ピタゴラス三角形の内接円

有朋高校単位制課程　大谷　健介

0　はじめに

啓林館の「高等学校　数学A」の教科書から

例7　$a=3$，$b=4$，$c=5$ の直角三角形 ABC の内接円の半径 r

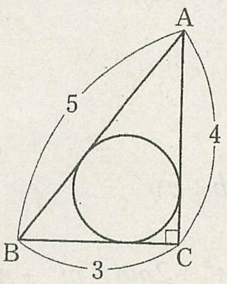
△ABC の面積は，

$$\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$$

であるから，

$$\frac{1}{2}(3+4+5)r=6$$

よって，　$r=1$



3 平面図形

問11　$a=5$，$b=12$，$c=13$ の直角三角形の内接円の半径を求めよ．

この〔例７〕は一昨年のセンター試験でも出題された問題です。

〔例７〕→〔問 11〕と解いたところ、内接円の半径は順に　r=1　r=2　となりました。

さらに、(a,b,c)=(8，15，17)の場合も解いてみると　r=3　となったので、同僚のベテランの先生にこのタイプの問題は内接円の半径に何か法則性があるか尋ねたところ、「そういうのは無いのでは…」という回答でしたので、２人でいろいろと調べました。それが今回のレポートです。

1　ピタゴラス三角形

上の例題のように、３辺が整数となるような直角三角形をピタゴラス三角形といいます。

これは、

３辺　$a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2$　とおくと　$a^2+b^2=c^2$　をみたす直角三角形です。

ただし、m,n　は互いに素で、一方は偶数、もう一方は奇数とします。

（さらに、自動的に $m>n$ である）。

例えば、(m.n)=(2,1)のとき(a,b,c)=(3,4,5)　で　内接円の半径 r=1

=(3,2) のとき　=(5,12,13)　で　r=2

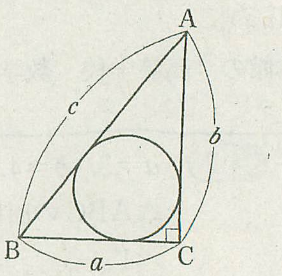
=(4,1)　=(15,8,17)　で　r=3

→　以下、時岡先生の基礎学力講座「ピタゴラス数」に整頓された表があります。

(m,n)=(11,4)まであります。

2　内接円との関係

さて、ここから内接円の半径について三角形の面積から切り込みます。



直角三角形の面積ですので、

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}ab \\
&= \frac{1}{2}(m^2 - n^2) \times 2mn \\
&= mn(m+n)(m-n)
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}(a+b+c)r \\
&= \frac{1}{2}(m^2 - n^2 + 2mn + m^2 + n^2)r \\
&= \frac{1}{2} \times 2m(m+n)r \\
&= m(m+n)r
\end{aligned}
$$

したがって

$$mn(m+n)(m-n) = m(m+n)r$$

$m \neq 0, m+n \neq 0$　より　　$\underline{n(m-n) = r}$　となります

例えば、(a,b,c)=(21,20,29) のとき　(m,n)=(5,2) なので、r=2×(5-2)=6

=(105,88,137)　のときは(m,n)=(11,4)なので、r=4(11-4)=28

とかんたんに求めることができます。

3　おわりに

「ピタゴラス三角形」や「ピタゴラス数」については、インターネットで調べてみると、たくさんの方々が取り上げられていました。

扱う数が整数だけで、なおかつ神秘的というのは、生徒へ提示するものとしても、魅力的で考えやすい題材ではないかと思いました。授業でもどこかのタイミングで取り上げてみたいと思います。