

「数と式」 雑感

有朋高校単位制課程 大谷 健介

0 はじめに

今年度から新学習指導要領による「数学Ⅰ」がはじまりました。有朋単位制では、基礎学力に不安がある生徒が受講する「数学Ⅰ基礎」と、標準レベルの「数学Ⅰ」、そして2単位で履修を終える「数学特Ⅰ」の3種類の講座を用意し、生徒が講座のレベルを理解した上で、希望の講座を受講できるシステムとなっています。今回は、このうちの「数学Ⅰ基礎」の指導において「数と式」で味わった衝撃と実践についてのレポートです。

1 文字の式は乗法より加法・減法が難しい…か？

1回目の授業では「文字の意味」と「かけ算の表し方のルール」について話しました。

2回目の授業は「単項式と多項式」でメインは「同類項の整理」です。この辺りから様子はすでに怪しかったのですが…3回目の授業「多項式の加法・減法」では、かなり厳しい状況が見えてきました。

このところは、教科書（数研大判）では“①かっこをはずす ②同類項をまとめる”手順で計算することを示しており、次のような練習を経ながらひじょうに丁寧に説明しています。

練習 **12** 次の式のかっこをはずしなさい

$$(1) x^3 + (x^2 - x + 1) \quad (2) x^3 - (x^2 - x + 1)$$

次が

例 **10** (1) $3(x^2 + 2x + 5) = 3 \times x^2 + 3 \times 2x + 3 \times 5$
 $= 3x^2 + 6x + 15$

(2) $-2(3x^2 + x - 1) = (-2) \times 3x^2 + (-2) \times x - (-2) \times 1$
 $= -6x^2 - 2x + 2$

で、この辺りでやや絶望的な生徒が増えてきます。

このあと、この類の問題演習に終始するわけですが、わからない生徒はわからないまま、わかる生徒は時間をもてあます、指導教員は展開の流れの悪さと“わからない”空気に支配される教室の雰囲気押しつぶされる…最悪の授業です。

実は、この時間の前に基礎講座指導の達人の先生の経験で

「ここはさらっと進んで展開の公式のところできっちりやるよ」

と、アドバイスをいただいていたのですが、「教科書ではずいぶん親切に取り扱っているので、考え方を整頓しながら時間をかけてやってみます」と、半ば実験的に進めた事で痛い目に遭いました。

加法・減法で躓いたので、次の「多項式の乗法」はさらっと進んで、情報の公式でじっくりやろうと考え授業に臨みます。

ところが、指数法則による単項式×単項式は実にスムーズに理解され、ほぼ全員が上手に解いていました。加法・減法の状況から一変… 不思議な感覚でした。

2 書いてある式は理解できないが、数式は処理できる

しかし、その次に出てくるのは

例 13 (1) $2x(x^2 - x + 3) = 2x \times x^2 - 2x \times x + 2x \times 3$

$$= 2x^3 - 2x^2 + 6x$$

(2) $(2x - 1) \times 3x^2 = 2x \times 3x^2 - 1 \times 3x^2$

$$= 6x^3 - 3x^2$$

ですが、前回の反省から教科書に則る丁寧な解法はやめてさらっと進めることにしました。

$$2x(x^2 - x + 3) = 2x^3 - 2x^2 + 6x$$

と分配するので あとは頭の中で計算していきなり答えを書きましょう

とするシンプルな方法です。すると、うまくいきました。生徒らはこの数式の処理をちゃんと知っていました。結局、教科書に書いてあるかけ算の計算のところが分配の計算と同じものであると認識できなかったようです。考えさせられる部分ではありますが、大嫌いな数学の授業は、少しでも「できるようになる」心地よい時間でなければ、本校の場合、学習から逃避していく可能性があります。数式を正しく処理できることが最優先されるべき事…と言い訳をして進んでいきます。

3 たくさん問題を解けばラクをしたくなるのでは…—実践

次は乗法公式です。乗法公式では $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ を指導しても、なかなか利用してくれません。以前は、「乗法公式を利用して展開せよ」という出題にしたこともあります。公式を利用できる力は必要であると考えていたからです。しかし、2乗の公式にしても和と差の公式にしても生徒はすべて次のような分配法則の方法で式を展開します。

$$(x+a)(x+b) = x^2 + bx + ax + ab$$

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + ax + ax + aa$$

今年は生徒のその感覚を大事にして、そちらから公式を導く方法にしてみました。

教科書 例 17 (1) $(x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10$

$$= x^2 + 7x + 10$$

(2) $(x+2)(x-5) = x^2 - 5x + 2x - 10$

$$= x^2 - 3x - 10$$

練習 24 6問 → 同様の方法で解く → 解答 ここで気付くこと
いつも同じように解くことができるのだから

xの1次の係数は頭の中で計算していきなり答えを書くように指導します。

すると1行少なくすることができ、6問もあると6行もラクをすることができることを強調します。ただし、最初のやり方の法がしっくり来る生徒はずっとそうやって解いて良いこともあわせて強調します。

