

簡易版カルノー図?!で解く集合の要素の個数

有朋高校単位制課程 大谷 健介

0 はじめに

前々回の数実研で、中村先生が「キャロル図」についてレポート発表をされました。興味を持って、いろいろな問題に取り組んでみたのですが、この「集合の要素の個数」は、進学向けの問題集ではあまり重要視されていないようであり、3つの集合を取り上げる問題が意外に少なく、2つの集合を取り上げるものがほとんどでした。そこで、キャロル図の「～たちの宇宙」を取りはずすことにより、解法が極端にかんたんになることに気づき、これを用いて、「数学A基礎」という、進学希望ではない生徒を対象とした講座で実践してみました。

1 カルノー図とは？

カルノー図は電気の世界で活躍しているようで、論理回路をかんたんにするための有力なアイテムとなっており、これによってデジタル回路が動作を変えることなく、部品を減らして信頼性を高めることができるらしいのです。下表の空欄に1を入れていく作業を繰り返し、回路の簡単化を図るようです。

表中のAの1は集合Aを、0は集合 $\bar{A}$ を示しています。変数が多くなった場合は、どちらかに2変数を入れて考えるようです。3～5変数では、このカルノー図が有効とされており、それ以上になると別の図法があるようです。

2変数			3変数			4変数				
A \ B	B		AB \ C	C		AB \ C \ D	C			
	0	1		0	1		0	0	1	1
0			00			00				
1			01			01				
			11			11				
			10			10				

2 カルノー図の利用？

さて、今回は上の表のうち、2変数のものをアレンジして使ってみます。というか…この先は、ほぼキャロル図の簡易版といった感じです。

【例題】あるクラスでアンケート調査をしたところ、携帯電話を持っている生徒は30人、パソコンを持っている生徒は20人、両方を持っている生徒は15人であった。携帯電話またはパソコンを持っている生徒は何人いますか。

この問題は、 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ を理解して、活用するための問題です。
 簡単な問題ですが、ここではパズルの感覚で問題を解き、この種の問題のおもしろみを引き出そうと考えました。

ケータイ持っていない	ケータイ持っている	
5 20 15		PC持っている
	30	
	15	PC持っていない

ライン上とそれぞれの領域に該当する数を入れていくとかんたんに上のように数値を当てはめることができます。そして、この問題の答えは□の3つの数を合わせた35人となります。

一応、次のように一般化して生徒に示しますが、考え方の整理にとどめるだけで、実際には次々と数字を書き込んで答えを導きます。

$\bar{A}$	A	
$n(\bar{A} \cap B)$	$n(B)$ $n(A \cap B)$	B
$n(\bar{A})$	$n(A)$	
$n(\bar{A} \cap \bar{B})$	$n(\bar{B})$ $n(A \cap \bar{B})$	$\bar{B}$

両方のラインが交わる（座標平面で考えると原点）ところには $n(U)$ を書き込むことも場合によっては効果的ですが、図がごちゃごちゃしてしまうので、ここでは書かないことにしました。

数研出版 4Step の問題から一部抜粋して練習しました。

17 60 人の生徒に数学と英語の試験を行った。数学の合格者は 50 人、英語の合格者は 30 人、2 科目とも不合格であったものは 8 人であった。

- (1) 2 科目とも合格したものは何人か (2) 数学だけ合格したものは何人か
(3) 英語だけ合格したものは何人か

解答編では次のように解説されています

生徒全体の集合を全体集合 U 、数学の合格者の集合を A 、英語の合格者の集合を B とすると

$$n(U) = 60, n(A) = 50, n(B) = 30, n(\overline{A \cap B}) = 8$$

$$(1) \quad n(A \cup B) = n(U) - n(\overline{A \cup B}) = n(\overline{A \cap B}) = 60 - 8 = 52$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{より}$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 50 + 30 - 52 = 28$$

よって 2 科目とも合格したものは 28 人

$$(2) \quad n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 50 - 28 = 22$$

よって 数学だけ合格したものは 22 人

$$(3) \quad n(\overline{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 30 - 28 = 2$$

