三角関数の加法定理をどう導入するか考えました

有朋高校単位制課程　大谷　健介

0　はじめに

有朋に赴任してから「数学Ⅱ」の講座を担当するのは3年ぶり3回目です。この講座は、進学のために数学Ⅱが必要であるか、数学が得意、好きといった生徒が集まってくる…ということになっています。

これまで、三角関数の加法定理は、「これはこういう式で、道具として便利なので覚えて使おう！」と言った具合でどうしてこの式が…といったようなことを授業で取り扱ったことはありませんでした。すみません。

しかし、ここのところ、毎回、数実研でレポート発表させていただいている身としては、「そのやり方はまずいだろう」という罪悪感に駆られ、少しだけでも「なぜ？」に触れる授業にしよう、という課題意識を持って挑むことにしました。

1　加法定理を示す

（1）オイラーの関係式を用いてまじめに示す先生

本校の単位制に指導主事訪問の際、以下の方法で加法定理を示した先生が、そのあとに教頭（教科は理科）に指導されていました。「これを教えて生徒はどこで使うんだ」っていう具合でした。しかし、この先生はめげずにそのあともこの方法を続けていたようです。

<加法定理と派生公式>

高校の範囲を超えるが、次の公式を導入する

$e=2.718281828459045\cdots$(無理数)とし　i:虚数単位　とすると

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　(オイラーの公式)を使って加法定理を示す。

$e^{i(\alpha\pm\beta)}=\cos(\alpha\pm\beta)+i\sin(\alpha\pm\beta)$ ・・・①　（定義より）

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}&=e^{i\alpha}\cdot e^{\pm i\beta}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot(\cos(\pm\beta)+i\sin(\pm\beta))\\
&=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta\pm i\sin\beta)\\
&=\cos\alpha\cos\beta\pm i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta\pm i^2\sin\alpha\sin\beta\\
&=(\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta)\quad\cdots②
\end{aligned}
$$

① と②の実部と虚部を比較して

（虚部）　$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$　（正弦の加法定理）

（実部）　$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$　（余弦の加法定理）

確かに、なんの前触れもなく突然 e が出てきたり、オイラーの関係式が出てきたりと、その時の生徒もなんのこっちゃ‥という感じでした。

ところが、啓林館の教科書では三角関数の章の始めに読み物としてこのことを紹介していてこの先生はとても喜んでいます。

> （啓林館の教科書　「第３章　三角関数」の中表紙のページから）
>
> オイラーは、１８世紀数学史を飾る数々の業績を残し、虚数単位ｉを最初に用いた数学者であった．この虚数単位ｉを用いると、三角関数 $y=\sin\theta, y=\cos\theta$ と指数関数 $y=e^x$ ($e=2.71828\ldots$ は自然対数の底）の間に $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ という関係が成り立つことを発見した．この式はオイラーの関係式と呼ばれ、数学史上に輝く偉大な発見であった．とくに、$\theta=\pi$ とおくと、右のように、無理数ｅ，πとｉを結びつける単純で美しく神秘的な等式が得られる。
>
> $$e^{i\pi}=-1$$

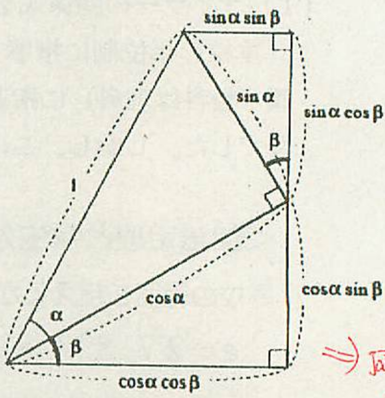
きょうお話ししたいのはこのことでは無くて…

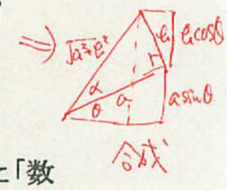
（２）数実研（数学のいずみ）で探すのが賢明

こういうときは、やはり「数学のいずみ」が頼りです。木村先生（釧路江南高校）が２年前に発表された「授業内で無理なく紹介できる三角関数の加法定理の証明～<u>なぜ成り立つのかを実感できる学習をめざして</u>～」を読ませていただき、題名の下線部分に「うんうん」とうなずきながら、今回はこれを使わせていただこう…と考えて自分なりにプリントを作成して、授業の準備を完了しました。→後の方のプリントです。

