なんとなく納得して鈍角の三角比へ

有朋高校単位制課程　大谷　健介

0　はじめに

前回の数実研で「鋭角の三角比」の実践についてレポートを書きました。その際に、鋭角から鈍角へ拡張するときの進め方がなかなかうまくいかない、と言うことを書きました。生徒にしてみると、それまで直角三角形を何度も描いては、辺の比を考えて三角比の値を求めたり、辺の長さを求めたりということを繰り返し、やっとできるようになったところで、鈍角の三角比に入ると、突然、座標平面が出てきて、半円が描かれ…“あらためて定義する”とされるので、「なんだろう」となってしまうのも無理はないかもしれません。

今回は、この釈然としない（であろう）、鈍角への流れをなんとかしたいと考え、思いつきでやってみたことをレポートします（概ね私のレポートはいつも思いつきなのですが…）。

1　教科書の扱い方

「新編」以上のレベルの教科書では、一様に「これまでは0°から90°までの三角比について学んできた。ここでは、角の範囲を0°から180°まで広げて～」として、一般的な定義へと進みます。その際に、「これまでの考え方が損なわれないように」「あらためて定義する」ことに注意して作られているように見えます。

それを具体的に表現しているのが「大判の教科書」で、次ページのように直角三角形を座標平面上に乗せて、鋭角からの拡張の流れを良くするように配慮されています(NHKの高校講座も同様)。で、これら2つの教科書とも、まったく同じ直角三角形を扱って説明をしておりました。なかなかおもしろいシーンです。

なお、この東京なんとかという教科書は、難易度の一番高い教科書でもこれと同じように表現していて、親切心を感じました。

結果、新編以上の教科書を使用する高校では、鈍角への拡張が、突然「あらためて定義する」ことによって、十分にうまくいくと言うことなのだと悟りました。

そこでもしかしたら、章のはじめから座標平面で三角比を定義している教科書があるかも？と調べてみましたが、見る限りではそのようなものは一冊もありませんでした。それは、学習指導要領解説に「鋭角について、正弦、余弦及び正接を直角三角形の辺や角の大きさとの間の関係として導入し、身近な事象と関連づけてそれらの意味を理解させるとともに、その有用性を認識させる」と明記されていることによると考えられます。

（資料　～大判教科書の鈍角への導入）

←実社

図1の直角三角形OPQを，図2のようにx軸，y軸で定められる平面に置いて，30° の三角比を考えよう。

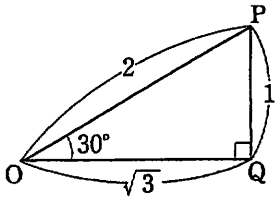


図1

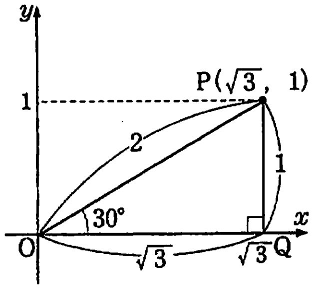


図2

⇐点Pを座標で表す。

⇐点Oを原点に，辺OQがx軸上になるように置く。

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \sin 30^\circ = \frac{\text{P の } y \text{ 座標}}{\text{OP}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\text{P の } x \text{ 座標}}{\text{OP}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan 30^\circ = \frac{\text{P の } y \text{ 座標}}{\text{P の } x \text{ 座標}}$$

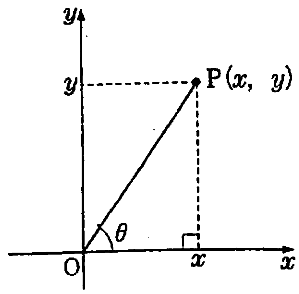
OP＝2

P（$\sqrt{3}$，1）

x座標　y座標

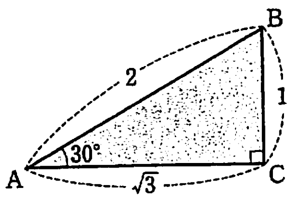
上の例のように，座標を用いると，サイン・コサイン・タンジェントは，斜辺に相当するOPの長さ，点Pのx座標，y座標を使って表すことができる。

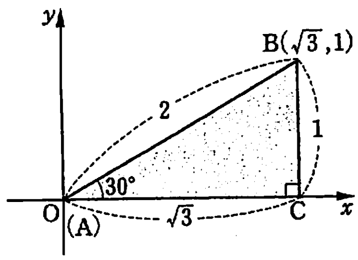
そこで，座標を用いたこの新しい考え方で，90° を超える角についても三角比を決めることにする。



左下の図の直角三角形に対し，右下の図のように座標軸を定めると，点Bの座標は$(\sqrt{3},\ 1)$となる。

東社→





このとき，座標を使うと

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\text{B の } y \text{ 座標}}{\text{OB}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{B の } x \text{ 座標}}{\text{OB}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{B の } y \text{ 座標}}{\text{B の } x \text{ 座標}}$$

