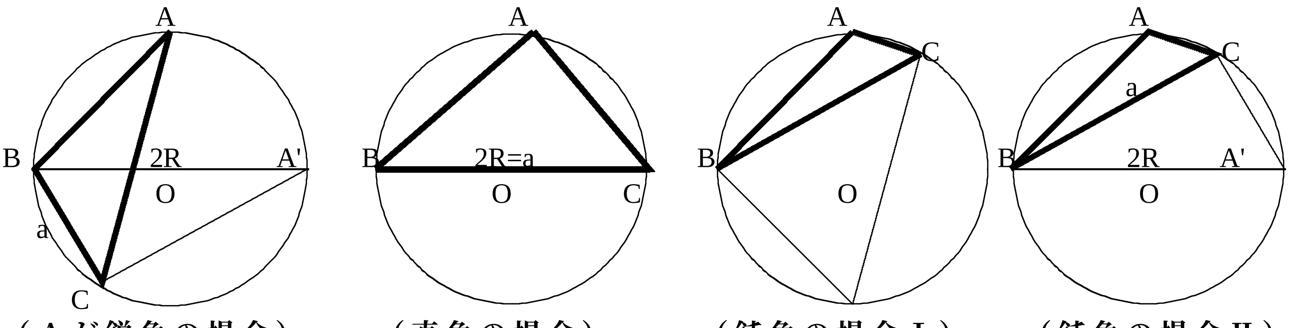
正弦定理の証明　part2

長沼高校　佐藤清

外接円の半径Ｒを積極的に用いる証明　　　　　　「～　～」は私の感想です
　１　普通の証明（１）　　　　　　　　　　　　～無理やり円を作るところが不満～
　２　垂線ＣＨの長さに着目した証明　　　　　　～見事！と一瞬自慢。しかし面倒～
　３　中心原点、半径Ｒの円を用いる方法　　　　～倍角公式を先に教える訳がない～
　４　図形と式を用いる方法　　　　　　　　　　～図形と式は数Ⅱ正弦定理は数Ⅰ～
Ｒを考慮しない証明
　５　普通の証明（２）　　　　　　　　　　　　～この図は後々まで使える所に魅力～
　６　面積の公式からの証明　　　　　　　　　　～鮮やかだが図形的に扱いたかった～
　７　第２余弦定理からの証明　　　　　　　　　～授業では扱えないが興味深い～
　８　第１余弦定理からの証明　　　　　　　　　～これは無理矢理に近い～
　９　幾何学的証明　　　　　　　　　　　　　　～数学史の文献にのっていました～
正弦定理の周辺話題
　ラミーの定理　　　　　　　　　　　　　　　　～初めて知りました～
　数学史と正弦定理　　　　　　　　　　　　　　～調べると難しい～
　ふりだしに戻る

