反省からの「数と式」の実践

有朋高校単位制課程　大谷　健介

0　はじめに

昨年度は、「数学Ⅰ基礎」の指導における授業の実践について、４回のレポートを発表させていただきました。特に、数と式においては、生徒の基礎学力に対応できる授業を展開しようと考え、試行錯誤しながら時間をかけて丁寧に指導することを心がけてきました

…が、今年度はふたを開いてみると昨年度の受講生徒よりずっとできが良い。授業スタート時、昨年度の流れを踏襲して、始めてみましたが思いのほか、時間が余っている生徒が多く…これはもう少し考え直さないと飽きてしまって可哀想…というよりももっと高いところに目標を置かなければ、ということになりました。昨年度の実践をベースに少しだけでも変化をつけて、指導のレベルアップを図ろうと取り組んでいる内容について、少しだけお話しします。

1　たすきがけを意識させる式の展開

乗法の公式は、$(a+b)^2$，$(a-b)^2$，$(a+b)(a-b)$，$(x+a)(x+b)$ と続いていき、つぎに公式の５番　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$　が出てきます。この扱いは教科書ではこんなかんじになっていて、「公式使う意味～」となりかねない。結局、分配法則に戻るような指導になってしまいます。

展開の公式4

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

［展開の公式 $(ax+b)(cx+d)$］

例 18

(1)　$(2x+1)(3x+4)$

$=(2\times3)x^2+(2\times4+1\times3)x+1\times4$

$=6x^2+11x+4$

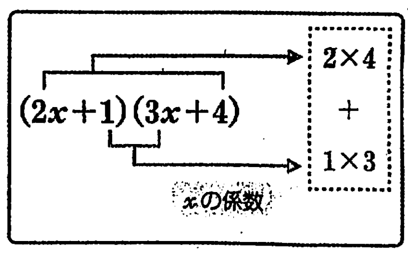
$$\begin{array}{rr} & 2x \quad +1 \\ \times) & 3x \quad +4 \\ \hline & (2\times4)x+1\times4 \\ (2\times3)x^2 & +(1\times3)x \\ \hline \multicolumn{2}{r}{(2\times3)x^2+(2\times4+1\times3)x+1\times4} \end{array}$$

(2)　$(2x-1)(3x+4)$

$=\{2x+(-1)\}(3x+4)$

$=(2\times3)x^2+\{2\times4+(-1)\times3\}x+(-1)\times4$

$=6x^2+5x-4$



練習 25　次の式を展開しなさい。

(1)　$(3x+1)(x+2)$　　(2)　$(2x+1)(x-3)$

(3)　$(x-1)(2x-3)$　　(4)　$(2x+3)(3x+4)$

(5)　$(5x-2)(3x+1)$　　(6)　$(4x-1)(2x-5)$

もっと練習しよう！
p.30　確認問題 6

この公式の５番はたぶん、たすきがけの因数分解の逆演算として、登場させているのだろうと思ったので、たすきがけ風に「こんなからくりですよ」と指導してみました。

$(2x+1)(3x+4)$

$2x$	$+1$	$\rightarrow$	$+3x$	
$3x$	$+4$	$\rightarrow$	$+8x$	(+
$\downarrow$	$\downarrow$			
$6x^2$	$+4$		$+11x$	

実際には生徒は分配を使って展開をするのですが、ここでたすきがけのもとを見せておくことで、後の因数分解への伏線を敷くことができました。ちなみにこの方法で、公式５を示している教科書がないか調べたところ、実教出版の大判教科書が、分配と併せて扱っていました。

2　くくる公式は２本示す

くくる公式は次のように示すことにしました。

〈因数分解の根本〉

［１］ $ma+mb=m(a+b)$　← mでくくる

［２］ $na-n\ =n(a-1)$　← nでくくる

教科書では、［２］の式はひきざんも同様であることを示す式として、［１］の符号を変えたものが示されていますが、そのままではおもしろくないことと、nでくくったときに後ろの項が「なくなってしまうのではなく１が残る」ことをあらかじめ見せておくのがよいのではないかと思い、公式化してみました。転ばぬ先の杖ではありますが…