その時、「あ、数学玉手箱も覗いておこう」と何となく思ってにいってみると更新情報に「加法定理の図的証明」が今年の１月にアップされているとあり…。

普段からきわめて勉強不足の私は、「こんな方法があったんだー！！」と、ただただ感心するばかりで、これに変更ということで古いカレンダーを切り張りして教材にしてみました。

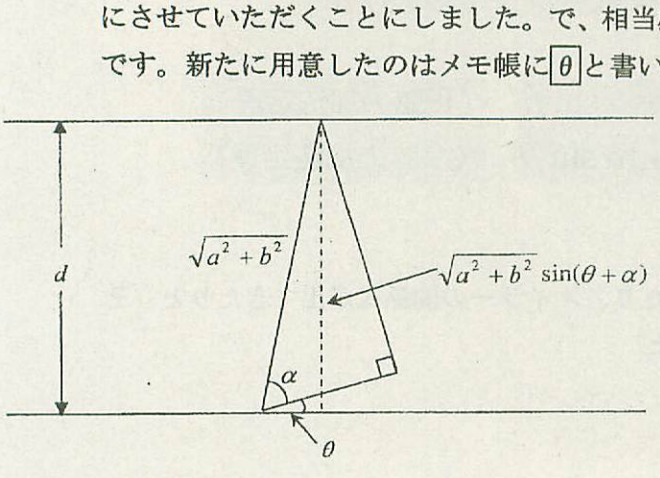


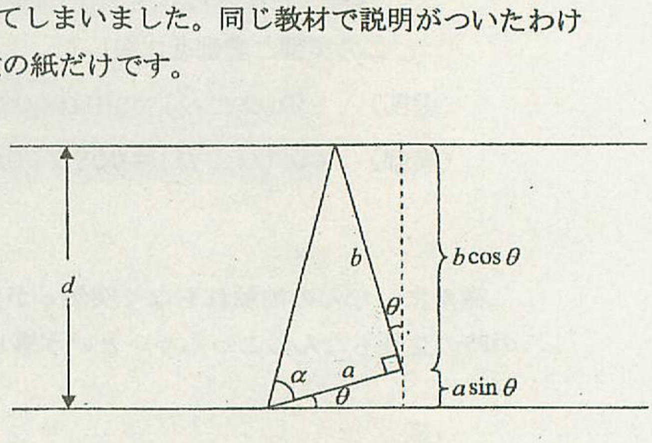


２　三角関数の合成に派生

加法定理でやってしまった以上、三角関数の合成でもやらないわけにはいかないと思い、また「数学のいずみ」に頼りました。ここのテーマでは、正田先生（札幌西高）の「三角定規で幅を測る～三角関数の合成から」をクリック。「指定したアドレス（ＵＲＬ）にはファイルやディレクトリは存在しません」……（￣▽￣；）

しかし、ここ数年勉強熱心で数実研皆勤の私は、しっかりと紙の資料をファイルしており、参考にさせていただくことにしました。で、相当感動してしまいました。同じ教材で説明がついたわけです。新たに用意したのはメモ帳に $\boxed{\theta}$ と書いた１枚の紙だけです。