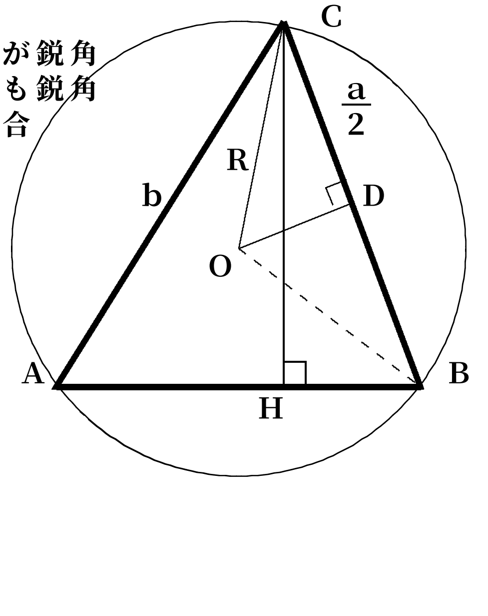
１　普通の証明（1）



（Ａが鋭角の場合）　（直角の場合）　（鈍角の場合Ⅰ）　（鈍角の場合Ⅱ）

２　垂線ＣＨの長さに着目した証明　（５　普通の証明(２)の変形）

角Ａが鋭角
角Ｂも鋭角
の場合



△ＡＢＣの外接円の中心は、各辺の垂直二等分線の交線であることを用いて

ＣＤ＝ａ／２　　ＯＤ⊥ＣＤ

円周角と中心角の関係から

∠Ａ＝∠ＣＯＤ

以上より　△ＣＡＨと△ＣＯＤは相似だから

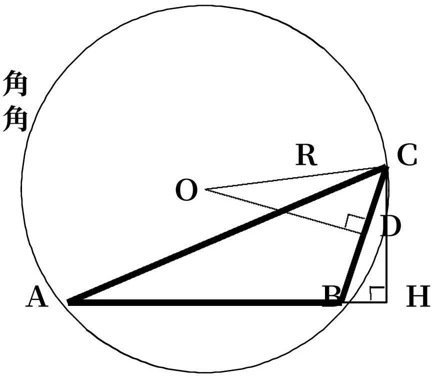
ｂ：ＣＨ＝Ｒ：ａ／２

ＣＨ＝ｂ sin Ａとして変形して

ａ＝２Ｒ sin Ａ

注①ＣＨ＝ａ sin Ｂ　としてもよい
注② sin Ａ=sin ∠COD=ＣＤ/ＣＯ　としてもよい。
注③ＣＯを延長して円周との交点をＥとするするとおなじみの図。この時も△ＣＡＨと△ＣＥＢとが相似で同様にできる。

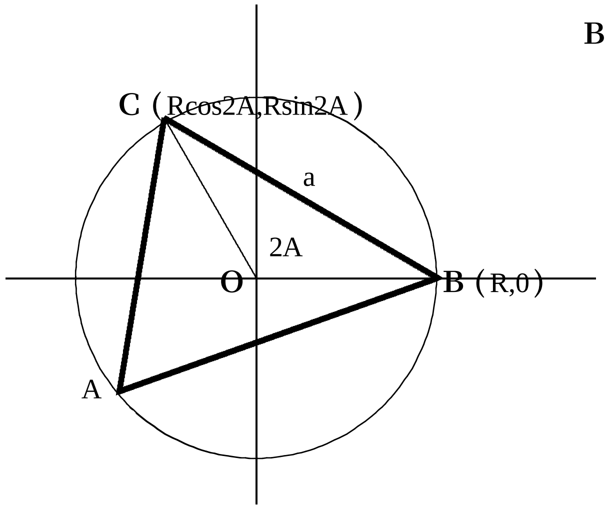
角Aが鋭角
角Bが鈍角
の場合



角Bが鈍角でも左のように考えると
CH＝b sin A　となり上の場合と
同じことになる。

注④ CH＝a sin（180°－B）でもよい。
注⑤ sin A =sin ∠COD=CD/CO としてもよい

3　中心原点、半径Rの円を用いる方法



BC間の距離に注目し最後に半角公式を用いる。

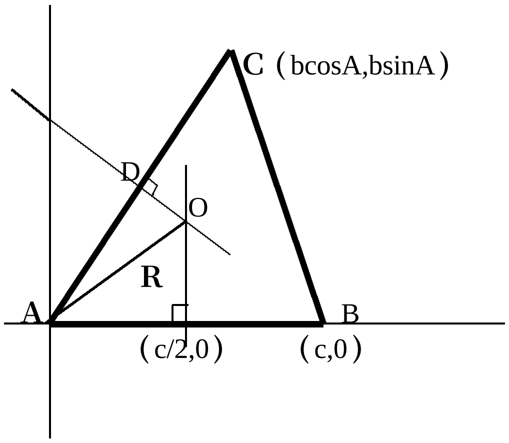
$$a^2 = R^2(1-\cos 2A)^2 + R^2\sin^2 2A$$

$$= R^2(1-2\cos 2A+\cos^2 2A+\sin^2 2A)$$

$$= 2R^2(1-\cos 2A)$$

$$\frac{a^2}{4R^2} = \frac{1-\cos 2A}{2} = \sin^2 A$$

4　図形と式を用いる方法



直線ACは　$y = \dfrac{\sin A}{\cos A}\,x$

直線DOは　$y = -\dfrac{\cos A}{\sin A}\left(x - \dfrac{b\cos A}{2}\right) + \dfrac{b\sin A}{2}$

