三角形の相似で切り込む「鋭角の三角比」

有朋高校単位制課程　大谷　健介

0　はじめに

三角比の学習が進んでいくと、「結局、サインコサインって何のことだっけ？」という生徒の声を聞くことがあります。確かに、相互関係から正弦・余弦定理へと進んでいき、少し躓いてしまうと、つい「サインコサインって…」と考え直してしまうかもしれません。その対策のために、サインやコサインを簡単な言葉で身につけてもらうことをねらいの一つとして、私はいつもこの方法から三角比を始めることにしています。

今回は、その切り口から始め、さらにもう少し内容を工夫して授業を進めていった結果、一部分は割と効果的な内容の実践となったように思いますので、きょう発表することにしました。

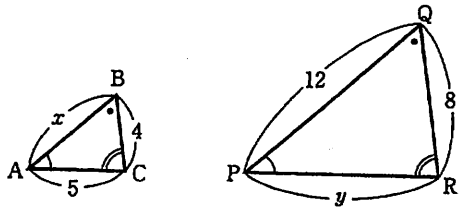
1　準備

直角三角形の性質とか、三平方の定理とか準備するものはいろいろとありますが、ここでは特に

相似な三角形では対応する辺の比はすべて等しい

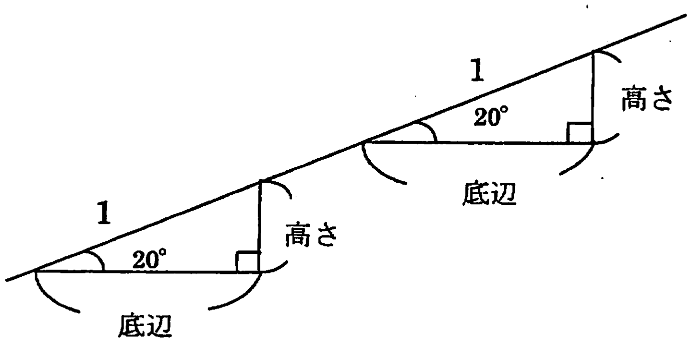
ことを重要視して、次のような問題を練習します。

〔例〕△ABC ∽ △PQR のとき、x、y の値を求めよ。



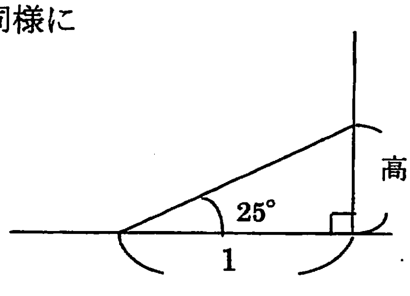
2　三角比の切り口

「昔々、ピラミッドを作るために古代エジプト人は次のことに気がつきました…たぶん」



斜辺が 1 のとき、底辺と高さが一定
(大きさは傾斜角度によって決まる)
調べてみると…
高さ＝0.3420…←ずっと続く
底辺＝0.9397…←ずっと続く
これらに名前をつけることにした。

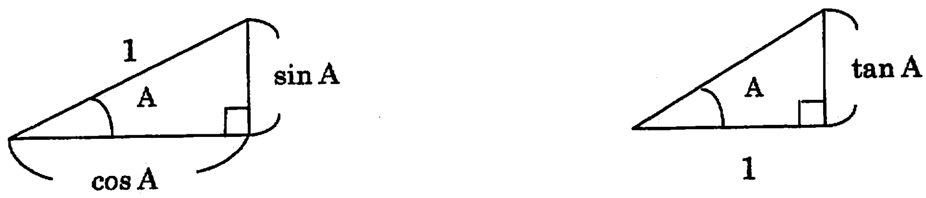
同様に



底辺が 1 のとき、高さが一定
(大きさは傾斜角度によって決まる)
調べてみると…
高さ＝0.4663…←ずっと続く
斜辺は知る必要なし…たぶん
これにも名前をつけることにした。

3　鋭角の三角比

「それらの名前は次のようなものです。角度によって、高さや底辺の大きさが決まるので、sin や cos のあとに角度をつけて表現することにしました…たぶん」



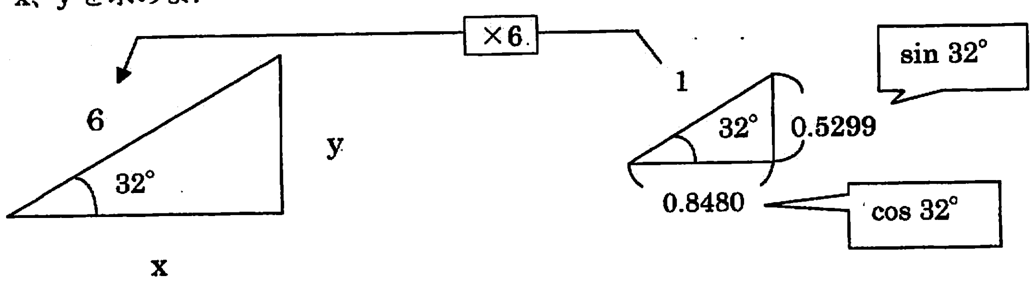
と定める。

では、Aの角度によって、直角三角形の高さや底辺はどのくらいになるだろう？

→　教科書巻末の表の利用につなげる

4　「三角比の利用」に活用する

〔例題〕x、y を求めよ.