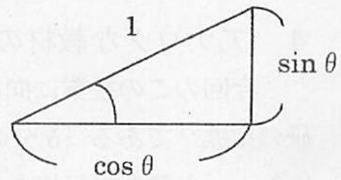
とみることができる。

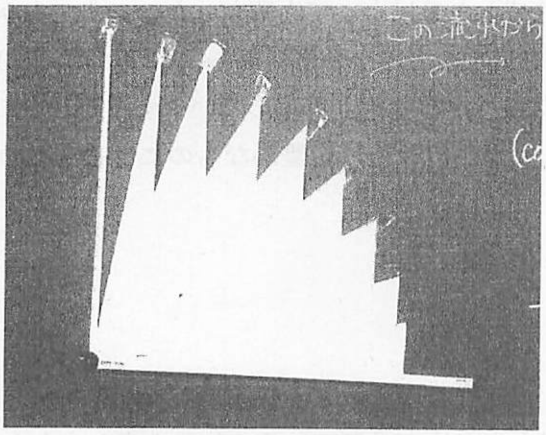
2　鈍角の三角比をどう考えるのが自然かを問う

今回の実践は、栃木県総合教育センターのサイトを参考にしました（ざっくりと簡素化してまねしました）。ここでは、いわゆるθを10°単位で大きくしていった直角三角形を８枚生徒に示すことによって90°や100°の三角比をどう考えるのが自然かということを問うものです。

ここで基本となる考え方は、斜辺が１の直角三角形の高さが$\sin\theta$であり、底辺の長さが$\cos\theta$であると言うことです。

ですから、頂点Ａを重ね合わせて並べていくことが自然です。





こうして並べていくと、10°単位に並べた直角三角形でも十分に円を描いている様子を見て取ることができます。したがって90°のときは縦にまっすぐな線になってしまうし、100°はそれよりも左側に描かれるのが自然な流れだとなっていくわけです。そうして、100°を取ったときは直角三角形ではなくなってしまうことも十分に理解することができます。

では、100°の三角比の値（特に、$\sin 100°$と$\cos 100°$の値）はどうなるか、と言うことにつながっていきます。ここで、座標平面を用いても、もう問題ないと思いますが、私は「例えば飛行機が飛んでいくときは…飛んでいく方向が反対でも同じ角度で飛び立つであろうから、高さは変わらない…でも、飛んでいく方向が違うのだから“底辺”を同じととらえるのはどうなんだろう」というところからマイナスの考え方を引き出したい、と…実際はなかなか出てこないのですけど。

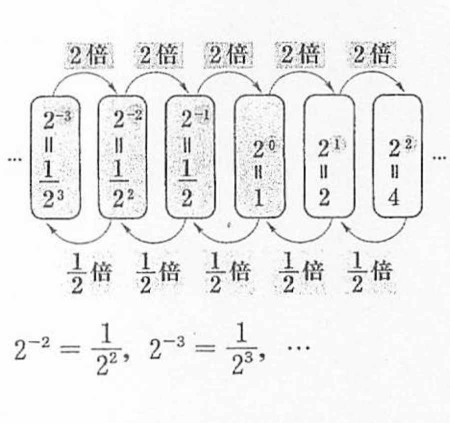
こうして、座標平面上に乗せていくことへと導いていきます。

3　10°ずつ増やすデジタルな考え方

一定の値をとってものごとを拡張していく流れはほかの単元でも使うものです。

例えば、指数を拡張するときは、こんな感じで０や負の指数を納得できる形で定義します。

指数nの増減と2^nの値の変化について，上の例と同様の関係が成り立つように，０や負の整数の指数を次のように定める。



$$2^0 = 1,\ 2^{-1} = \frac{1}{2},\ 2^{-2} = \frac{1}{2^2},\ 2^{-3} = \frac{1}{2^3},\ \cdots$$

要は「このように定義すると自然だよね」と言うことが理解できることが「なんとなく納得できた」につながるのだと思います。

4　アナログな教材のこと

今回のこの授業に向けて、9枚の直角三角形を作るのに100分を費やしてしましました。数実研の指標？である「5分の教材は5分で作る」から著しく逸脱した行為であり、すべてできたときにちょっと残念な気持ちになりました（しかし、作成した日はとっても暇だったのです。すみません)。でも、三角定規の美しい直角三角形くらいしか見たことのない生徒たちは実際には、「10°の直角三角形とはこんなに低いものなのか」と思ったのではないかとも感じています。そして、こういったアナログな教材が、実は数学（の授業）を、(少しだけ）色彩豊かなものにする一つの手段ではないかと思っています。

5　おわりに

かくして、これまで「図形と計量」の単元において、私の中の最大の課題であった鋭角から鈍角の三角比への流れは、生徒がなんとなく納得してくれたことで、無事にその解決を見たこととなりました。最大の課題だった割には、うまくいった感じが自分の中にはあってこれまで努力が不足していたということになります。

本当は、これらの直角三角形を生徒に渡して「90°や100°の三角比をどう考えるのが自然か」というテーマをもとにグループワークなどして深められると一層良いのですが、そういう学習集団に育成できなかったので、そこは次の課題かと思います。

ともかくこれで、「なぜ、三角比の定義が座標平面や半円で示されるのか？」という思い出したような疑問に関しては「直角三角形をたくさん重ねて見せたじゃない」で、すんでしまうこととなりました。その内容を覚えている必要はなく、「そういえばこんなことをやっていた」という体験と、定義をきちんと理解してくれることで十分だと思っています。たぶん、数Ⅱの三角関数を教える頃までは覚えていてくれているはずです…