よって 英語だけ合格したものは 2 人

このレベルになると補集合や和集合、共通部分が自在に操れないと（理解できていないと）スムーズに解いていくことはできないでしょう。

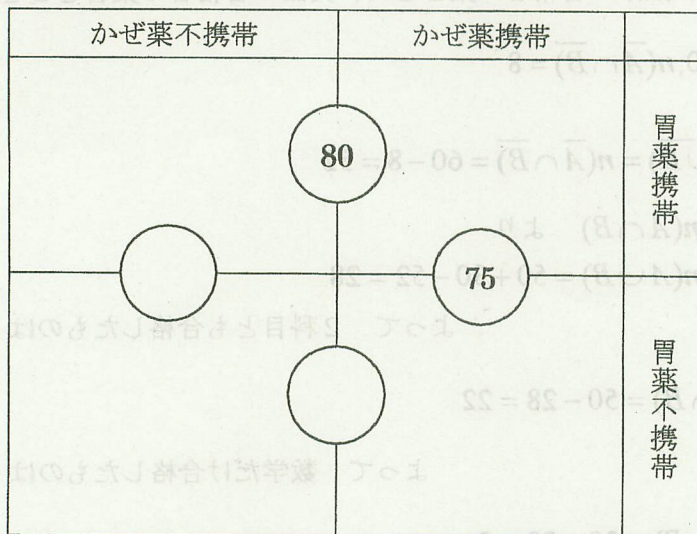
しかし、簡易板カルノー図ではかんたんにいけます

数学不合格		数学合格		
30		50		英語合格
				英語不合格
2				

同様に次の問題でも威力を発揮します。

19 海外旅行者100人のうち、75人がかぜ薬を、80人が胃薬を携帯していた。次のような人は、最も多くて何人か。また、最も少なくて何人か。

- (1) かぜ薬と胃薬を両方とも携帯した人
- (2) かぜ薬と胃薬の両方とも携帯していない人



3 まとめ

ド・モルガンの法則や $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ を活用して、集合の要素の個数を求めることは重要な考え方ですが、それを視覚的に捉えてひもといていくこともまた数学的な考え方の良さを訴えていると思います。このセクションは、他の場合の数や確率の単元に比べると、おもしろみの少ないところだと思います（たぶん）。そんな中で、このようなパズル的な要素を加味すると、ちょっとしたアクセントになって生徒の良い印象となって残っていくものだと考えています。

いきなり「キャロル図」で、3変数の問題に取り組むのは難しいと思いましたが、このステップを踏むと、時間が許せば3変数の問題にも取り組むことができると思いました。

これまでは、ベン図一辺倒でこのセクションを指導していましたが、そうではないことを数実研でまた教わりました。また一つ「呪縛」から解かれました。

「大学入試向け問題集」の「難易度B問題」に挑戦

1 50人の人に、AとBの2問のクイズを出題したところ、Aを正解した人は27人、Bを正解した人は13人、A、Bともに正解した人は4人いた。

- (1) AとBの少なくとも一方を正解した人は何人いるか
(2) AもBも正解しなかった人は何人いるか
(3) Aだけ正解した人は何人か (4) Bだけ正解した人は何人か

2 60人の生徒に数学と英語の試験を行った。数学の合格者は50人、英語の合格者は30人、2科目ともに不合格であった者は8人であった。

- (1) 2科目とも合格した者は何人か (2) 数学だけ合格した者は何人か
(3) 英語だけ合格した者は何人か

3 全体集合 U と、その部分集合 A 、 B に対して、

$$n(U) = 50, n(A \cup B) = 42, n(A \cap B) = 3, n(\bar{A} \cap B) = 15$$

であるとき、次の集合の要素の個数を求めよ。

- (1) $\bar{A} \cap \bar{B}$ (2) $A \cap \bar{B}$ (3) A (4) B

- 4 ある地区で、新聞 A を講読している世帯は全体の50%、新聞 B を講読している世帯は全体の60%、両方を講読している世帯は全体の30%、どちらも講読していない世帯は8世帯であった。このとき、A だけ講読している世帯は全体の何%か。また、この地区の世帯数を求めよ。

- 5 海外旅行者100人のうち、74人が風邪薬を、80人が胃薬を携帯していた。次のような人は、最も多くて何人か。また、最も少なくして何人か。

- (1) 風邪薬と胃薬を両方とも携帯した人
(2) 風邪薬と胃薬を両方とも携帯していない人