次にこの方法を用いて、教科書傍用問題集で5問練習します。

これで、生徒は公式を意識せずに、乗法公式を利用した展開をすることができました。

2乗の公式、和と差の積の公式についてもまったく同様に指導します。

4 反復することでクリアできる

粘り強く式の展開を進めていくと生徒がだんだんと自力で計算できるようになっていくことが実感できます。はじめは、同類項の整理もうまくいかなかったのですが、展開が終わる頃には非常によい状況です。正負の計算についても、「マイナスとマイナスの場合はマイナスを増やすイメージ」「プラスとマイナスの場合は引き算のイメージ」を繰り返すことによって身に付いていきます。結局、演習を繰り返すとこのあたりで「かっこをはずすこと」や「同類項を整理すること」は自然とできるようになるので、最初の多項式の加法・減法は同僚の先生が言うように“さらっと”進めば問題なかったわけです。

「中学校までは進度が速かったからわからなかった。ゆっくりやればみんなできるようになります。」を強調してあげるとみんな頑張るようになります。

5 必要以上に書いて因数分解する

最後にたすきがけの因数分解について書きます。ここに書く内容は多くの先生方が実践されていることなので、いまさらって感じがしますが、あえて教科書の扱い方を…

教科書 意味と手順を追って、いろいろなパターンから x の係数と一致するものが適している…と進んでいきます

例 23 $3x^2 + 5x - 2$ を因数分解しなさい

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & 2 \rightarrow 6 \\ 3 & \times & -1 \rightarrow -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & & -2 & & 5 \end{array}$$

$a=1, b=2, c=3, d=-1$ のときが適するので

$$3x^2 + 5x - 2 = (x+2)(3x-1)$$

他の大判教科書も概ねこのような感じです。 $a \sim d$ の値がわかれば良いというものです。

ですが、この「たすきがけ」自体ができて生徒はどの順に数字が入るのか迷います。たすきがけは正負のかけ算やたし算、ひき算を5回も考えなくてははいけません。しかも、1回で製鋼するとは限らずそこまで手一杯です。どの数字がどの場所かというところは後回しの知識です。

そこで x も符号も全部書いて、=(上の段)(下の段) と指導します

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x-1)(x+2)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 3x & \times & -1 \rightarrow -1 \\ x & \times & +2 \rightarrow +6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} 3x & \times & -1 \\ x & \times & +2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{ひき算する} \\ \text{イメージ} \end{array}$$

$$+5$$

これで、 x^2 の係数が1の場合でも

$$\begin{array}{rcccl} x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4) & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ x & \times & -3 & \rightarrow & -3 \\ x & \times & -4 & \rightarrow & -4 \\ & & & & \hline & & & & -7 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcccl} x & \times & -3 & \rightarrow & -3 \\ x & \times & -4 & \rightarrow & -4 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{マイナスを増やす} \\ \text{イメージ} \end{array}$$

と、できるようになります。

「たして-7、かけて12になる二つの数は？」と考えさせるよりも数段できるようになりますが、それも式の展開で数式をたくさん取り扱ってきて得られるものだと思います。

6 終わりに

数と式は走り込み、ロングトーン、キャッチボールライクな基礎練習で、生徒にとっては面白味に欠けるのでは…と考えて、以前は、四角形を使って図形を切り分けることが展開で、それをつなげることが因数分解…というような授業もしていました。しかし、そういう授業はあるレベルに達していないと、かえって思考を阻害することになるのだと考えました。

生徒が求めているのは、展開や因数分解の問題が出されてそれに反応できる力をつけること、だということが今回良くわかりました。

生徒が求めている部分が理解できて、それに応えることができれば、数学の時間が心地よいものとなっていくはず…と、何年経っても試行錯誤の毎日です。

レポート中の例や練習は

教科書 数研出版 「新 高校の数学I」 から引用しています