Oの座標は
x=c/2 として　$\left(\dfrac{c}{2},\ \dfrac{b - c\cos A}{2\sin A}\right)$

三平方の定理
を用いて　$R^2 = \dfrac{c^2}{4} + \dfrac{(b - c\cos A)^2}{4\sin^2 A}$

$$= \frac{b^2+c^2-2bc\cos A}{4\sin^2 A}$$

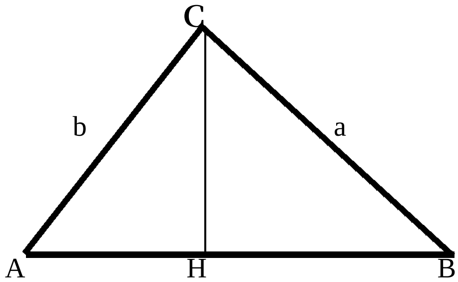
余弦定理より　$= \dfrac{a^2}{4\sin^2 A}$

5　普通の証明（2）

△ACHで　　CH＝$b\sin A$

△CHBで　　CH＝$a\sin B$

これより　$b\sin A = a\sin B$　よって　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$



6　面積の公式からの証明

△ＡＢＣの面積をＳとすると

$$2S = bc\,\sin A = ca\,\sin B = ab\,\sin C$$

全てを abc で割ると

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \qquad \therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

7　第２余弦定理からの証明[1]

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{a^2}{1-\cos^2 A} = \frac{a^2}{1-\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2} = \frac{4a^2b^2c^2}{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2} = \frac{4a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

角Ｂ、Ｃについても同様の結果になることによって証明できる。またこの式の最右辺に注目すると、外接円の半径Ｒをａｂｃで表していたり、ﾍﾛﾝの公式が見えて興味深い。
※ある参考資料[2]によるとﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｭが 1799 年に余弦定理から正弦定理を導いたとある。

8　第１余弦定理からの証明[3]

$a = b\cos C + c\cos B$　に　$C = 180° - (A+B)$　と　$c = a\cos B + b\cos A$　を代入して

$$a = -b\cos(A+B) + (a\cos B + b\cos A)\cos B$$

$$= -b(\cos A\cos B - \sin A\sin B) + a\cos^2 B + b\cos A\cos B$$　より

$$a(1-\cos^2 B) = b\sin A\sin B$$

$a\sin^2 B = b\sin A\sin B$　よって　$a = \dfrac{b\sin A\sin B}{\sin^2 B} = \dfrac{b\sin A}{\sin B}$　　$\therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

9　幾何学的証明　ﾖｯﾛｰﾊﾟにおける三角法の基礎をつくったﾚｷﾞｵﾓﾝﾀﾇｽ(1436-1376)の証明[4]

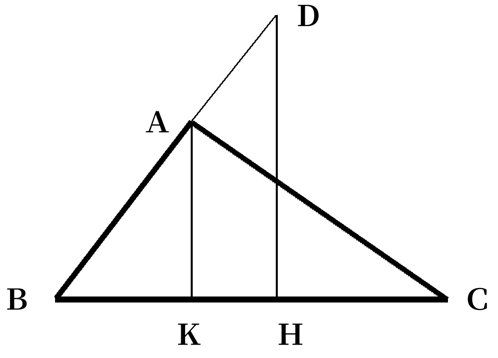
右図のようなＡＣ＝１なる△ＡＢＣにおいて、∠Ｂ＞∠Ｃのとき、ＢＡの延長上にＢＤ＝１となる点Ｄをとり、ＡおよびＤよりＢＣへ垂線ＡＫ、ＤＨをひく。このとき、

$DH = \sin B$、$AK = \sin C$

よって

$AB : AC = AB : BD = AK : DH$

$= \sin C : \sin B$



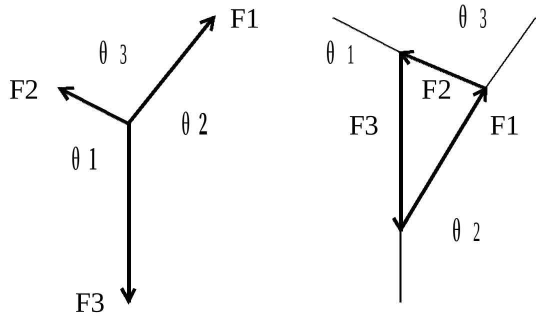
ラミーの定理[5]