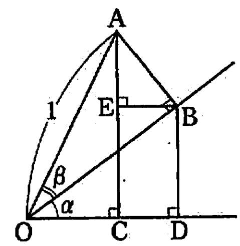




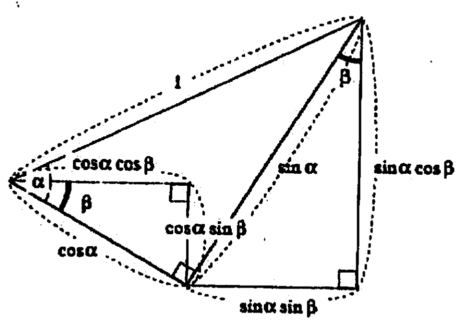
3　参考までに

この方法について教科書では「章末問題」で取り扱っていました。少し形が違っていますが…

2. ☐ α, β, $\alpha+\beta$ が鋭角のとき，右の図で $\angle\mathrm{BAE}=\alpha$ となることを確かめ，AC, AE, BD の長さを α, β で表して，
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
が成り立つことを示せ．　教p.117



また、「数学玉手箱」では引き算の方の図も示されています。



4　おわりに

このあと、中村先生の「三角関数の合成のちょっとした小手技」も読ませていただきました。公式に出てくるａとｂの表すものは「始線」であるということ、また、加法定理と合成の関係は、ちょうど式の展開と因数分解の関係に似ている、というあたりはとても勉強になりました。

この指導のしかたでは、「ａとｂははじめに考える三角形の底辺と高さ」ということになりましょうか。今回は、数学のいずみから自分の授業改善に役立てられた体験と、いろいろな先生方のレポートを自分なりに結びつけていけたところに収穫があったと自己満足に浸っています。

次の先生方の文献を授業研究に使わせていただきました

木村尚士先生　「授業で無理なく紹介できる三角関数の加法定理の証明」

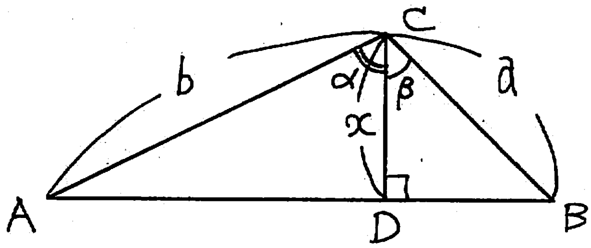
正田隆之先生　「幅を測ろう　～三角関数の合成～」

早苗雅史先生　「加法定理の図的証明」

中村文則先生　「三角関数の合成のちょっとした小手技」

（そのほか　啓林館「高等学校　数学Ⅱ　改訂版」から、問題等を引用しました）

「三角形の面積と三角関数の相互関係」から**「三角関数の加法定理」**を導く

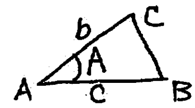


まず、$\cos\alpha=$ $\boxed{\quad\quad}$ より　$x=$ $\boxed{\quad\quad\quad\quad}$

$\cos\beta=$ $\boxed{\quad\quad}$ より　$x=$ $\boxed{\quad\quad\quad\quad}$　と表すことができる。

で、△ABCの面積＝△ACD＋△BCDなので

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ を利用して



次に、この$\boxed{1}$の１のβに$(-\beta)$を代入して

$\sin(\alpha-\beta)=$

p106の「$-\theta$の三角関数」より $\sin(-\theta)=$ $\boxed{\quad\quad\quad}$　$\cos(-\theta)=$ $\boxed{\quad\quad\quad}$ だから

$\sin(\alpha-\beta)=$

さらに　p107の「$\theta+\dfrac{\pi}{2}$の三角関数」より $\cos\theta=$ $\boxed{\quad\quad\quad}$　だから

$\cos(\alpha+\beta)=$

同じように $\sin(\beta+\dfrac{\pi}{2})=$ $\boxed{\quad\quad\quad}$　$\sin(\beta+\dfrac{\pi}{2})=$ $\boxed{\quad\quad\quad}$ より

$\cos(\alpha+\beta)=$

最後に　この$\boxed{2}$の１のβに$(-\beta)$を代入して

$\cos(\alpha-\beta)=$