斜辺が 6 倍となっているので、高さも底辺もそれぞれ 6 倍となればよい。

$x = 0.8480 \times 6$,　$y = 0.5299 \times 6$

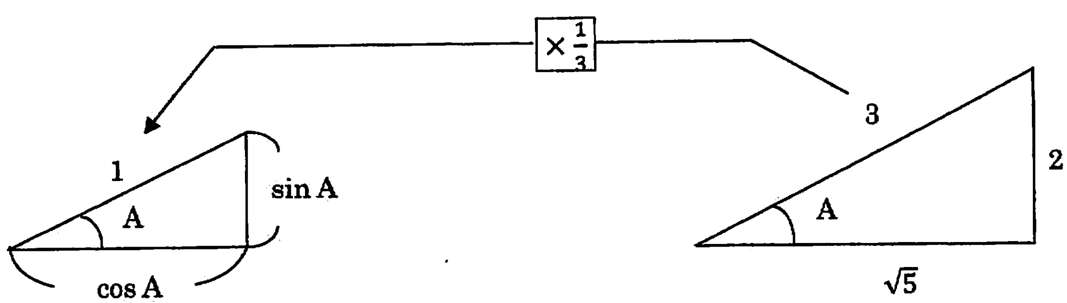
このあと、演習によって、「高さ＝サインの値×斜辺、底辺＝コサインの値×斜辺」に気づく生徒も出てきますが、あえて一般化（公式）には触れず、三角形の相似で考えていきます。

タンジェントについても底辺の比の比較になるだけで、あとは同様にとらえることができます。

> ここの学習内容は、$y=r\sin\theta$，$x=r\cos\theta$　あるいは　高さ＝斜辺×sinA　あたりで表現し、処理するところです。しかし、「式変形」が苦手な生徒には、新しい公式が出てきたような感覚になり、理解の足かせになるように感じていました。
>
> ここでは、巻末の表と三角形の相似を利用しながら進めることで定着度が増しました。

5　三角比の定義につなげる

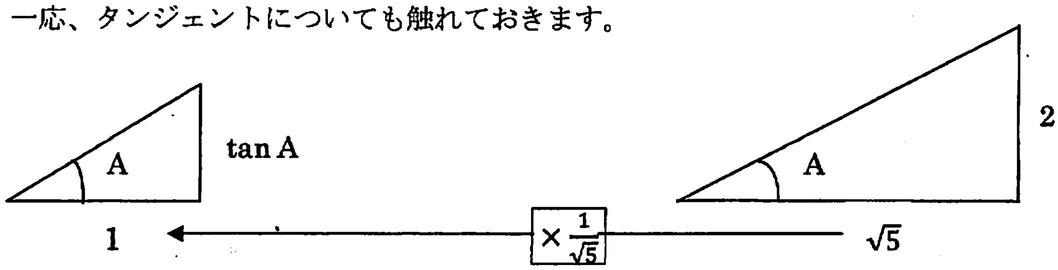
この考え方で進めていくと、辺の比の三角比が次のように考えられます。



すると左側の直角三角形の高さ $= \sin A = 2 \times \frac{1}{3}$, 底辺 $= \cos A = \sqrt{5} \times \frac{1}{3}$ となり

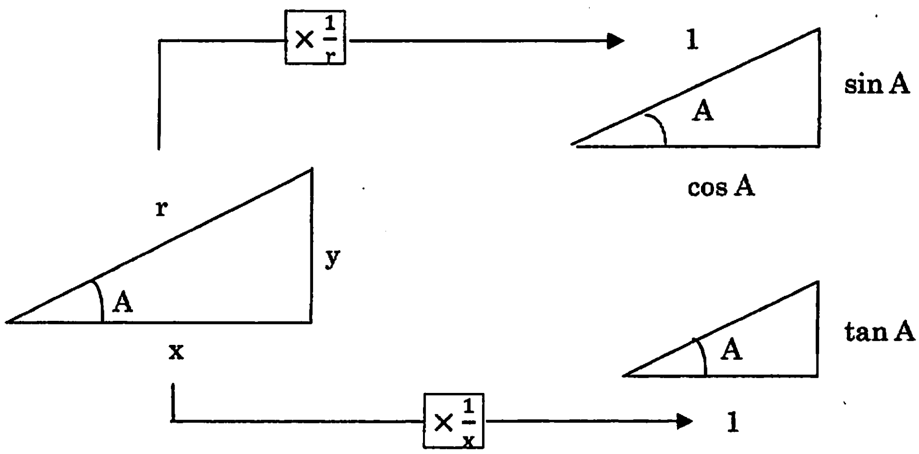
$\sin A = \frac{2}{3}$, $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$ とわかる。

一応、タンジェントについても触れておきます。



同様に、左側の三角形の高さ $= \tan A = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}}$ となり、$\tan A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ とわかる。

こうして、教科書の定義につなげることができます。



こうして、$\sin A = \frac{高さ}{斜辺}$ $\cos A = \frac{底辺}{斜辺}$ $\tan A = \frac{高さ}{底辺}$ と表されます。

なぜ、この形が大事かというと、このあと、「A が 90° を超えたときにも三角比の考え方を使うととても応用できるからです。」と説明します。　←まやかし…

6 おわりに

6×sin25° よりも 6×0.3420 のほうが、具体的で何をしているのかよくわかります。「結局サインって何だっけ？」とならないようにするための方法がこれなのですが、鈍角に拡張するときにうまく説明ができません（今のところ）。今年は、5 の部分が新しい試みだったのですが、分数が出てくるからか、少し難しかったようです。こういう教材がアクティブ・ラーニングの 1 つに発展させられると理想的かと考えています。