を用いて $q(x,y)$ を標準化する。すなわち $L=(\vec{u}\ \ \vec{v})$，$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ として，$q(x,y)=\lambda X^2+\mu Y^2$ とする。

$|\vec{x}|=1$ で，L は直交行列であるから，$\vec{\mathrm{X}}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ について $|\vec{\mathrm{X}}|=1$ すなわち，$X^2+Y^2=1$ である。

(1) $\lambda=\mu$ のとき，$q(x,y)=\lambda X^2+\lambda Y^2=\lambda(X^2+Y^2)=\lambda$ である。

(2) $\lambda<\mu$ のとき，まずは最小値を考えよう。

$q(x,y)=\lambda X^2+\mu Y^2\geqq\lambda X^2+\lambda Y^2=\lambda(X^2+Y^2)=\lambda$ である。

ここで，等号が成り立つのは $\mu Y^2=\lambda Y^2$ のときすなわち $(\mu-\lambda)Y^2=0$ のときである。ところが $\lambda<\mu$ より $Y=0$ のときである。$X^2+Y^2=1$ に気をつければ $(X,Y)=(\pm1,0)$ のときである。したがって，

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=(\vec{u}\ \ \vec{v})\begin{pmatrix}\pm1\\ 0\end{pmatrix}=\pm\vec{u}$$

のときである。

以上のことより，$\vec{x}=\pm\vec{u}$ のとき，$q(x,y)$ の最小値は λ である。

次に最大値を考えよう。

$q(x,y)=\lambda X^2+\mu Y^2\leqq\mu X^2+\mu Y^2=\mu(X^2+Y^2)=\mu$ である。

ここで，等号が成り立つのは $\lambda X^2=\mu X^2$ のときすなわち $(\mu-\lambda)X^2=0$ のときである。ところが $\lambda<\mu$ より $X=0$ のときである。$X^2+Y^2=1$ に気をつければ $(X,Y)=(0,\pm1)$ のときである。したがって，

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=(\vec{u}\ \ \vec{v})\begin{pmatrix}0\\ \pm1\end{pmatrix}=\pm\vec{v}$$

のときである。

以上のことより，$\vec{x}=\pm\vec{v}$ のとき，$q(x,y)$ の最大値は μ である。

【演習問題 6】

［6-1］まず，①より $\vec{q}=B\vec{p}$，②より $\vec{r}=A\vec{q}$ と表されるから，

$$\vec{r}=A(B\vec{p})=AB\vec{p}$$

と表される。AB は行列として定義するので，$\vec{p}$ が $\vec{r}$ に写る変換も 1 次変換で，その表す行列は AB で

ある。

一方,$B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ であるから，1 次変換 g，f はそれぞれ，

$$\begin{cases} x'=ex+fy \\ y'=gx+hy \end{cases}, \quad \begin{cases} x''=ax'+by' \\ y''=cx'+dy' \end{cases}$$

と表される。したがって，

$$x''=a(ex+fy)+b(gx+hy)=(ae+bg)x+(af+bh)y$$

$$y''=c(ex+fy)+d(gx+hy)=(ce+dg)x+(cf+dh)y$$

である。よって，$\vec{p}$ が $\vec{r}$ に写る変換も 1 次変換で，その表す行列は

$$\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

である。

以上のことから $AB=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ と定義することが自然なものであると考えられる。

［6-2］（$\Longrightarrow$）ある O でない行列 B があって，$AB=O$ とする。

いま，A が逆行列 A^{-1} をもたないと仮定すると，$A^{-1}AB=A^{-1}O$ より $B=O$ となるが，これは B が O でない行列であることに矛盾する。よって，A は逆行列をもたない。

（$\Longleftarrow$）$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないと仮定する。このとき，$ad-bc=0$ である。

いま，$B=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とおくと，$A \fallingdotseq O$ より $B \fallingdotseq O$ で，

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

となる。

［6-3］$AB=kE$ とする。$\left(\frac{1}{k}A\right)B=\frac{1}{k}AB=\frac{1}{k}(AB)=\frac{1}{k}(kE)=E$ であるから $\frac{1}{k}A$ は B の逆行列である。よって，$\frac{1}{k}BA=B\left(\frac{1}{k}A\right)=E$ となり，$\frac{1}{k}AB=\frac{1}{k}BA$ より，$AB=BA$ である。

［6-4］(1) 任意の多項式 $p(x,y)$ をとり固定する。

（存在）$s(x,y)=\frac{1}{2}\{p(x,y)+p(y,x)\}$，$a(x,y)=\frac{1}{2}\{p(x,y)-p(y,x)\}$ とおく。このとき，

$$s(y,x)=\frac{1}{2}\{p(y,x)+p(x,y)\}=\frac{1}{2}\{p(x,y)+p(y,x)\}=s(x,y)$$

$$a(y,x)=\frac{1}{2}\{p(y,x)-p(x,y)\}=\frac{1}{2}\{-p(x,y)+p(y,x)\}=-a(x,y)$$

であるから $s(x,y)$，$a(x,y)$はそれぞれ対称式，交代式である。また，

$$s(x,y)+a(x,y)=\frac{1}{2}\{p(x,y)+p(y,x)\}+\frac{1}{2}\{p(x,y)-p(y,x)\}=p(x,y)$$