3　因数分解の失敗

① ほとんどの生徒がわかっていた…

$x^2+7x+10$

「かけて 10 になる２つの数は… 2 と 5、－２と－5、1 と 10、－１と－10 の４つあるのですが、この組のうちたすと +7 となるのは……くどくど……」とものすごく丁寧に説明していたのですが、ほとんどの生徒はすでに知識として持っていて、ただただ説明が冗長になってしまう授業を展開してしまいました。しかも、次のたすきがけの因数分解に入ったとき、「どうせまたわかっている話だろう」と構えられてみんなあんまり説明を聞いていなかったため、机間巡視が大変…有朋単位制は難しい。

②ステップを踏むつもりが…

次にたすきがけですが、受講生徒全員にマスターしてもらいたい思いで、２枚のプリントで段階を踏むことにしました（資料参照）。

１枚目はx^2の係数を１とその数に分ければよいように作りました。生徒に成功体験させたかったからです。で、この思いが完全に裏目にでました。１枚目を終えた生徒は「x^2の方は、１とその数で分ければいいんだ」と思い込んでしまい、２枚目が（１）から躓いて前に進まない…しかも１０人以上…落とし穴でした。机間巡視でフォローして思いのほか時間を要してしまいましたが、そこは９０分授業の強み、なんとか事なきを得ました。

４　平方根の理解

平方根については、昨年、「定義から始めようとすると$\sqrt{\ }$嫌いが増える」という話をしました。その反省から、今年は次のように展開しました。

まず、$\sqrt{a}$ ← プラスの数字　　なので　　$-\sqrt{a}$ ← マイナスの数字

で、$\sqrt{\ }$ってなにかというと

$$\sqrt{1}\times\sqrt{1}=1 \quad \sqrt{2}\times\sqrt{2}=2 \quad \sqrt{3}\times\sqrt{3}=3 \quad \sqrt{4}\times\sqrt{4}=4 \quad \sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$$

$$\sqrt{6}\times\sqrt{6}=6 \quad \sqrt{7}\times\sqrt{7}=7 \quad \sqrt{8}\times\sqrt{8}=8 \quad \sqrt{9}\times\sqrt{9}=9 \quad \sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$$

$$\dots\boxed{\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a}$$

と決めたものなのです。

ここまではしっくりきています。ここから「平方根」の言葉の意味と結びつけなければいけない、ここがひじょうにむずかしい。「<u>このように２回かけるとａになる数を(ａの)平方根といいます</u>」ここでまた$\sqrt{\ }$嫌いを減らせないことになってしまいます。「２乗するとａ」とか「平方根」という言葉はあまり使わず、数式で追っていく方が良いのかもしれない…と感じました。

このあと、ルートの計算を進めていきましたが、なかなか集中力を保ちつづけた授業が展開できませんでした。

５　終わりに

これまで、授業の準備をするときは昨年度のものをできるだけ見ないでノートを作ろうと考えていました。手抜きをしてしまうような感覚と、前年度と同じ授業になってはいけないと思っていたからです。

しかし、今年から少し考えを変えることにしました。それは、「昨年のものに上積みをしよう」ということです。前年までのものを参考にしないということはある意味「リセット」していることとなり、せっかく思いついた良い方法を１年限りにしないとか、数年前の導入はなかなかいいねーということを大切にしていこうと思いました。少しずつ変化をつけながら、もっと良い方法を見つけていけるようがんばりたいと思っております。

たすきがけの因数分解　1

HR:　　氏名:

■　次の式を因数分解しなさい

[例] (1)　$3x^2+7x+2$

(2)　$2x^2-3x-9$

[練習] (1)　$3x^2+4x+1$

(2)　$3x^2+8x+5$

(3)　$2x^2-5x+2$

(4)　$3x^2-10x+3$

(5)　$5x^2+11x+2$

(6)　$2x^2-7x+6$

(7)　$5x^2-6x-8$

(8)　$2x^2+5x-3$

(9)　$5x^2+7x-6$

(10)　$2x^2+5x-7$

たすきがけの因数分解　2

HR:　　氏名:

■　次の式を因数分解しなさい

(1)　$6x^2+x-1$

(2)　$6x^2+17x+12$

(3)　$6x^2+x-15$

(4)　$4x^2-4x-15$

(5)　$6x^2-11x-35$

(6)　$8x^2+2x-15$

(7)　$9x^2-12x+4$

(8)　$25x^2+30x+9$

(9)　$7x^2-13xy-2y^2$

(10)　$6x^2+5xy-6y^2$

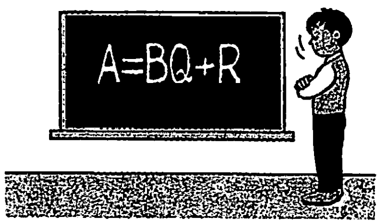
(11)　$20x^2+x-12$

(12)　$x^2-15x+36$

4 整式のわり算

41÷3を計算すると，商は□，あまりは□です。これは右のような方法で求めることができました。

$$\begin{array}{rl} 13 & \\ 3\overline{)41} & \\ 3 & \leftarrow 3\times1 \\ \hline 11 & \leftarrow 41-30 \\ 9 & \leftarrow 3\times3 \\ \hline 2 & \leftarrow 11-9 \end{array}$$