３つの力 F1, F2,F3 が１点Ｏに働いてつり合っているとき、右図のように力の三角形は閉じるので、正弦定理より

$$\frac{F1}{\sin(180°-\theta 1)} = \frac{F2}{\sin(180°-\theta 2)} = \frac{F3}{\sin(180°-\theta 3)}$$

よって

$$\frac{F1}{\sin\theta 1} = \frac{F2}{\sin\theta 2} = \frac{F3}{\sin\theta 3}$$ （ラミーの定理）



力の合成に正弦定理を活用するという発想が興味深い。逆に力の合成をヒントに正弦定理を証明できないか考えてみたがうまくいかなかった。（余弦定理は証明できる）

数学史と正弦定理

ある参考資料[2]によると正弦定理は１１世紀にｱﾗﾋﾞｱのｱﾙ･ﾋﾞｰﾙﾆｰ(973 ～ 1048)が導いたとされている。一方余弦定理は、ユークリッド原論にその原形があるが、１６世紀にフランスのｳﾞｨｴﾄ(1540 ～ 1603)が余弦定理をはっきり定式化したとなっている。

もともと三角比は古代ギリシャのプトレマイオスの角に対する弦の長さの研究を起源とするようだが、それは現在のような三角比の概念ではなく、天文学の研究のために必要な数表としての扱いであったようだ。次に５世紀頃インドで半弦（弦の半分）の表がつくられ、それが現在の sin や cos の原形と考えられている。その後１０～１２世紀にアラビアにおいてさらに三角法が進展し、この時代に正弦定理が誕生した。しかしこの頃はまだ円との密接な関係からは抜け出してはいなかったようだ。

つまり正弦定理の”Ｒ”には、古代ギリシャから継承されていた”天文学の道具としての円と角との研究という歴史的な意味合い”が内包されていいるのではないか。また現代のように三角形の解法のために正弦定理を活用したのは、余弦定理の誕生とともに１５～１６世紀のヨーロッパからといわれている。

（数学史は奥が深くて、調べるには相当な労力が必要だとわかしました。誤りがあれば教えて下さい。）

私はこれまで、正弦定理が三角形の解法のための公式と考えていたので、突然の外接円の半径Ｒによる証明には常々違和感を感じていた。できれば省略してしまいたいとも思っていた。正弦定理を教える時になって突如出現しあっという間に消えていく外接円の半径Ｒは、三角法の歴史とその成立過程とを現代に伝える大変興味深いキーワードと読みとることもできる。

ふりだしに戻る

こう考えると、教科書に載っている普通の証明（本稿の１）は、指導の系統性や三角形の解法の側面からは若干違和感があるが、歴史的に重要な意味合いを含んだ興味深い証明であった。私はこの証明が大嫌いで様々な証明を探し求めたはずなのに、結局ふりだしに戻ることとなってしまった。

勝手な自己満足だが、何も知らないで漠然と教えることと、いろいろなことを知った上で教えるのでは多少なりとも違うはずである。

今度正弦定理を教える時は、Ｒを使わないで証明した後さりげなくＲに触れるか、それとも歴史を語りながら普通に証明するか、迷うと同時に楽しみである。

それで実際はこうしました。

１時間目	正弦定理の証明	歴史を語りながら「普通の証明１」で証明
２時間目	正弦定理の確認	三角比の表をつかって正しいことを確認
３時間目	正弦定理の利用	辺の長さを求める
４時間目	正弦定理の利用	角の大きさを求める　（内角の和が 180 °）
５時間目	まとめと演習	外接円の半径、および演習

参考文献

１）植野義明著	わくわく学ぶ数学Ａの考え方	増進会出版社	1997
２）保坂秀正他訳	ｸﾞﾚｲｾﾞﾙの数学史Ⅱ、Ⅲ	大竹出版	1997
３）数学解法事典		旺文社	
４）武隅良一著	数学史	培風館	1959
５）金田数正著	ひとりで解ける三角関数	内田老鶴圃	1996