である。

（一意）$p(x,y)=s(x,y)+a(x,y)=s'(x,y)+a'(x,y)$ （$s(x,y)$，$s'(x,y)$ は対称式，$a(x,y)$，$a'(x,y)$ は交代式）と 2 通りに表わされたとする。このとき，移項して，

$$s(x,y)-s'(x,y)=a'(x,y)-a(x,y) \qquad \cdots \quad ①$$

となる。両辺の x,y を入れ替えると $s(y,x)-s'(y,x)=a'(y,x)-a(y,x)$となるが，

（左辺）$=s(x,y)-s'(x,y)$，（右辺）$=-(a'(x,y)-a(x,y))$

であるから，

$$s(x,y)-s'(x,y)=-(a'(x,y)-a(x,y)) \quad \cdots \quad ②$$

となる。①＋②より，$2(s(x,y)-s'(x,y))=0$ であるから，$s(x,y)=s'(x,y)$ となる。これを①に代入して $0=a'(x,y)-a(x,y)$であるから，$a(x,y)=a'(x,y)$ となる。

(2) 任意の関数 $f(x)$をとり固定する。

（存在）$e(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$ ，$o(x)=\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}$ とおく。このとき，

$$e(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)+f(x)\}=\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}=f(x)$$

$$o(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)-f(x)\}=\frac{1}{2}\{-f(x)+f(-x)\}=-f(x)$$

であるから $e(x)$，$o(x)$はそれぞれ偶関数，奇関数である。また，

$$e(x)+o(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}+\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}=f(x)$$

である。

（一意）$f(x)=e(x)+o(x)=e'(x)+o'(x)$ （$e(x)$，$e'(x)$ は偶関数，$o(x)$，$o'(x)$ は奇関数）と 2 通りに表わされたとする。このとき，移項して，

$$e(x)-e'(x)=o'(x)-o(x) \qquad \cdots \quad ③$$

となる。両辺の x のかわりに$-x$ を代入すると$e(-x)-e'(-x)=o'(-x)-o(-x)$ となるが，

（左辺）$=e(x)-e'(x)$，（右辺）$=-(o'(x)-o(x))$

であるから，

$$e(x)-e'(x)=-(o'(x)-o(x)) \quad \cdots \quad ④$$

となる。③＋④より，$2(e(x)-e'(x))=0$ であるから，$e(x)=e'(x)$ となる。これを③に代入して $0=o'(x)-o(x)$ であるから，$o(x)=o'(x)$ となる。

［6-5］存在しない。実際，与式の両辺のトレースを計算する。

$$\mathrm{trace}(AB-BA)=\mathrm{trace}E$$

である。ここで，

（左辺）$=\mathrm{trace}(AB)-\mathrm{trace}(BA)=\mathrm{trace}(AB)-\mathrm{trace}(AB)=0$,

$$(\text{右辺}) = \mathrm{trace}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

であるが，これはあり得ない。したがって，このような行列 X は存在しない。

さくいん

参考文献

［1］大島　利雄　『改訂版数学C』（文部科学省検定済教科書），数研出版，2008.
［2］佐竹　一郎　『線型代数学』，裳華房，1973.
［3］杉本　幸司　『じっくり考える平面ベクトルと平面図形』，文芸社，2013.
［4］高橋陽一郎　『詳説数学B』（文部科学省検定済教科書），啓林館，2012.
［5］中村　　郁　『線形代数学』，数学書房，2007.
［6］ニューアクション編集委員会『ニューアクションβ数学Ⅱ＋B』，東京書籍，2012.
［7］文部科学省　『高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説　数学編　理数編』，学校図書，2019.

線形代数については参考になる良書がたくさんあるが，主に[2]を参考にした。

本書は高等学校の「平面上のベクトル」は既知としているが，高等学校の数学 B の教科書(たとえば[4])，参考書(たとえば[6])等は参考になった。さらに従前の学習指導要領における高等学校の「行列」については教科書[1]を参考にした。また，平面上のベクトルについて 1 歩先のことまで興味がある方は[3]を参照するといいかもしれない。

第 6 章については[7]が参考になった。また，6.7 節マルコフ連鎖について，例題 6.18 は[5]を参考にした。

著者プロフィール

杉本　幸司（すぎもと　こうじ）

略歴　1965 年　北海道釧路市に生まれる。

　　　1989 年　北海道大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了。

　　　北海道立高等学校教諭，予備校講師を経て，

　　　現在，私立札幌静修高等学校教諭。理学修士，修士（教育学），博士（工学）。

専攻　確率過程論，エルゴード理論，数学科教育法，脳工学

著書　時をかける少年～時系列解析への入門～（ポレポレ出版，1993）

　　　脳トレし MATH？（ぽすと出版，2008）

　　　じっくり考える平面ベクトルと平面図形（文芸社，2013）

　　　「複素数平面」で解く「図形と方程式」（学研プラス，2019）