ここで学ぶこと 数学Iで整式のたし算，ひき算，かけ算について学びました。ここでは，整式のわり算について学びます。

▷ 整式のわり算は，整数のわり算と同じような方法で次のように行います。

例 7 ［整式のわり算］

x^2+5x+7 を $x+2$ でわります。

$$\begin{array}{rrl} & x+3 & \\ x+2\,\big) & x^2+5x+7 & \\ & x^2+2x & \leftarrow (x+2)\times x \\ \hline x^2\text{を消す} & 3x+7 & \leftarrow (x^2+5x+7)-(x^2+2x) \\ & 3x+6 & \leftarrow (x+2)\times 3 \\ \hline 3x\text{を消す} & 1 & \leftarrow (3x+7)-(3x+6) \end{array}$$

整数のわり算の場合

$$\begin{array}{rl} 13 & \\ 12\overline{)157} & \\ 12 & \leftarrow 12\times1 \\ \hline 37 & \leftarrow 157-120 \\ 36 & \leftarrow 12\times3 \\ \hline 1 & \leftarrow 37-36 \end{array}$$

1は，わる式 $x+2$ よりも次数が小さいので，これ以上計算を続けることができません。

⇐ 1は0次，$x+2$ は1次です。

▷ 例7において，

$x+3$ を「x^2+5x+7 を $x+2$ でわった **商**(しょう)」といい，

1 を「x^2+5x+7 を $x+2$ でわった **あまり**」といいます。あまりは，わる式よりも次数が小さくなります。

あまりが0のとき，**わり切れる** といいます。

商

$$\begin{array}{rr} & x+3 \\ x+2\,\big) & x^2+5x+7 \\ & x^2+2x \\ \hline & 3x+7 \\ & 3x+6 \\ \hline & 1 \end{array}$$

あまり

練習 8 次の整式について，A を B でわった商とあまりを求めなさい。

(1) $A=x^2+7x+15$，$B=x+3$

(2) $A=2x^2-3x-5$，$B=2x-5$

例題 2 x^3+5x+7 を x^2-2x+3 でわった商とあまりを求めなさい。

解答

$$\begin{array}{rr} & x+2 \\ x^2-2x+3\,\big) & x^3\boxed{}+5x+7 \\ & x^3-2x^2+3x \\ \hline & 2x^2+2x+7 \\ & 2x^2-4x+6 \\ \hline & 6x+1 \end{array}$$

⇐ x^3+0x^2+5x+7 と考えて，x^2 の項はあけておきます。

答 商 $x+2$，あまり $6x+1$

練習 9 次の整式について，A を B でわった商とあまりを求めなさい。

(1) $A=x^3+3x^2+4x+5$，$B=x+1$

(2) $A=x^3+2x+1$，$B=x-1$

(3) $A=2x^3+3x^2-5$，$B=x^2+2x-1$

もっと練習しよう！ p.22 確認問題 6

▷ 例題2において，次のことが成り立ちます。

$$\underbrace{x^3+5x+7}_{\text{わられる式}}=\underbrace{(x^2-2x+3)}_{\text{わる式}}\underbrace{(x+2)}_{\text{商}}+\underbrace{6x+1}_{\text{あまり}}$$

整数の場合

41÷3の商は13，あまりは2であるから

41=3×13+2

一般に，整式 A を整式 B でわった商を Q，あまりを R とすると，次の式が成り立ちます。

$$A=BQ+R$$

ただし，R の次数は B の次数より小さい

わり切れるとき $R=0$

$$\begin{array}{rr} & Q \\ B\,\big) & A \\ \hline & R \end{array}$$

$A=BQ+R$

練習 10 次の整式について，A を B でわった商 Q とあまり R を求めなさい。また，その結果を $A=BQ+R$ の形に表しなさい。

$A=2x^3+7x^2-2x+9$，$B=x+4$

もっと練習しよう！ p.22 確認問題 7